Universidade Anhanguera de São Paulo
UNIAN

Mestrado Acadêmico em Educação Matemática
Ensino e Aprendizagem de Matemática e suas Inovações

Vetores e suas representações em livros didáticos de Engenharia

Celso Luiz Andreotti

São Paulo
2017

Celso Luiz Andreotti

Vetores e suas representações em livros didáticos de Engenharia

Dissertação apresentada como exigência parcial à Banca Examinadora da Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN, para a obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática, sob orientação da Professora Doutora Maria Elisa Esteves Lopes Galvão.

São Paulo
2017

Ficha Catalográfica elaborada por:
Bibliotecária Roselaine R. de Bastos Novato CRB/8 9676

A577v Andreotti, Celso Luiz

Vetores e suas representações em livros didáticos de engenharia. / Celso Luiz Andreotti. – São Paulo, 2017.

229 f.: il.; 30 cm

Dissertação (Programa de Pós-graduação em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós-graduação - Universidade Anhanguera de São Paulo, 2017.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

1. Vetores. 2. Conceito de vetor. 3. Trigonometria. 4. Representações semióticas. 5. Tratamento. 6. Conversão. 7. Livros didáticos de engenharia

CDD 510.7

Banca Examinadora

Profa. Dra. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

Profa. Dra. Monica Karrer

Prof. Dr. Luiz Gonzaga Xavier de Barros

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total e parcial desta Dissertação por processos de fotocópias ou eletrônicos.

Assinatura   Local e Data

Dedico este trabalho ao meu pai Ângelo (*in memoriam*) e minha mãe Victória, minha esposa Valéria e meu filho João Victor, a toda minha família, aos amigos, a minha orientadora e a todos as pessoas que em graus diferentes me ajudaram a concluir esta importante etapa de minha vida.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente à minha família pelo apoio, pelo incentivo, pela compreensão e paciência, que tornaram minha tarefa possível de ser realizada. Sem isso, não teria concluído meu trabalho.

À Professora Dra. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão, quem soube com extrema competência, orientar-me ao longo desse trabalho. Sempre muito paciente, solícita e muito profissional, permitindo que eu trilhasse um ótimo caminho e a quem expresso minha imensa gratidão.

À Professora Dra. Monica Karrer e ao Professor Dr. Luiz Gonzaga Xavier de Barros, por seus valiosos comentários e sugestões dadas em meu exame de qualificação.

À Professora Dra. Maria Helena Palma de Oliveira, a quem devo agradecer pelas primeiras sugestões e orientações, que foram muito importantes.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática pelo aprendizado proporcionado e pelas ótimas experiências vividas em sala de aula. Especialmente àqueles com quem tive o privilégio de participar de suas aulas: Aparecida Rodrigues, Marlene Alves Dias, Rosana Nogueira de Lima, Vera Helena Giusti de Souza, Ruy César Pietropaolo e Ubiratan D’Ambrosio.

A todos os amigos do programa de mestrado que participaram de minha trajetória e contribuíram de certa forma para essa conquista, entre eles, Renato Agricco e Luís Pacheco.

À Universidade Anhanguera de São Paulo - UNIAN pela concessão de bolsa de estudos integral, sem a qual não seria possível a realização do mestrado.

A todos vocês, em agradecimento, um sincero e forte abraço.

“Combati o bom combate, terminei a minha carreira, guardei a fé. ”

(II, Timóteo, 4: 6-8)

Resumo

ANDREOTTI, C. L. **Vetores e suas representações em livros didáticos de Engenharia**. 2017. 229f. Dissertação de Mestrado - Mestrado em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

O nosso objetivo com este trabalho é o de investigar, em livros didáticos das disciplinas dos cursos de engenharia nas modalidades Mecânica e Produção, quais são as abordagens conceituais e as representações semióticas utilizadas para o objeto matemático vetor. Analisaremos também de que maneira são realizadas as articulações entre os diversos registros predominantemente utilizados nas áreas de Matemática e Tecnologia, registros estes que podem ser em língua natural, figural, gráfico ou simbólico. Em outras palavras, verificaremos a produção e as transformações de tratamento e conversão entre as diversas representações para os vetores apresentadas nos livros didáticos e também como são especialmente tratados os conhecimentos trigonométricos nas representações vetoriais utilizadas nas áreas técnicas. Esta pesquisa está fundamentada na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (2006, 2011a, 2011b), que trata do funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática, por meio da produção, tratamento e conversão das representações semióticas. Nossas questões de pesquisa estão relacionadas à forma como é abordado o conceito de vetor, aos tipos de representações para os vetores que são utilizadas nas diversas disciplinas e à identificação das transformações de tratamento e conversão nos conteúdos e problemas propostos nos livros didáticos da Engenharia. Realizamos uma pesquisa de cunho documental e com metodologia baseada na análise de conteúdo proposta por Bardin (1977), adaptada à nossa pesquisa. Escolhemos três instituições de ensino e onze livros de diferentes disciplinas para a coleta e análise de dados. Pudemos identificar, que algumas representações vetoriais que são privilegiadas em livros de Álgebra Linear e Geometria Analítica, não são as mais utilizadas, necessariamente, nos livros técnico-científicos e o contrário ocorre com a representação algébrica trigonométrica, amplamente utilizada nas engenharias. Observamos que, nos livros de disciplinas da área de matemática, não é dada ênfase para as transformações de conversão entre as diversas representações semióticas para os vetores, condição oposta ao que foi constatado nos livros técnico-científicos. Notamos, também, outros aspectos importantes que podem tornar a compreensão do objeto matemático vetor mais complexa, aspectos esses relativos à diversidade de notações adotadas nos livros. Concluímos que as muitas possibilidades de representações semióticas e as variadas notações e simbologias não são completamente convergentes quando se trata da abordagem de vetores. Mais especialmente nos textos da área de Matemática, constatamos que é dado maior destaque às representações algébricas, neste caso, às representações em coordenadas cartesianas. Por outro lado, nos textos das áreas técnicas, predominam as representações geométrica e trigonométrica, o que poderá vir a gerar dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem deste objeto.

Palavras-chave: Vetores. Conceito de vetor. Trigonometria. Representações semióticas. Tratamento. Conversão. Livros didáticos de Engenharia.

Abstract

ANDREOTTI, C. L. **Vectors and their representations in Engineering textbooks**. 2017. 229f. A Master's Dissertation. Master's Degree at Mathematics Education; Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

Our objective in this work is to investigate, in textbooks of the disciplines of the engineering courses in the Mechanics and Production modalities, their conceptual approaches and the semiotic representations used for the vector mathematical object. We shall also analyze how the articulations between the various registers predominantly used in Mathematics and Technology areas, those registers can be shown in natural, figural, graphic or symbolic language. In other words, we shall verify the production and transformations of treatment and conversion between the different representations presented in textbooks and how the trigonometric knowledge in the vector representations used in the technical areas are specially treated. This research is based on Raymond Duval's Theory of Registers of Semiotic Representations (2006, 2011a, 2011b), which deals with the cognitive functioning of understanding in Mathematics, through the production, treatment and conversion of semiotic representations. Our research questions are related to the way in which the concept of vector is approached, the types of representations for the vectors that are used in the different disciplines and the identification of the transformations of treatment and conversion in the contents and problems proposed in the textbooks of Engineering. We conducted a documentary research with methodology based on the content analysis proposed by Bardin (1977), adapted to our research. We chose three educational institutions and eleven books of the different disciplines for our data collecting and analysis. We identified that some vector representations that are privileged in Linear Algebra and Analytical Geometry books, are not the most used, necessarily, in the technical-scientific books and the opposite occurs with the trigonometric algebraic representation, widely used in engineering. We have noticed that, on the mathematics textbooks, no emphasis is presented on conversion transformations between the various semiotic representations for vectors, a condition which is the opposite of what has been found in the technical-scientific books. We have also noted other important aspects that may affect the comprehension of the mathematical object vector, making it more complex, aspects related to the diversity of notations adopted in the books. We conclude that the many possibilities of semiotic representations and the diverse notation and symbology are not totally convergent when it comes to the vector approach. More especially in the texts of the area of Mathematics, we note that the algebraic representations, in this case, are given more prominence to the representations in cartesian coordinates. On the other hand, in the texts of the technical areas, the geometric and trigonometric representations predominate, which can generate difficulties in the teaching and learning processes of this object.

Keywords: Vectors. Vector concept. Trigonometry. Semiotic representations. Treatment. Conversion. Engineering textbooks.

Lista de figuras

Lista de quadros

Sumário

Introdução

O conceito de vetor está presente em diversas disciplinas do curso de Engenharia, e é significativa e relevante sua importância para as disciplinas de Física, Mecânica Aplicada, Mecânica Geral, Resistência dos Materiais, Elementos de Máquina, Vibrações Mecânicas, entre outras e, de modo mais indireto, para as disciplinas de Desenho Técnico, Sistemas Hidráulicos e Pneumáticos, Projetos de Máquinas, Processos de Fabricação, entre outras, que trazem o conceito vetorial em sua literatura. Podemos encontrar os vários aspectos relacionados aos vetores elencados nas matrizes curriculares e planos de ensino e aprendizagem dos cursos de Engenharia Mecânica e Engenharia de Produção e nos livros didáticos dessas disciplinas, nos quais o conceito de vetor é diversamente explorado. Observa-se que para as aplicações da Física ou da Engenharia os conteúdos trigonométricos também são essenciais e estão inseridos em uma das formas de representações dos vetores.

O interesse por esta pesquisa nasce do grande valor desse objeto matemático para trabalhar com as aplicações na Engenharia e, especialmente, das observações cotidianas das dificuldades apresentadas por muitos alunos quando lidam com o objeto matemático vetor, seja, por um lado, nas operações vetoriais, que exigem o domínio de alguns conceitos básicos da Matemática, como a Trigonometria, entre outros, ou, por outro lado, nas diversas possibilidades de representação do objeto e as habilidades e conhecimentos necessários que permitam a passagem de uma forma de representação para outra. Tal passagem de representação é chamada por Duval (2006, 2011a, 2011b) uma transformação semiótica, e será tratada em maior profundidade em nosso referencial teórico.

Bittar (2011) discutiu, em sua pesquisa de doutorado na França, algumas dificuldades dos alunos relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor. Destaca a multiplicidade de representações semióticas presentes no ensino do conceito de vetores e a necessidade de se transitar entre esses registros como motivos para as muitas dificuldades por parte dos estudantes. Segundo Bittar (2011, p.92), quando se introduz o conceito de coordenadas vetoriais é comum o estudante relacionar com as propriedades das coordenadas de um ponto, apreendendo de maneira errônea a ideia de que a posição de um vetor, no espaço ou no plano, é importante e imprescindível para definir suas coordenadas, em outras palavras, é importante deixar claro para o estudante que um vetor qualquer pode ser representado com origem coincidindo com a origem do sistema de eixos ou com origem em qualquer outro ponto do plano ou do espaço e, desde de que mantenha suas características inalteradas, ou seja, seu módulo, direção e sentido será um representante do mesmo vetor.

O primeiro contato do estudante com o conceito de vetor é previsto para acontecer no Ensino Médio (EM), na disciplina de Física, por meio do paralelogramo de forças e, posteriormente, nos anos iniciais de alguns cursos universitários, nas disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear, por exemplo. As abordagens para este objeto são bastante variadas, passando pelas representações em registros da língua natural, figural, gráfico e simbólico (neste caso, com destaque para o uso de Trigonometria), registros esses que serão abordados no referencial teórico.

Basicamente, temos a conceituação e a representação de vetor do ponto de vista da Física, que também é muito utilizada na Engenharia e, de outra forma, a conceituação e a representação do ponto de vista da Matemática. Em meio a essas duas vertentes, encontra-se o estudante que precisa dominar esses conhecimentos e ter habilidades para transitar entre as diversas representações disponíveis. O livro didático é uma fonte de estudo e consulta e, portanto, justifica-se a preocupação com as representações semióticas para os vetores adotadas no desenvolvimento de seus conteúdos e como são feitas as passagens de uma representação semiótica para outra.

Para a revisão de literatura, identificamos pesquisas, no âmbito da Educação Matemática, relacionadas com o objeto matemático vetor e, em particular, à representação algébrica trigonométrica. Destacamos Castro (2001) que investigou a articulação entre os registros de representação para os vetores e Patrício (2011) que tratou das dificuldades dos alunos com relação à produção, ao tratamento e à conversão das representações semióticas de vetores.

Watson, Spirou e Tall (2003) trataram da convergência dos fenômenos físicos e do simbolismo matemático para a conceituação deste objeto e, Poynter e Tall (2005) consideraram os diferentes pontos de vista, da Física e da Matemática, para melhor conceituar vetor para os estudantes.

A representação semiótica, em registro simbólico, na representação algébrica trigonométrica, é bastante explorada em disciplinas das Engenharias e, portanto, justifica-se a escolha do artigo de Lima, Sauer e Sartor (2011), que trataram da importância da interação das ciências da Engenharia junto aos professores e alunos do Ensino Médio (EM) e a dissertação de Nascimento (2005), que propõe a construção de uma tabela trigonométrica, a partir da qual os conceitos das razões trigonométricas pudessem ser apreendidos.

Nossa pesquisa foi fundamentada na teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (2006, 2011a, 2011b), que trata do funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática, por meio da produção, tratamento e conversão das representações semióticas em distintos registros. Essa teoria nos permitirá analisar as possibilidades de representações para os vetores, encontradas em livros didáticos da Engenharia, e comparar com a abordagem apresentada nos textos destinados às disciplinas de conhecimento matemático.

As disciplinas técnico-científicas da engenharia necessitam do conceito de vetor, e consequentemente de diversos outros conhecimentos matemáticos envolvidos em cada uma das formas de representação vetorial adotada nos livros didáticos, tais como a Geometria, a Trigonometria, a representação gráfica em espaços bidimensionais e tridimensionais.

Os nossos objetivos específicos tratam, dentre outros, de:

- Verificar quais são as formas de registros de representação semiótica existentes nos livros didáticos, na parte teórica ou nos exercícios propostos;
- Identificar as conversões utilizadas nos livros-texto;
- Comparar os tipos de registros de representações semióticas para os vetores adotadas em livros-texto das diferentes disciplinas;

- Investigar como os vetores são utilizados na resolução de problemas específicos nas diversas disciplinas da engenharia e como são tratados os conhecimentos trigonométricos aplicados no conceito vetorial.

É necessário investigar como os autores lidam, em seus livros didáticos, com a diversidade de registros de representações semióticas para vetores levando em consideração as três atividades cognitivas: a produção, o tratamento e a conversão dessas representações que serão abordadas no capítulo sobre o referencial teórico. Identificando, no exercício profissional, esta necessidade, surgiu o interesse em investigar e responder a algumas questões de pesquisa:

- Como é abordado o conceito de vetor nos livros didáticos das diversas disciplinas científicas de Engenharia?
- Como os vetores são utilizados nas diversas disciplinas para a resolução de problemas?
- As conversões das representações semióticas de vetores estão presentes nas partes teóricas dos livros didáticos?
- Os exercícios propostos nos livros didáticos exploram as operações semióticas de conversão para as possíveis resoluções?
- Como a Trigonometria e outros conceitos matemáticos estão relacionados às representações dos vetores em tais livros?

Realizamos uma pesquisa de caráter documental e o levantamento de dados foi feito exclusivamente a partir de livros didáticos de diversas disciplinas, comuns aos cursos de Engenharia Mecânica e da Engenharia de Produção, constantes em Planos de Ensino e Aprendizagem (PEA) do Ensino Superior (ES) de alguns cursos de Engenharia de instituições públicas e privadas, do estado de São Paulo, com o objetivo geral de identificar e analisar quais as abordagens e formas de representação de vetor adotadas pelos autores.

Nossa pesquisa está estruturada em seis capítulos, sendo que o primeiro capítulo trata de considerações sobre o conceito de vetor.

O segundo capítulo apresenta o referencial teórico, no qual nossa pesquisa está fundamentada, e trata-se da teoria dos Registros de Representações Semióticas, Duval (2006, 2011a, 2011b).

No terceiro capítulo está a revisão de literatura, onde são apresentadas algumas pesquisas alinhadas ou relacionadas ao nosso tema.

No quarto capítulo discutimos a metodologia aplicada no levantamento de dados e, no quinto capítulo apresentamos os dados e as análises dos livros didáticos, tanto da parte teórica quanto dos exercícios propostos.

O capítulo seis contempla as conclusões e considerações finais deste trabalho.

Capítulo 1 - Considerações sobre vetores

1.1 Observações iniciais

Os conceitos e objetos da Matemática são utilizados em muitas áreas do conhecimento humano, como a Física, a Química, a Economia, a Biologia, a Medicina entre tantas outras, assumindo um papel importante dentro do cenário científico atual. O vetor, como um objeto matemático, aparece em diversas áreas, mais especificamente nas diversas disciplinas técnicas que compõem a grade curricular dos cursos de Engenharia, como Física, Resistência dos Materiais, Mecânica Geral, Mecânica Aplicada, Vibrações Mecânicas, entre outras.

Quando tratamos do conceito de vetor mobilizamos as noções de comprimento, direção e sentido, relacionadas à sua definição de caráter geométrico, como um segmento orientado, a partir da qual podem ser estabelecidas várias representações, com características algébricas ou trigonométricas. O interesse pela pesquisa do tema é devido à importância dos vetores, por permear muitas disciplinas dos cursos de Engenharia e às dificuldades apresentadas pelos alunos em lidar com este objeto que verificamos na nossa atividade docente. A identificação das diversas formas de abordagem do conceito de vetor nas variadas disciplinas sugere uma linha de investigação que passe por uma pesquisa documental, com foco nos livros didáticos.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, PCNEM (1998), vetores não estão elencados como parte do conteúdo de Matemática para o Ensino Médio (EM), embora haja menção nas orientações curriculares complementares para o EM, sobre a necessidade de abordagem do conceito de vetor, por parte do professor de Matemática, tanto do ponto de vista geométrico, quanto do ponto de vista algébrico. Embora nos PCNEM se reconheça a importância do estudo de vetores, este fica relegado a uma única abordagem, ou seja, a abordagem geométrica e sob o ponto de vista exclusivo da Física, conforme apontado nas orientações curriculares do EM:

> A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física. (BRASIL, 2006, p.77)

Conforme o que atestam as orientações curriculares, alguns alunos tomam contato com este objeto no EM apenas por meio das aulas de Física e o retomam no início dos cursos superiores, da área de ciências exatas, nas disciplinas de Geometria Analítica ou Álgebra Linear e, novamente na Física.

Dentro deste contexto, pretendemos investigar quais são as abordagens para o conceito de vetor adotadas pelos autores dos livros didáticos destinados a disciplinas do curso de Engenharia e quais são as opções de *representações semióticas* para os vetores por eles utilizadas, de acordo com os quatro tipos de registros semióticos categorizados por Duval, ou seja, *língua natural, figural, gráfico e simbólico*, e os recursos geométricos, algébricos e trigonométricos utilizados na produção dessas representações; todos esses conceitos são explanados no *Capítulo 2 - Referencial Teórico.*

Essa abordagem nos conduziu aos textos relacionados principalmente à disciplina Vetores e Geometria Analítica, da área de Matemática e às disciplinas das áreas técnicas dos cursos de Engenharia Mecânica e Engenharia de Produção. Escolhemos deixar de lado a definição de vetor por meio matricial, em razão da extensão do trabalho, uma vez que essa representação está mais fortemente relacionada aos conhecimentos matemáticos da Álgebra Linear e às disciplinas das áreas técnicas dos cursos de Engenharia de Computação e Engenharia Elétrica, entre outros. Estes recursos algébricos, geométricos, trigonométricos e matriciais que podem estar associados a este objeto podem torná-lo bastante complexo para os estudantes, do ponto de vista da Matemática e também do próprio processo cognitivo.

1.2 Breve histórico sobre vetores

Segundo Katz (1995), o conceito de vetor aparece, pela primeira vez, com origem na Física, por volta do século IV a.C., num provável tratado atribuído a

Aristóteles, intitulado Mecânica. Nele encontra-se um problema no qual é descrito o movimento de um corpo, possivelmente no plano, que acontece sobre uma linha reta, que é a diagonal de um paralelogramo, e seria equivalente ao gerado pelo deslocamento simultâneo, em outras duas linhas retas que contêm os lados deste paralelogramo, de maneira constante e proporcional.

Como ressalta Katz (1995, p.199), Heron de Alexandria conseguiu uma prova bastante interessante para essa ideia, assumindo que se um corpo em movimento uniforme sobre um dos lados do paralelogramo, digamos $\overline{\mathrm{AB}}$, tem o mesmo movimento uniforme que outro corpo que está sobre o outro lado do paralelogramo, digamos $\overline{\mathrm{AD}}$, então, ambos levariam a um movimento sobre a diagonal $\overline{\mathrm{AC}}$, equivalente a soma dos outros dois movimentos, em $\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{AD}}$, conforme ilustra a figura 1.

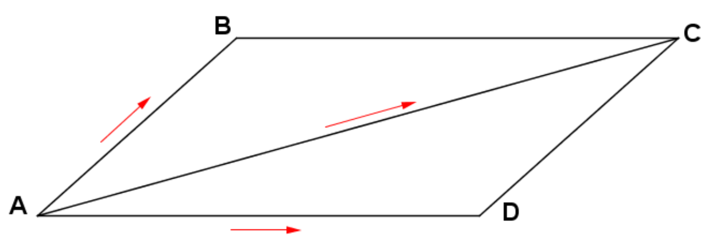


Figura 1: Paralelogramo de movimentos.
Fonte: Acervo pessoal.

Podemos considerar, ainda na figura 1, que um objeto cujo movimento tem origem em $\boldsymbol{A}$ e com fim no ponto $\boldsymbol{C}$, poderia ser o resultado de dois movimentos que teriam o mesmo efeito físico, como por exemplo, o primeiro movimento sendo efetuado de $\boldsymbol{A}$ até $\boldsymbol{B}$ e depois de $\boldsymbol{B}$ até $\boldsymbol{C}$, ou o segundo de $\boldsymbol{A}$ até $\boldsymbol{D}$ e depois de $\boldsymbol{D}$ até $\boldsymbol{C}$.

Essa ideia básica de somar dois movimentos vetorialmente foi generalizada para forças em Física, nos séculos XVI e XVII, e pode ser encontrada, também, no trabalho de Isaac Newton sobre as leis do movimento, o seminal *"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"*, no qual Newton afirma que um corpo submetido a duas forças simultâneas, de direções distintas, descreveria movimento através da diagonal de um paralelogramo. Heron de Alexandria afirma também que o movimento teria o mesmo efeito de movimento que duas forças equivalentes, atuando separadamente em seus outros dois lados. Está implícita nessa ideia, a noção de adição vetorial. Ainda precedendo Newton, podemos encontrar esta mesma ideia no trabalho de Galileu Galilei sobre o movimento, quando ele descreve o "*Princípio de Independência de Movimentos*" tendo como resultante da combinação dos movimentos, a soma vetorial das velocidades de cada movimento independente.

Katz (1995) chama atenção para o fato de que apesar de Newton usar bastante o paralelogramo em seu trabalho, ele não estava somando vetores, pois não conhecia quaisquer operações algébricas envolvendo as forças consideradas. A ideia de unir a Álgebra e a Geometria, e criar uma linguagem vetorial tem forte desenvolvimento nos séculos XVII e XVIII, mas, no entanto, a técnica de usar as diagonais de um paralelogramo como resultado da combinação das forças, daquela época, demonstrou ser uma forma bastante interessante e simples de introduzir o conceito de vetor para os alunos, podendo ser um ponto de partida muito adequado para a apreensão deste objeto tão importante e de grande aplicação. Esse pensamento é ancorado, em parte, na seguinte afirmação: "Não obstante, parece que a noção de combinar as forças pelo método das diagonais é uma excelente ferramenta pedagógica para transmitir a ideia de um vetor para os estudantes". (KATZ, 1995, p.200, tradução nossa)[1]

Trazer ideias da Física que, por sua própria natureza, estão mais próximas do mundo real e, portanto, por vezes melhor manipuláveis, pode ajudar a apresentar os conceitos vetoriais aos alunos, e facilitar a estes a construção de tal conhecimento. Quando dizemos "manipuláveis", é óbvio que não estamos nos referindo ao objeto matemático propriamente, mas sim, à ideia física que está associada diretamente a ele e é muito mais acessível para o estudante, por ser mais tangível e, consequentemente, pode tornar-se um conceito não tão abstrato e que pode fazer mais sentido.

[1]Never the less, it would seem that the notion of combining forces by this method of diagonals is an excellent pedagogical tool for imparting the idea of a vector to students. (KATZ, 1995, p.200)

Katz (1995) utiliza muitos elementos e materiais históricos para apresentar o conceito de vetor encontrado em muitos problemas da ciência enfrentados e solucionados por grandes matemáticos e cientistas em geral, tais como Heron de Alexandria, Newton, Wessel, Hamilton entre outros notáveis. Informações históricas podem ajudar no estudo de muitos tópicos de Matemática e dão mais sentido ao aprendizado e, também, podem enriquecer as aulas, tornando-as mais interessantes e atraentes para os estudantes. Podemos encontrar essas ideias nas palavras do autor:

> Não só os materiais históricos ajudam a fornecer uma visão sobre o entendimento dos próprios assuntos, mas também, a sua discussão ajuda a animar as aulas e mostrar aos alunos que Álgebra Linear, bem como o resto da Matemática, cresceu em um determinado meio e foi desenvolvida a fim de resolver certos problemas. (KATZ, 1995, p.204, tradução nossa)[2]

Podemos ir um pouco além dessas ideias, e observar que poderíamos ter estes aspectos históricos incluídos em livros didáticos, já que poderiam ser úteis para professores e alunos nos processos de ensino e de aprendizagem, do conceito de vetor. Os elementos históricos envolvidos poderiam ser favoráveis para a compreensão das diversas maneiras com que um vetor pode ser representado, seja em sua forma geométrica ou algébrica, uma vez que o estudante contaria com mais subsídios para o entendimento deste objeto matemático e, consequentemente, melhor apreensão do conceito e, portanto, facilitando a transição entre essas possíveis representações.

1.3 Considerações sobre representações de vetores

Apresentaremos as principais definições e representações associadas aos vetores com as quais os alunos se deparam ao longo dos cursos de Engenharia. A primeira representação e, em certos aspectos a mais simples, é a representação que se vale dos recursos da língua natural, como por exemplo: “O vetor

[2]Not only do the historical materials help provide insight into the understanding of the topics themselves, but also their discussion helps enliven the class and show the students that linear algebra, like the rest of mathematics, grew up in a certain milieu and was developed in order to solve certain problems. (KATZ, 1995, p.204)

deslocamento, com direção de 45º, medidos no sentido anti-horário em relação ao semieixo positivo $\boldsymbol{O_x}$, com sentido nordeste e comprimento de 100m". Neste caso, o vetor é descrito por elementos que são as próprias palavras da língua portuguesa, ou seja, a língua natural.

A representação de um vetor que denotamos por $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ ou simplesmente por $\vec{\boldsymbol{v}}$, como mostrado na figura 2, é realizada por meio de um segmento que é orientado por uma flecha que indica o sentido do vetor. A ponta da flecha é seu ponto final e a outra extremidade da flecha é o ponto inicial ou origem do vetor. Tal representação é feita por meio de uma figura que representa o objeto vetor.

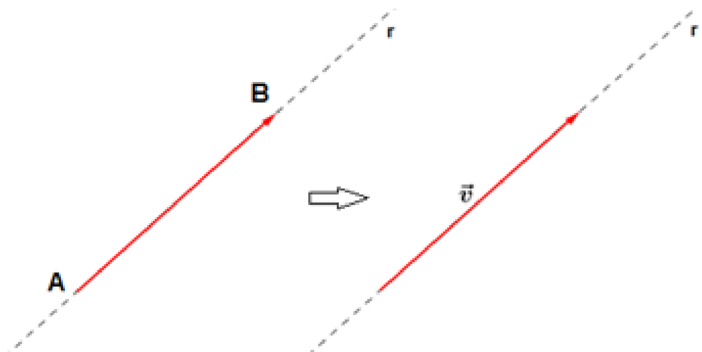


Figura 2: Representações figurais de um vetor.
Fonte: Acervo pessoal.

Essa representação permite que o estudante identifique, com certa facilidade, a direção do vetor dada pela reta suporte "**r**" que o contém e o seu módulo ($|\vec{\boldsymbol{u}}|$) definido como o comprimento do segmento orientado, também conhecido como norma do vetor. Ao escrever $\vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, queremos dizer que o segmento orientado $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ de origem em $\boldsymbol{A}$ e extremidade em $\boldsymbol{B}$, determina um representante do vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$. Desta forma podemos definir vetor como sendo uma classe de equipolência de segmentos orientados, a partir da qual escolhemos um de seus representantes para descrevê-lo, pois quaisquer outros segmentos orientados de mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento de $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, podem ser um representante do vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$**.** Entendemos por equipolência (BOULOS, 2005, pp.3-4), como sendo a relação de equivalência sob a qual um conjunto de segmentos de reta orientados possuem mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido.

Em consequência desta definição, o representante do vetor pode ser posicionado em qualquer região do espaço e, ainda assim será um representante da mesma classe de equipolência dos segmentos orientados, desde que sejam preservados sua direção, seu sentido e seu comprimento.

No paralelogramo $\boldsymbol{ABCD}$ da figura 3, temos os segmentos orientados $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{DC}}$ que possuem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento e determinam o mesmo vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$, e escrevemos $\vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{DC}}$, pois, todos pertencem à mesma classe de equipolência.

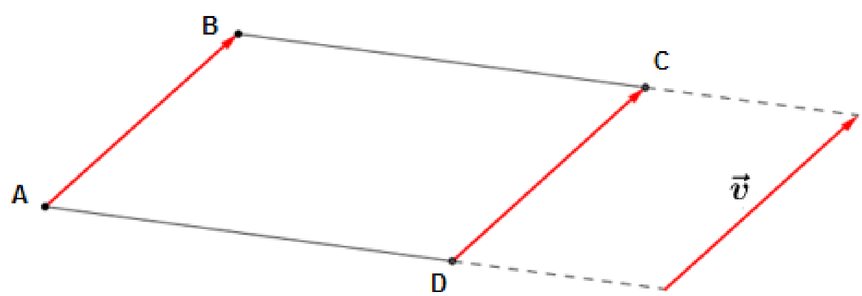


Figura 3: Segmentos orientados no paralelogramo $\boldsymbol{ABCD}$.
Fonte: Acervo pessoal.

As representações algébricas, em coordenadas, para um vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ no espaço tridimensional $\boldsymbol{R^3}$ podem ser construídas com base num sistema de coordenadas (em geral, ortogonal) e, considerada a ortogonalidade, o uso dos vetores unitários $\vec{\boldsymbol{\imath}}$, $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ e $\vec{\boldsymbol{k}}$, respectivamente na direção dos eixos ortogonais $\boldsymbol{O_x}$, $\boldsymbol{O_y}$ e $\boldsymbol{O_z}$.

O vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ pode ser representado, em sua configuração geral no espaço $\boldsymbol{R^3}$, na forma vetorial: $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{z}\vec{\boldsymbol{k}}$**,** conforme podemos verificar com auxílio da figura 4, ou ainda associado à representação algébrica em coordenadas $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ em relação à base $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$. Esta estrutura é mais simples e vantajosa nas operações vetoriais de adição e subtração em $\boldsymbol{R^3}$, quando comparamos com as operações vetoriais na forma geométrica.

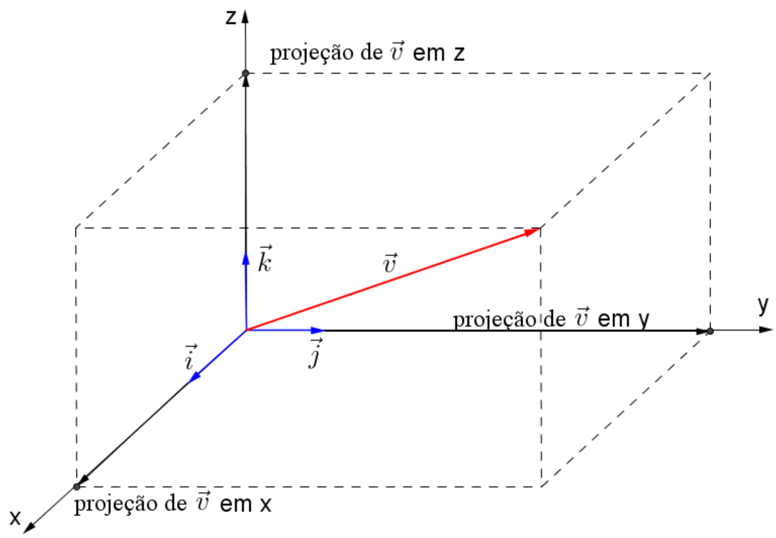


Figura 4: Vetor $\vec{v}$ e suas projeções ortogonais relacionadas à base $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.
Fonte: Adaptado: Camargo e Boulos, Geometria Analítica, 3ª ed,2005, p.84.

Outra possível e particular representação vetorial é a representação algébrica trigonométrica, na qual o vetor no espaço é representado pela tripla coordenada $\vec{v} = (x, y, z)$, ou para o plano com o par ordenado $\vec{v} = (x, y)$. Tais coordenadas são produzidas a partir do sistema de eixos cartesianos O_x,O_y e O_z, sobre os quais se projetam, ortogonalmente, as componentes vetoriais e, para tal representação, precisamos de conceitos de trigonometria para obtê-las. A figura 5 mostra o vetor $\vec{v}$ no plano com suas coordenadas (x, y), que determinam as componentes vetoriais deste vetor na forma trigonométrica.

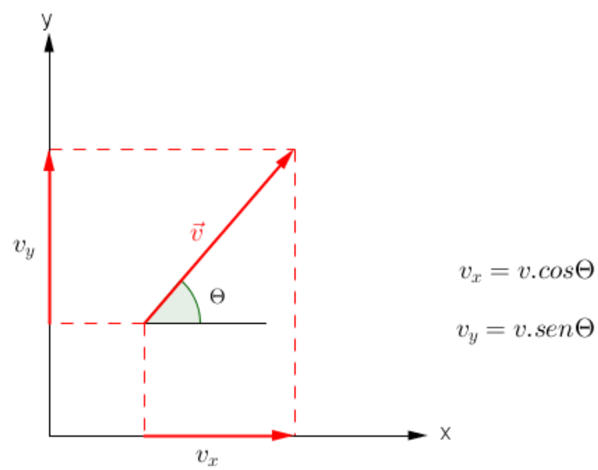


Figura 5: Componentes vetoriais do vetor $\vec{v}$.
Fonte: Acervo pessoal.

O vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ pode ser representado da seguinte forma vetorial:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v.cos\theta}\,\vec{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{v.sen\theta}\vec{\boldsymbol{j}},$$

expresso, então, pela soma de suas componentes, ou em suas coordenadas trigonométricas $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v.cos\theta}\ , \boldsymbol{v.sen\theta})$.

A representação algébrica na forma trigonométrica, tem grande relevância nas disciplinas de engenharia e é muito utilizada nesta área e, portanto, deve ser do domínio do estudante.

Uma outra forma de representação para vetores é a forma matricial, podendo ser uma matriz linha ou coluna. Para um vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$**,** no espaço, cujas coordenadas são $(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3})$ temos duas possibilidades para esta representação:

Matriz coluna: $\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \\ \boldsymbol{v_3} \end{bmatrix}$ ou Matriz linha: $\vec{\boldsymbol{v}} = [\boldsymbol{v_1} \quad \boldsymbol{v_2} \quad \boldsymbol{v_3}]$

A representação de vetores na forma matricial tem aplicações em várias áreas específicas da engenharia, tais como Automação, Robótica, Métodos de Elementos Finitos, Computação, Elétrica, entre outras, que se utilizam fortemente dos recursos da Álgebra Linear e da Geometria Analítica. No entanto, como já foi mencionado no início deste capítulo, a complexidade envolvida neste caso e as análises de tais representações tornariam nosso trabalho muito extenso e, em consequência disso, consideramos que poderiam ser abordadas em outra pesquisa. Na tese de Karrer (2006), podemos encontrar estudos que tratam de alguns aspectos das dificuldades de alunos de Computação com relação à exploração dos registros gráficos e matriciais.

Neste capítulo, tratamos de algumas *representações semióticas* de vetores com ênfase para aquelas que são mais utilizadas nas disciplinas da Engenharia e que são mais próximas à Física, tais como Mecânica Geral, Mecânica Aplicada, Resistência dos Materiais, entre outras. Fizemos um breve histórico sobre vetores para expor as ideias iniciais, que foram o embrião para a construção desse importante objeto matemático, que possui as mais diversas aplicações.

O próximo capítulo trata do referencial teórico, no qual este trabalho está apoiado. Serão abordados os principais aspectos relativos aos *registros de representações semióticas* de Raymond Duval, que detalharão teoricamente a linguagem utilizada até este momento.

Capítulo 2 - Referencial Teórico

A compreensão dos objetos matemáticos é um processo cognitivo bastante complexo e depende de uma série de fatores, dentre os quais, o conhecimento da linguagem matemática. A Matemática possui uma linguagem própria e precisa, tendo uma diversidade enorme de símbolos utilizados para a representação de seus objetos, e variadas formas de representá-los. Neste sentido, a evolução do pensamento matemático está associada também, ao desenvolvimento da semiótica, que por meio de sua estrutura de signos e símbolos permite que um objeto matemático, totalmente abstrato, possa ser representado e manipulado.

O processo de ensino e de aprendizagem envolve vários atores, quais sejam professores, alunos, metodologia, entre outros, e também os materiais didáticos disponíveis. A questão maior envolve o processo de ensino e de aprendizagem e tem como foco, nesta investigação, a aquisição do conceito de vetor. O livro didático tem papel importantíssimo nesse processo, tanto do lado do professor que necessita de um instrumento de apoio para o ensino, como pelo lado do aluno que o utilizará como referência e suporte para seus estudos.

Segundo Duval (2011a, p.14), para que haja apreensão de um conceito matemático é necessário que o estudante saiba transitar por pelo menos duas formas de registros de representações semióticas distintas para o mesmo objeto, digamos, transitar de uma representação em registro figural de um vetor, para a sua representação em registro simbólico e vice-versa. O objetivo desta pesquisa é investigar, entre outros aspectos, como os livros didáticos das disciplinas técnico-científicas tratam deste assunto, e se essa abordagem proporciona maneiras diversas de lidar com os vetores e, portanto, facilitar a aquisição do conceito de vetor pelo aluno. Diferentemente de outras ciências, a atividade matemática se desenvolve por meio das diversas representações semióticas de seus objetos e das manipulações dessas representações. Os tipos de registros de representações semióticas encontrados em livros didáticos para tratar do objeto matemático vetor, das operações, dos tratamentos e das conversões realizadas entre as diferentes representações, levam à escolha de um referencial teórico que está embasado nos diferentes textos que tratam da “Teoria dos Registros de Representações Semióticas” de Raymond Duval, a saber: o artigo de 2006 “*A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension In a Learning of Mathematics*”, o capítulo “Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática”, In: MACHADO, S.D.A. de 2011a e o livro de 2011b “Ver e ensinar a Matemática de outra forma – Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas”.

2.1 Vetores e os Registros de Representações Semióticas

A comunicação de ideias acontece das mais variadas formas, e se considerarmos o caso particular da escrita, acontece sempre por meio do uso de símbolos articulados de forma bem estruturada, como na língua natural, ou de uma maneira ainda mais específica e própria, como na linguagem matemática.

Os objetos matemáticos são puramente abstratos, existem apenas como ideias e, com isso necessitam de uma representação semiótica para serem compreendidos e manipulados, diferentemente do que acontece em outras ciências, nas quais os objetos podem ser experimentados e muitas vezes manejados fisicamente dentro de laboratórios, com a reprodução dos fenômenos observáveis ou ainda, observados diretamente na natureza.

As dificuldades de ensino e de aprendizagem matemática são de característica global, pois não são a princípio as dificuldades específicas de um determinado conceito e permeiam todos os estratos da atividade matemática.

Parte do sucesso no processo de aprendizagem é, por um lado, dependente da capacidade do estudante em saber lidar com as diversas estruturas matemáticas existentes, com suas propriedades e processos complexos, e com as muitas formas possíveis de representações para um mesmo objeto matemático. Por outro lado, o professor deve estimular e desenvolver no aluno a habilidade de trabalhar com toda essa complexidade e diversidade de processos matemáticos, para que isso possa gerar evolução em sua maneira de raciocinar.

Essas oportunidades podem ser reforçadas, entre outras maneiras, com o uso de material didático apropriado, que contemple toda essa diversidade de representações de objetos matemáticos, auxiliando desta forma, professores e alunos, dentro e fora da sala de aula.

Raymond Duval, psicólogo e filósofo francês, construiu sua Teoria dos Registros de Representações Semióticas apoiado em boa parte na ciência chamada Semiótica. Segundo Santaella (2007), a Semiótica surgiu quase que simultaneamente, entre o fim do século XIX e início do século XX, a partir de três fontes distintas, vindas da Rússia (antiga União Soviética), Europa e Estados Unidos, representados respectivamente pelos filósofos A. N. Viesse-Lovski e A. A. Potiebnia, Ferdinand de Saussure e Charles Sanders Peirce.

Como diz Santaella (2007), a Semiótica enquanto ciência é muito nova e, portanto, uma área do conhecimento ainda não completamente sedimentada e cujas indagações e pesquisas continuam em desenvolvimento. A partir dessa ideia que a autora nos coloca, podemos dizer que, de certo modo, torna-se difícil obter uma definição que seja em sua totalidade completamente abrangente para uma ciência incipiente e incompleta como a Semiótica.

Para a autora, a primeira dificuldade passa pelo entendimento do que é língua e o que é linguagem. A língua é um conjunto de elementos (sons e gestos) que permitem que haja comunicação, podendo, então, se manifestar por meio da oralidade ou da gestualidade. A capacidade humana em produzir, ampliar e compreender a língua e outras formas de expressão, como a pintura, a música entre outras, é o que se denomina de linguagem. Ainda, segundo Santaella, a compreensão do mundo acontece por meio da língua, que por sua vez se manifesta na linguagem verbal oral ou escrita, em complexa comunicação social.

De maneira muito despretensiosa, faremos algumas breves considerações conceituais sobre a Semiótica. Podemos dizer que Semiótica é a ciência universal dos signos e símbolos, que tem o objetivo de explicar como o ser humano observa e entende o mundo ao seu redor, como constrói o conhecimento e ainda como o compartilha, sendo essencial para toda a comunicação humana, qualquer que seja o meio em que ela aconteça. Segundo define Santaella (2007, p.13): “A Semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido".

Duval (2011b, p.71) distingue dois tipos completamente diferentes de sistemas semióticos, que são os códigos e os registros. Basicamente os códigos são sistemas semióticos que cumprem a função de comunicação, de transmissão de informação, como por exemplo, os alfabetos que possibilitam a passagem da língua falada para a escrita. Por outro lado, os registros cumprem funções cognitivas muito específicas dentro de determinado sistema semiótico, tais como os sistemas de escritas numéricas. Duval[3] (2006, p.111, tradução nossa) chama a atenção para o fato de que "nem todos os sistemas semióticos são registros, apenas os que permitem uma transformação de representações. "

Para a pesquisa, o ensino e a aprendizagem em Matemática, os registros semióticos são essenciais e são constituídos por símbolos e signos com os quais podemos acessar os objetos matemáticos. Os registros são sistemas semióticos disponíveis que temos para representar um objeto matemático. Segundo Duval (2011b, p.72), "Os registros são sistemas cognitivamente produtores, ou mesmo "criadores", de representações sempre novas. E a produção de novas representações permite descobrir novos objetos. "

Conforme destacado por Duval (2011b), os registros criam possibilidades para a transformação do conteúdo das representações produzidas e, são essas transformações que conduzem à aquisição de novos conhecimentos. E como aponta Barros (2011, p.2): "Um registro de uma representação semiótica é um sistema semiótico que permite que essa representação semiótica possa sofrer essas três transformações cognitivas: a produção, o tratamento e a conversão. "

O sucesso no processo de ensino e de aprendizagem Matemática não está relacionado somente com as produções das representações para os objetos, mas principalmente com as operações semióticas de transformações entre as representações. Tais transformações serão discutidas ao longo deste capítulo.

[3] Not all semiotic systems are registers, only the ones that permit a transformation of representations. DUVAL (2006, p.111)

Conforme Duval (2011a, p.15) "[...] a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas". Ainda, segundo o autor, é um engano pensar que as representações semióticas são apenas um mero instrumento para trazer à tona as representações mentais do indivíduo, para que sejam visíveis e possam ser acessadas e manipuladas por outras pessoas. As representações semióticas vão além das funções de comunicação, e são fundamentais para os processos cognitivos do pensamento matemático e para a própria produção de conhecimento.

A apreensão ou produção de uma representação semiótica do objeto matemático é chamada por Duval de *semiósis*, em outras palavras, os objetos matemáticos se tornam acessíveis e manipuláveis por meio do uso de signos e símbolos, ou seja, por meio de suas representações. Por exemplo, o vetor pode ser representado de diversas formas, como na linguagem algébrica, com a qual representamos $\vec{\boldsymbol{v}} = \mathbf{10}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{5}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$, passando a ser esta uma produção do objeto em questão.

Outro conceito importante é o de *noésis*, que se trata da apreensão conceitual de um objeto, ou seja, é o entendimento que se pode ter a partir da representação do objeto matemático e, também, a capacidade em reconhecer e extrair informações contidas na representação semiótica ou, quais propriedades matemáticas ela permite acessar.

De acordo com o conceito precedente e exemplificando, tomamos um vetor que, para ser definido, necessita de três elementos para caracterizá-lo, o módulo, a direção e o sentido. O vetor poderia representar, por exemplo, um deslocamento no plano ou no espaço. Esses aspectos cognitivos de apreensão conceitual, presentes na representação semiótica do objeto, fazem parte do processo de noésis.

Segundo Duval (2011a) o processo de cognição humano acontece quando há a mobilização de mais de um registro de representação semiótica e que a apreensão conceitual do objeto só pode acontecer com a compreensão das representações deste, ou seja, não há *noésis* sem que tenhamos *semiósis.*

Conforme o autor, os registros de representação semiótica podem ser classificados em quatro grupos distintos. No quadro 01 abaixo, podemos ver essa classificação concebida por Duval (2011a):

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	**Língua natural** Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	**Figuras geométricas planas ou em perspectivas** (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3): • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	**Sistemas de escritas:** • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	**Gráficos cartesianos:** • mudanças de sistema de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Quadro 1: Classificação dos diferentes registros.
Fonte: DUVAL, 2011a, p.14.

Os tratamentos mencionados no quadro são transformações das representações semióticas dentro de um mesmo sistema semiótico e serão melhor explanados logo adiante. Os tratamentos algoritmizáveis (concebidos a partir de algoritmos) são aqueles para os quais conseguimos estabelecer um conjunto de regras lógicas e operações bem definidas que deem conta da solução de um determinado problema ou classe de problemas. Já os tratamentos não algoritmizáveis não possibilitam o uso de algoritmos em sua estrutura.

Como definiu Duval (2011a), os registros multifuncionais ou plurifuncionais são aqueles cujos tratamentos não são algoritmizáveis. De outra maneira, podemos entender que são aqueles registros utilizados nas mais diversas áreas do conhecimento humano, com funções variadas de comunicação e tratamento, como a língua natural, por exemplo, que pode ser aplicada em toda a ciência para descrever algumas situações e estruturas particulares a cada uma das áreas. A língua natural não se aplica especificamente para essa ou aquela ciência, ela é estruturada para servir a toda cultura humana indistintamente.

Os registros monofuncionais são registros principalmente algoritmizáveis, ou seja, podemos criar regras ou um conjunto delas para resolver um problema específico. São registros concebidos especificamente para uma determinada função, com uma simbologia própria, da qual se dispõe para a resolução de problemas matemáticos, obedecendo a uma sequência lógica e complexa. Os sistemas de escritas numéricas, algébricas, simbólicas e de cálculos gráficos, por exemplo, são registros monofuncionais que permitem algoritmos particulares para os tratamentos mobilizados em cada um notadamente.

Quanto aos registros terem funções discursivas ou não discursivas, nos remete a dizer simplesmente se os registros mobilizados são de uma linguagem textual ou se são representados por figuras geométricas ou gráficos, respectivamente.

A seguir, exemplificamos os registros disponíveis considerando os vetores:

- Registros da língua natural, que são de natureza multifuncional (ou plurifuncional) e com representação discursiva, como, por exemplo, as associações verbais da língua natural para descrever o objeto matemático: “vetor com dez unidades de comprimento, paralelo ao eixo das abscissas e com sentido positivo”.
- Registros figurais, que são de natureza multifuncional (ou plurifuncional) e com representação não discursiva. Como exemplo, temos o vetor representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, na figura 6, abaixo:

Figura 6: Segmento orientado $\overrightarrow{AB}$.
Fonte: Acervo pessoal.

- Registros simbólicos, que são de natureza monofuncional e com representação discursiva; temos como exemplo a representação algébrica vetorial de um vetor no plano: $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v_x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{v_y}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$
- Registros gráficos, que são de natureza monofuncional e com representação não discursiva, como o vetor $\vec{v}$ no plano cartesiano, figura 7, abaixo.

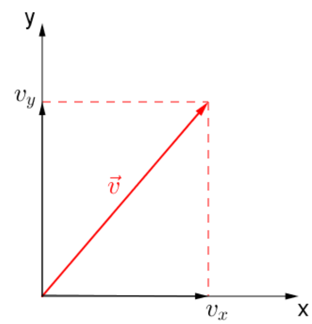


Figura 7: Vetor no plano cartesiano. Representação gráfica.
Fonte: Acervo pessoal.

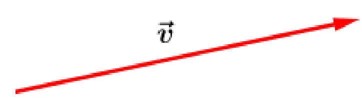
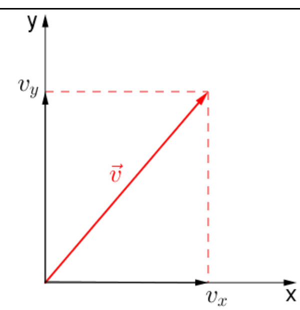
Como já observado anteriormente, os objetos matemáticos são estritamente abstratos e passíveis de várias formas de representação. O sucesso ou eventuais dificuldades do aluno na apreensão de um objeto matemático, no processo de ensino e de aprendizagem, leva em consideração que:

> A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação [...] A dificuldade se deve ao fato de que o objeto representado não pode ser identificado com o conteúdo da representação que o torna acessível. (DUVAL, 2011a, p.21)

A coordenação e articulação entre os vários registros existentes e o reconhecimento do objeto matemático por meio de suas representações possíveis, contribui para minimizar as dificuldades acima apontadas. Por exemplo, o estudante que pensa que um segmento de reta orientado é o próprio objeto matemático vetor, ao invés de sua representação, pode levá-lo a não reconhecer o mesmo objeto representado de outra maneira, comprometendo seu aprendizado. Portanto, a diferenciação entre o objeto e o respectivo registro de representação semiótica deve ser bastante clara.

Uma vez que esteja clara a diferença entre o objeto e sua representação, o próximo passo envolve a capacidade da passagem de um registro de representação para outro, que para Duval (2011a) não se trata apenas de mudar o modo de tratamento, mas pressupõe o conhecimento das propriedades e da estrutura do objeto em questão. Ora, ignorar as propriedades associadas à representação de um objeto, pode significar a incapacidade do aluno para mudar de um registro para outro.

Antes de passarmos para as operações semióticas de transformação, apresentaremos o quadro 02 com os tipos de registros e representações semióticas para os vetores que consideraremos em nosso trabalho. Detalhes sobre tais representações podem ser encontrados no capítulo 1, no subitem 1.3. Na coluna mais à direita explicitamos a denominação que será utilizada ao longo do texto.

Tipo de registro	**Registro**	**Representação**	**Denominação da representação**
Língua natural	*Registro em língua portuguesa*	*Vetor com comprimento de dez unidades, paralelo ao eixo das abscissas e com sentido positivo.*	*Representação em língua natural*
Figural	*Registro em forma de desenho*		*Representação geométrica*
Gráfico	*Registro cartesiano*		*Representação gráfica*
Simbólico	*Registro algébrico vetorial*	$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ *no plano R^2* $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ *no espaço R^3*	*Representação algébrica vetorial*

Simbólico	*Registro algébrico em coordenadas*	$\vec{v} = (x, y)$ *coordenadas do plano* $\vec{v} = (x, y, z)$ *coordenadas do espaço*	*Representação algébrica em coordenadas*
Simbólico	*Registro algébrico trigonométrico*	$\vec{v} = (v.cos\theta\ , v.sen\theta)$ *sendo* $v_x = v.cos\theta$ *e* $v_y = v.sen\theta$	*Representação algébrica trigonométrica*
Simbólico	*Registro algébrico módulo-ângulo*	$\vec{v} = (v, \theta)$ *em coordenadas polares no plano* $\vec{v} = (v, \theta, \varphi)$ *em coordenadas esféricas no espaço*	*Representação algébrica módulo-ângulo*

Quadro 2: Classificação das representações semióticas utilizadas nesta pesquisa.
Fonte: Acervo pessoal.

Uma vez especificadas as representações abordadas neste trabalho, passamos, a partir daqui, a usar suas denominações e assim tratar das operações semióticas de transformações.

Na atividade matemática, Duval considera dois tipos de transformações que são realizadas para as representações semióticas: o Tratamento e a Conversão. Se considerarmos o objeto matemático vetor, para que o aluno possa apreender o conceito deste objeto, é necessário que ele saiba, no mínimo, fazer a conversão entre duas representações semióticas existentes: por exemplo, passar da representação algébrica vetorial para a sua representação gráfica e vice-versa (veja figura 8).

Para Duval (2011a), a conversão das representações semióticas é basicamente a transformação de uma forma de representação semiótica para outra forma distinta, ou seja, mudando de sistema de registro de representação para outro distinto, porém, preservando a referência ao mesmo objeto matemático em questão. Ressalta-se o fato importante de que os sentidos da conversão não são transformações equivalentes, ou seja, a conversão de uma representação em registro figural, por exemplo, para uma representação em registro algébrico pode não ter o mesmo grau de dificuldade que o caminho inverso, o que é explicado pelo fenômeno da heterogeneidade dos dois sentidos de conversão.

Para a análise das operações de conversão, além da heterogeneidade, é necessário levar em consideração também, o fenômeno de congruência e de não congruência, bastando comparar a representação no registro de partida com a representação no registro de chegada. Segundo Duval (2011a, 2011b) a congruência considera as unidades de significado (ou seja, os elementos constituintes das referidas representações semióticas) e ocorre quando a representação final transparece na representação de partida e leva em conta três fatores:

1. Correspondência semântica das unidades de significado:
   Correspondência, um a um, entre os elementos da representação de partida e os elementos da representação de chegada.
2. Unicidade semântica final:
   Cada unidade de significado no registro de partida corresponde a uma única unidade de significado no registro de chegada.
3. Conservação da ordem das unidades:
   Relaciona-se com a ordem dos elementos com os quais são construídas as representações de partida e de chegada.

Se a conversão não atende a um dos três fatores acima, então dizemos que a conversão é não congruente. Ainda considerando a figura 8, temos um exemplo de conversão congruente na qual há passagem da representação algébrica vetorial para a representação gráfica de um vetor.

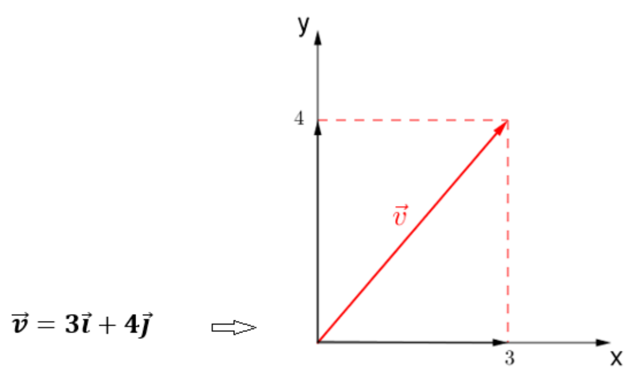


Figura 8: Conversão congruente do registro simbólico para o gráfico.
Fonte: Acervo pessoal.

No exemplo da figura anterior, os três fatores que determinam uma conversão congruente foram atendidos:

1. Há correspondência semântica dos elementos da representação de partida com os elementos da representação de chegada, ou seja, os valores das componentes da representação simbólica são exatamente os mesmos valores especificados nos eixos do gráfico cartesiano.
2. A unicidade semântica também é estabelecida, pois, cada componente da representação simbólica tem um único correspondente na representação gráfica.
3. A conservação da ordem das unidades também foi mantida, pois a ordem das componentes da representação simbólica é exatamente a mesma que as coordenadas do gráfico cartesiano.

Já na figura 9 temos três registros de representações diferentes para o vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ cujo módulo ou norma é **10** e o ângulo formado com o semieixo positivo $\boldsymbol{O_x}$ é $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{30}°$. Podemos considerar duas conversões não congruentes, uma quando partimos da representação geométrica (1) e chegamos à representação algébrica vetorial (3) e, outra, quando partimos da representação algébrica módulo-ângulo (2) e chegamos à representação algébrica vetorial (3).

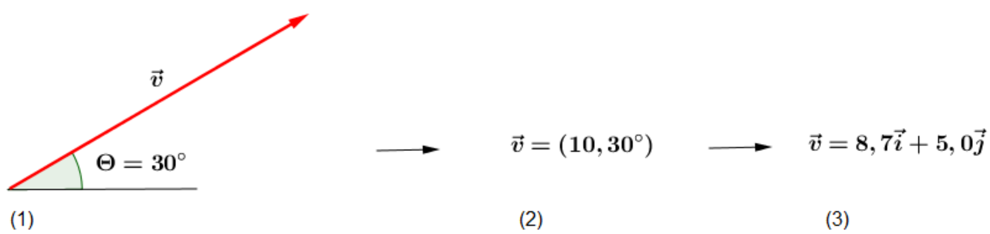


Figura 9: Conversões não congruentes.
Fonte: Acervo pessoal

No exemplo da figura 9 nenhum dos três fatores são atendidos para as conversões indicadas, ou seja, não há correspondência semântica nem unicidade semântica e a ordem das unidades não são mantidas.

Em outro exemplo, figura 10, temos na parte (1) a representação geométrica de um vetor e, na parte (2) a representação gráfica do mesmo vetor e, por fim, na parte (3) a representação algébrica vetorial. Quando se troca de um tipo de registro de representação para outro, como, por exemplo de (1) para (2), de (2) para (3) ou vice-versa, temos aí transformações de conversão classificadas como congruentes, pelos critérios já explanados anteriormente.

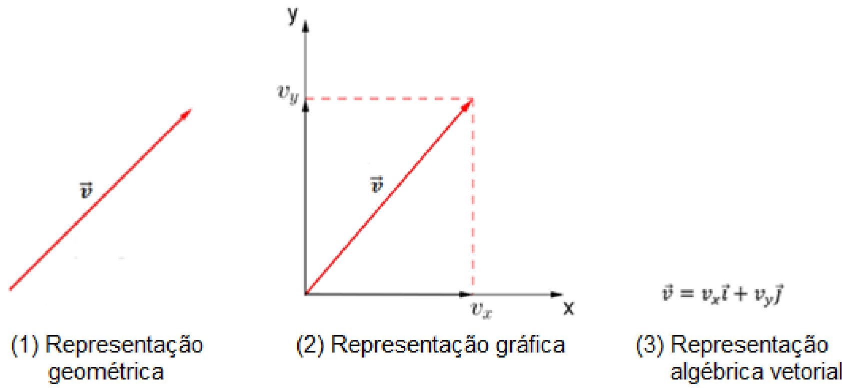


Figura 10: Três representações distintas de um mesmo vetor no plano. Fenômeno de congruência.
Fonte: Acervo pessoal.

Nesse caso, temos três sistemas semióticos distintos, figural, gráfico e simbólico, no entanto, são conservadas as referências ao mesmo objeto, que neste caso é um vetor, mesmo ocorrendo as transformações de conversão.

Quando se realiza uma conversão não estamos fazendo simplesmente a mudança de uma forma de representação para outra, esta transformação implica muito mais do que isso. É necessário se observar os aspectos distintos trazidos em cada representação e explicar as propriedades matemáticas referentes ao objeto representado. Isso pode ter um papel fundamental na construção do conhecimento matemático. Na figura 11, temos outro exemplo de conversão entre representações de vetores e mostra outras propriedades matemáticas envolvidas, no caso, trigonométricas. A parte (1) mostra o vetor em sua representação gráfica e na parte (2) o mesmo objeto em sua representação algébrica trigonométrica, a passagem de (1) para (2) caracteriza uma conversão não congruente.

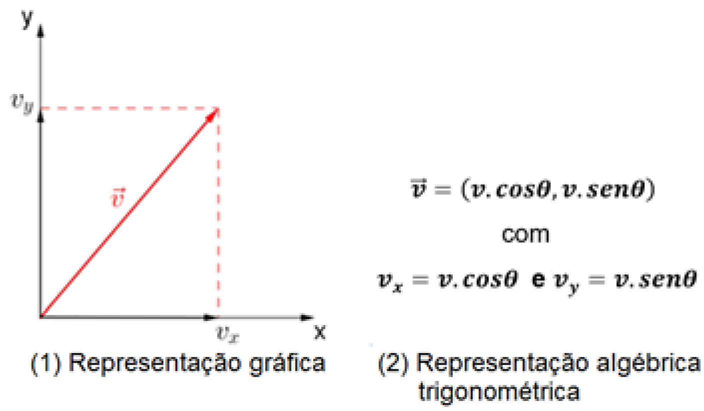


Figura 11: Fenômeno de não-congruência.
Fonte: Acervo pessoal.

Segundo Duval (2011a) não devemos nos deixar iludir pela ideia de que os registros de representações de um determinado objeto matemático tenham em si as mesmas informações contidas em cada uma das representações disponíveis, conforme podemos comprovar no exemplo anterior. As variadas representações dos objetos não possuem o mesmo conteúdo, alguns registros podem privilegiar alguns aspectos, que em outros registros estão ocultos e, por isso a razão da articulação entre esses registros ser condição para a apreensão de um conceito. No exemplo da figura 11, a representação gráfica traz informações sobre as componentes cartesianas $\boldsymbol{v_x}$ e $\boldsymbol{v_y}$ que podem representar o vetor de origem $\vec{\boldsymbol{v}}$ na forma ($\boldsymbol{v_x}, \boldsymbol{v_y}$) ou $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{y}}$, com $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v_x}\vec{\boldsymbol{\imath}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{v_y}\vec{\boldsymbol{\imath}}$ com o mesmo efeito, enquanto que na representação algébrica trigonométrica temos conteúdo de trigonometria básica. Neste sentido, os experimentos físicos poderiam auxiliar na compreensão do objeto vetor e ajudar a estruturar esse conceito e separar o objeto de sua representação.

Outra forma de transformação é o Tratamento, que ocorre quando as transformações de representações do objeto acontecem dentro do mesmo sistema semiótico, em outras palavras, o Tratamento é uma transformação de uma representação para outra, interna ao mesmo sistema semiótico, ou seja, no mesmo registro. Exemplificando, consideremos exclusivamente o processo de adição geométrica de dois vetores $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$, como vemos na figura 12, parte (1) e, utilizando-se a regra do paralelogramo, executamos a adição, como vemos na figura 12, parte

(2), mantendo-se a operação dentro do mesmo tipo de sistema semiótico (registro figural), conforme podemos verificar na figura 12.

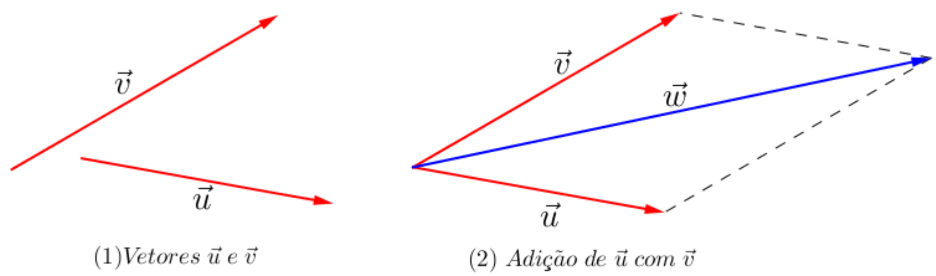


Figura 12: Tratamento: a adição de $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$ no registro figural.
Fonte: Acervo pessoal.

A figura 13 mostra outro exemplo de tratamento. Neste caso temos uma soma geométrica de três vetores e, para esta finalidade utilizamos a regra geral da adição geométrica para obter $\vec{\boldsymbol{s}}=\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{w}}$, permanecendo no mesmo registro figural. Na parte (1) são apresentados três vetores quaisquer $\vec{\boldsymbol{u}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}$ e $\vec{\boldsymbol{w}}$ e, na parte (2) temos efetivamente o resultado da soma dos vetores $\vec{\boldsymbol{u}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}$ e $\vec{\boldsymbol{w}}$ pelo processo geométrico.

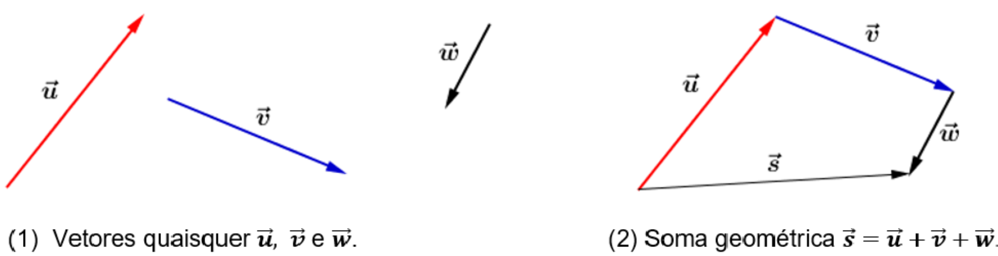


Figura 13: Soma geométrica de três vetores.
Fonte: Acervo pessoal.

Reforçando a ideia de tratamento, vamos agora sair do registro figural, e considerar os vetores $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ representados no registro simbólico, a partir do qual vamos realizar uma transformação de tratamento. A adição desses vetores dentro do mesmo sistema semiótico é o que vemos logo abaixo, no qual $\vec{\boldsymbol{w}}$ é a representação algébrica da soma $\vec{\boldsymbol{w}}=\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}$, sendo $\vec{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{6}\vec{\boldsymbol{\imath}}-\boldsymbol{2}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{8}\vec{\boldsymbol{\imath}}+\boldsymbol{5}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$, teremos:

$$\vec{u} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$$
$$\vec{v} = 8\vec{i} + 5\vec{j}$$
$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{w} = 14\vec{i} + 3\vec{j}$$

Nesses três últimos exemplos, vimos que as transformações das representações ocorreram dentro de um mesmo sistema semiótico, ora no registro figural, ora no registro simbólico. Permanecer no mesmo sistema semiótico, usando os símbolos característicos da linguagem deste sistema, portanto, é o que caracteriza o tratamento.

Com a fundamental importância que essas ideias trazem, as transformações de tratamento e de conversão são transformações que o discente deve desenvolver para que a compreensão e a construção do conhecimento matemático sejam realmente efetivas. Nesse panorama, é primordial que o professor trabalhe e desenvolva essas habilidades com os estudantes e, por outro lado, que os livros didáticos tragam em seus conteúdos, material que auxilie na compreensão do objeto matemático e suas diversas formas de registros e que mostre os tratamentos e as conversões para as representações existentes.

A multiplicidade de representações em matemática pode trazer dificuldades para os alunos no reconhecimento do mesmo objeto em suas diversas representações. Esse reconhecimento e as transformações de conversão não acontecem de forma espontânea e transparente. Duval (2011a) formula o problema com a seguinte questão:

"*Como um aluno pode aprender a reconhecer um objeto matemático por meio de múltiplas representações que podem ser feitas em diferentes registros de representação? "*

Para o autor, saber reconhecer o objeto em suas representações é condição fundamental para que o aluno tenha subsídios próprios para mobilizar ou modificar as informações para a resolução de problemas. Isso significa que o conceito do aluno sobre um determinado objeto não está mais amarrado a uma representação específica daquele objeto, ele passa a entender separadamente o objeto de sua representação.

A aprendizagem matemática é um processo bastante complexo, que conjuga as dificuldades próprias em articular um emaranhado de elementos matemáticos com o funcionamento cognitivo do pensamento humano. Com isso Duval (2011a, p.24) faz uma questão:

"*Qual o método para pesquisar processos de aprendizagem? "*

Os métodos a serem utilizados em pesquisa dependem da natureza dos fenômenos a ser estudada. Segundo Duval, é preciso analisar e distinguir com muita atenção aquilo que sobressalta em um tratamento de um registro e aquilo que sobressalta em uma conversão, durante as produções realizadas pelos estudantes, lembrando que são dois domínios cognitivos radicalmente diferentes. Ainda segundo o autor, as dificuldades variam conforme a natureza dos registros apresentada. As maiores dificuldades no tratamento estão relacionadas com os registros multifuncionais, e para a conversão, ela fica mais intrincada com a necessidade de passar de um registro monofuncional para outro registro multifuncional. A partir daí, toma-se a conversão como um instrumento de análise que possibilita evidenciar as variáveis cognitivas que estão envolvidas em cada registro particularmente.

O autor (ibidem, 2011a, 2011b) reforça a importância da conversão não só como um instrumento de pesquisa, mas também como uma forte ferramenta para os processos de ensino e de aprendizagem e, que deve ser observada com cuidado e estimulada como prática necessária para a apreensão de conceitos e o próprio desenvolvimento do pensamento matemático.

Os registros de representação, com seus elementos cognitivos de produção, tratamento e conversão se mostram essenciais no processo de ensino e de aprendizagem. Identificaremos nos livros didáticos da Engenharia, a ênfase ou não dos autores com relação à produção dos registros de representação, no tocante às suas notações e símbolos apropriados e quais as operações de transformação existentes, tratamento e conversão, e verificar se há privilégio de uma em detrimento da outra.

Capítulo 3 - Revisão de Literatura

Para esta pesquisa, procuramos dissertações, teses e artigos no âmbito da Educação Matemática que fossem relacionados, de uma forma ou de outra, ao objeto matemático vetor e que tivessem uma proximidade com assunto que estamos estudando, ou seja, que tratem da abordagem do conceito de vetor e suas representações semióticas e outros aspectos utilizados nos livros didáticos voltados para os cursos de Engenharia.

Selecionamos, para a revisão de literatura, três dissertações e três artigos relacionados a vetores e trigonometria e, apresentamos, inicialmente, uma breve descrição de cada trabalho escolhido antes de nos aprofundarmos no detalhamento dos elementos de cada um deles que interessam à nossa pesquisa.

Para o foco principal, que são os vetores e seus registros de representações, identificamos quatro pesquisas alinhadas diretamente com nosso tema. Castro (2001), em sua dissertação, trata da noção de vetor no ensino e aprendizagem de Geometria Analítica, a partir da concepção, realização e análise de uma sequência didática que tem por objetivo explorar a articulação entre os registros de representação de vetores.

A pesquisa de Patrício (2011) tratou das dificuldades dos alunos de Licenciatura em Matemática, com relação à produção, ao tratamento e à conversão das representações semióticas de vetores. Watson, Spirou e Tall (2003) tratam da importância, dentro da aprendizagem de vetores, da convergência dos fenômenos físicos e do simbolismo matemático para a conceituação deste objeto com foco na ideia de que o efeito físico sentido é uma forma mais significativa de conceituar vetor para o aluno. Poynter e Tall (2005) tratam dos diferentes pontos de vista, da Física e da Matemática, para estabelecer uma boa forma de conceituar vetor para os estudantes.

Daremos também uma especial atenção à representação algébrica trigonométrica para os vetores por ser esta representação amplamente explorada nas disciplinas das Engenharias, como constatamos nos textos especializados. Este fato justifica a ampliação de nossa revisão de literatura levando em conta o ensino de Trigonometria do Ensino Médio, pois tais conhecimentos, adquiridos até este nível de escolaridade, serão importantíssimos para os alunos que optarem por um dos cursos de Engenharia, uma vez que este conteúdo será muito solicitado no desenvolvimento das várias disciplinas técnicas, como já foi mencionado.

Para a representação algébrica trigonométrica de vetor, identificamos e analisamos duas pesquisas que estudaram especificamente a importância da Trigonometria para a Matemática e as Ciências em geral. A primeira, o artigo de Lima, Sauer e Sartor (2011), tratou da importância da interação das ciências da Engenharia junto aos professores e alunos do Ensino Médio (EM) como um todo, por meio da realização de oficinas de Matemática, entre as quais uma envolvendo Trigonometria. Na segunda, a dissertação de Nascimento (2005), a autora propõe a construção de uma tabela trigonométrica, baseada em trabalhos de matemáticos da Grécia Antiga, e também a reconstrução de aparelhos utilizados na Antiguidade, tais como o astrolábio e o teodolito, com a pretensão de que o conhecimento pudesse ser construído e não meramente transmitido, valendo-se de aspectos experimentais e históricos para a apreensão dos conceitos das razões trigonométricas.

No artigo de Poynter, A. e Tall, D. (2005), intitulado *“What do mathematics and physics teachers think that students will find difficult? A challenge to accepted practices of teaching”* os autores consideram que o conceito de vetor foi desenvolvido distintamente pela Física, que os apresenta como representantes de força e aceleração e estão diretamente ligados ao movimento; enquanto que a Matemática o relaciona, por exemplo, com a ideia de translação. Estudam problemas cognitivos advindos destas diferentes abordagens e testam um conceito mais próximo ao de vetor livre, que está relacionado ao efeito da ação física de translação.

Observam que na Física, quando as forças estudadas estão atuando no plano, ou seja, num espaço bidimensional, o estudante pode trabalhar com suas componentes e obter as quantidades vertical e horizontal de tais forças, conservando as suas características unidimensionais cujo entendimento se torna mais simples. Neste caso, o estudante trabalha com o paralelogramo de forças.

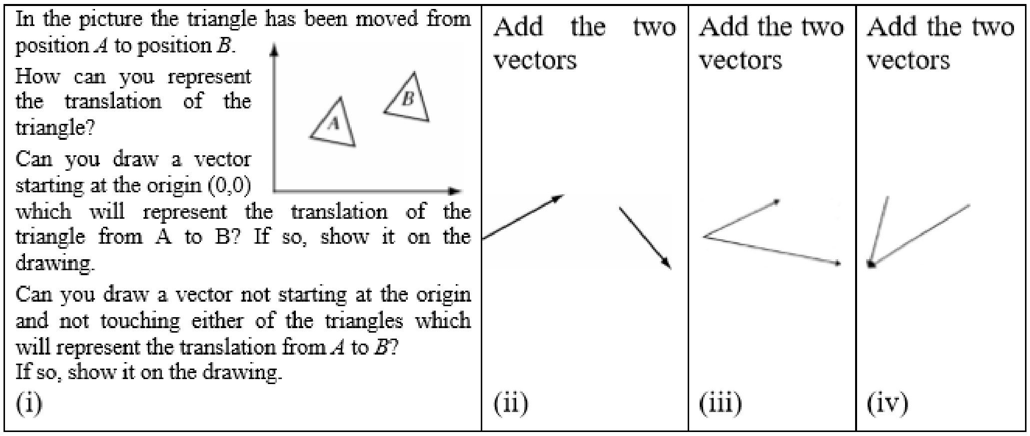
A abordagem matemática introdutória na Geometria Analítica, passa, por exemplo, pelo vetor representado por uma matriz coluna do tipo $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$, na qual $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ representam as quantidades associadas às projeções nos eixos cartesianos, trata-se de uma representação semiótica em registro simbólico. Temos também a representação semiótica em registro figural, constituída por segmentos orientados, denotados por uma seta, que pode ser associada à translação do ponto $\boldsymbol{A}$ para o ponto $\boldsymbol{B}$. Todos os representantes com mesma direção, sentido e magnitude são equivalentes e sua classe de equipolência é um único vetor, definido e denotado como um vetor $\vec{\boldsymbol{u}}$**.**

Poynter (2002, apud Poynter e Tall, 2005) descobriu que muitos de seus alunos que sabiam operar com as componentes vetoriais, ainda assim, apresentaram dificuldades em problemas que envolviam forças em Física e, também, em operações com vetores, propriamente ditas, em Matemática.

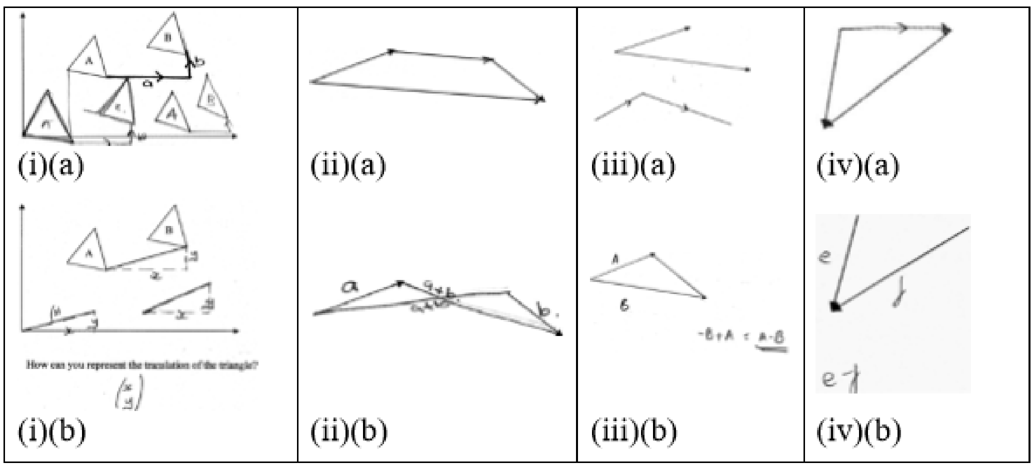
Poynter e Tall (2005) entrevistaram dois professores de Física e dois professores de matemática de uma faculdade que obteve um bom desempenho escolar. Os professores foram questionados sobre quais dificuldades os alunos eventualmente poderiam enfrentar, diante de alguns problemas envolvendo o conceito de vetor. Os professores deveriam avaliar as possíveis dificuldades dos alunos, para cada problema proposto.

O quadro 3 a seguir, mostra algumas atividades realizadas pelos alunos. Os professores não tiveram acesso às soluções dos alunos e teceram seus comentários a respeito das dificuldades que os alunos possam ter encontrado.

Os professores de Matemática e os professores de Física fizeram análises distintas uns dos outros, porém, acertaram em muitas de suas observações, como em alguns casos que poderemos ver a seguir, a partir de algumas das respostas dadas pelos alunos, impressas no quadro 4.



Quadro 3: Vetor como translação e três exemplos de adição de vetores.
Fonte: POYNTER e TALL (2005).



Quadro 4: Exemplos de equívocos de estudantes.
Fonte: POYNTER e TALL (2005).

Como previsto pelos professores em seus comentários, as respostas da questão (i), por exemplo, mostram que os alunos ignoram o uso da seta, representando a translação de ***A*** para ***B*** apenas com o uso de segmentos de reta, sem seta para indicar o sentido, como visto na resposta (i)(b) e, também, que os alunos não têm conhecimento suficiente para representar um vetor com origem a partir de qualquer ponto, como visto na resposta (i)(a). Algumas respostas deixam transparecer as falhas conceituais sobre vetor, demonstrando que os alunos não dominam o conceito de classe de equipolência de segmentos orientados e confundem os elementos geométricos com vetores.

O conjunto de respostas oriundas das atividades dos alunos, e os erros apresentados e curiosamente previstos pelos professores, permite-nos fazer uma série de análises. No entanto, de modo geral percebe-se que os alunos não dominam o conceito de vetor como uma flecha, nem tão pouco que ele representa uma classe infinita de segmentos orientados de mesma direção, sentido e comprimento.

Os alunos parecem não saber diferenciar um vetor de outro e tem a ideia de que são fixos no plano, ocupando um lugar específico, o que na concepção deles seria suficiente para diferenciar um vetor de outro. Tais equívocos se refletem na inabilidade em utilizar as leis do paralelogramo ou do triângulo.

A partir das entrevistas com professores, e de suas considerações, Poynter e Tall (2005) puderam perceber que os professores de Física e Matemática estão cientes das dificuldades com as quais os alunos se deparam. Acreditam que uma boa estratégia para enfrentar o problema conceitual seria a introdução do conceito de vetor para os estudantes por meio de uma abordagem de “vetor livre” e, a partir daí, expandir para os diversos contextos da soma vetorial, de tal forma que a lei do paralelogramo, a lei do triângulo e a adição de componentes vetoriais, sejam todas vistas como diferentes aspectos relacionados ao mesmo objeto matemático.

O conceito de “vetor livre” para os matemáticos, trata da classe de equipolência de segmentos orientados, representada por um vetor dessa classe, enquanto que os físicos têm o conceito de vetor fortemente ligado ao paralelogramo de forças, representados pelo vetor flecha. Por este fato, observamos nos livros de Matemática, diferentemente do que ocorre nos livros de Física e de outras disciplinas da engenharia, a definição e conceituação deste objeto com um caráter puramente matemático, não privilegiando, muitas vezes, suas aplicações práticas nas várias áreas da engenharia e ciências em geral.

Tais abordagens de vetores sob óticas diferentes, podem levar o estudante a não relacionar o “vetor da Matemática” com o “vetor da Física”, o que por si só, torna-se um potencial obstáculo ao aprendizado. Acreditamos que as representações utilizadas nos livros didáticos, devam ser de tal sorte que permitam ao estudante a conexão entre as formas distintas de abordagens e o acesso ao conceito do objeto matemático, independentemente de sua representação.

Segundo o ponto de vista de Poynter e Tall (2005), uma forma de apresentar o conceito flexível de ”vetor livre” passa pelo mundo real, e uma maneira eficiente de fazer isso é levar em consideração a noção física associada à ideia de translação e ao efeito que ela produz. Este conceito, que está apoiado em ideias do mundo real e expõe o estudante às experiências físicas, ajuda-o a distinguir o objeto matemático de suas possíveis representações. O efeito produzido por uma ação física não é um conceito puramente abstrato e está mais próximo do mundo real do estudante. Portanto, poderia ser percebido e sentido de forma corporificada e, por fim, depois dessa noção, partir para o entendimento de sua representação simbólica, como verificamos nas palavras dos próprios autores, abaixo:

> O efeito de uma ação física não é um conceito abstrato. Ele pode ser visto e sentido no modo corporificado. A ideia é que, se os alunos tiveram tal senso corporificado do efeito de uma translação, então eles poderiam começar a pensar em representá-la em termos de uma flecha com dada magnitude e direção.[4] POYNTER e TALL (2005, p.133, tradução nossa)

Um instrumento que poderia ser muito útil numa experiência física para os alunos, seria a mesa de forças. Trata-se de um dispositivo que permite a verificação experimental da adição de vetores força. A mesa de forças é composta basicamente de um disco com graduação em graus e, por meio de roldanas móveis, conseguimos distribuir as forças nas direções desejadas. As forças são obtidas com o uso de massas cujo peso define as intensidades que se necessitam e, são penduradas por fios que passam pelas roldanas móveis, como podemos observar na figura 14.

[4] *The effect of a physical action is not an abstract concept. It can be seen and felt in an embodied sense. The idea is that, if students had such an embodied sense of the effect of a translation, then they could begin to think of representing it in terms of an arrow with given magnitude and direction.* POYNTER e TALL (2005, p.133)

Figura 14: Mesa de força com dinamômetro.
Fonte: http://azeheb.com.br/Produtos/mesa-de-forca/

Algumas mesas possuem, também, outros acessórios, como um dinamômetro que mede a intensidade das forças peso. Com este dispositivo, o conceito de soma vetorial pode ser sentido pelo aluno, que trabalha com algo palpável, com os efeitos que uma experiência física pode proporcionar. Pode, ainda, explorar os conceitos da decomposição de vetores em suas componentes horizontal e vertical.

Essas ideias relacionadas às experiências físicas para a abordagem do conceito de vetor podem ser muito valiosas para a construção do conceito desse objeto matemático. A diversidade de registros de representação existentes para vetor é bastante ampla e pode afetar a maneira como os alunos constroem o conhecimento acerca desse conceito, criando algumas dificuldades cognitivas.

Poynter e Tall (2005) traçam estratégias de abordagem ao conceito de vetor no intuito de facilitar o processo de ensino e de aprendizagem, levando em consideração os efeitos das experiências físicas que lançam luz sobre uma nova maneira de compreender este objeto. A maneira como o conceito de vetor é construída, a partir de ideias físicas, facilita o acesso ao objeto matemático, o que consequentemente fortalece a ponte entre a representação semiótica e o conceito de vetor. Essa abordagem reforça ainda a diferença entre o objeto matemático e sua representação. Tais ideias contribuem para a coordenação entre os diversos tipos de registros de representação existentes para um mesmo objeto, o vetor, pois a apreensão conceitual neste caso fica mais evidente. Portanto, devem ser contemplados, com grande atenção, nos livros didáticos.

Então, de acordo com o exposto, os aspectos levantados por Poynter e Tall (2005) são relevantes no estudo do conceito de vetor e de seus registros de representação.

No artigo intitulado *“The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: the concept of Vector”*, Watson, Spirou e Tall (2003) fazem uma importante observação sobre a aprendizagem de vetores, considerando que esta deve ocorrer numa região entre a teoria da corporificação, relativa aos fenômenos físicos e as ações de conceituação do objeto por meio do simbolismo matemático específico. Os autores centram-se na ideia da ação do efeito físico do vetor, como uma maneira mais significativa de apresentar o conceito desse objeto ao estudante. Isso pode contribuir para a apreensão conceitual de vetor.

Watson, Spirou e Tall (2003) consideraram em seu trabalho os três mundos da Matemática, respectivamente os mundos corporificado, o simbólico e o formal, cada qual com sua maneira peculiar de tratar um objeto matemático. De modo simplificado, o mundo corporificado está associado aos nossos sentidos e com a nossa percepção das ações e dos efeitos oriundos das experiências físicas. O mundo simbólico está ligado, por exemplo, aos registros característicos da Álgebra e da Aritmética e, por fim, o mundo formal, regido pelas estruturas axiomáticas e pelas demonstrações formais.

Sob esse referencial teórico, os autores exploram os aspectos conceituais de vetor, de acordo com as características pertinentes a cada um dos três mundos da Matemática. Da Física, o conceito de força e os efeitos que ela pode causar no mundo real e, ainda, a ideia mais forte envolvida nesse contexto, que é a possibilidade de que esses efeitos possam ser sentidos ou corporificados, e principalmente emprestados para construir o conceito do objeto matemático vetor. Consideram que essa característica torna o mundo corporificado, com seus aspectos físicos, bastante importantes para o processo de aprendizagem desse conceito por parte do aluno.

A ideia de translação, como inicialmente pontuaram Watson, Spirou e Tall (2003), pode ser apreendida da adição geométrica de vetores, na qual o vetor soma será resultado de um processo que consiste em ordenar os vetores, coincidindo a origem do sucessor com a extremidade do anterior e, no caso particular da soma de dois vetores, pode-se chegar à resultante por meio da lei do triângulo, que até certo ponto, pode ser tratada como uma particularidade da lei do paralelogramo. Em seguida, o vetor poderá ser representado simbolicamente numa linguagem algébrica específica, na qual a resultante é obtida por meio da soma de suas componentes e, neste caso estamos falando dos aspectos do mundo simbólico. Quanto ao mundo formal, um vetor, por exemplo, pode ser definido em termos de um espaço vetorial n-dimensional, com elementos puramente abstratos, com suas operações e propriedades definidas.

Watson, Spirou e Tall (2003) ressaltam que é importante notar que os vetores são concebidos em cada um dos mundos de formas muito distintas e, que as operações e demonstrações também são bem particulares em cada um deles. O principal objetivo e, também, a grande preocupação dos autores é como aproveitar as ideias conceituais de vetores, características de cada um dos mundos, e com isso construir de maneira flexível o conceito de vetor para os estudantes. Isso deve ser conduzido de tal forma que eles possam se beneficiar com o uso, de forma eficaz, da complexidade e poder embutidos nos vários aspectos desse conceito. No entanto, ressaltam que é preciso cuidado ao expor os estudantes aos conceitos de vetor do mundo corporificado, pois as ideias de translação e de efeitos de forças que, por exemplo, são percebidas de formas diferentes, poderiam criar bloqueios para os alunos principiantes exatamente no momento em que se desejasse reunir as ideias distintas do objeto em um só conceito de vetor. Podemos verificar isso nas palavras dos autores, a seguir:

> Acreditamos que esta abordagem tem adicionais complexidades, que surgem a partir de uma gama de experiências físicas que dão significados sensoriais muito diferentes. Por exemplo, um vetor tal como uma transformação "sente diferente" a partir de um vetor, tal como uma força ou como uma velocidade. Assim, a corporificação, do conceito de vetor

> leva para uma gama de crenças conscientes ou inconscientes, que podem causar obstáculos para reagrupar os vários aspectos num núcleo central do conceito matemático.[5] WATSON, SPIROU e TALL (2003, p.2, tradução nossa)

O conceito matemático de vetor também traz uma variedade de significados, segundo os autores, como a ideia de translação de um objeto no plano, que tem aspecto de um processo dinâmico, podendo ser representado por uma flecha que corporifica, tanto a sensação de movimento dinâmico, como o conceito da própria flecha como um objeto matemático em si. Valendo-se dessa corporificação, outra forma de registro de representação semiótica, como $\vec{\boldsymbol{v}} = x\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}}$, poderia carregar o duplo sentido, tanto de processo vetorial como o do conceito de objeto matemático de acordo com os preceitos simbólicos estabelecidos. Por exemplo, a translação pode ser obtida através da soma das componentes vertical e horizontal dos vetores envolvidos, facilmente identificadas nessa última representação.

Na perspectiva teórica de Watson, Spirou e Tall (2003) pretendeu-se unir as práticas de duas comunidades, de um lado a dos físicos, que estão centrados no conceito corporificado de vetores a partir das experiências físicas e, de outro, a comunidade dos matemáticos, que tratam o conceito de vetor por meio do simbolismo e provas formais. A ideia, nessa perspectiva, é que o estudante inserido num ambiente de ensino e aprendizagem, que mescle os pontos de vista dessas duas comunidades, possa se desenvolver com uma estrutura cognitiva mais flexível em relação ao conceito de vetor e, a partir da integração das práticas dessas comunidades, possa apreender os elementos característicos do ponto de vista de cada uma delas e se beneficiar plenamente de ambos os lados.

---

[5] We believe that such an approach has additional complexities that arise from the range of physical experiences that give very different sensory meanings. For instance, a vector as a transformation 'feels different' from a vector as a force or as a velocity. Thus the embodiments of the concept of vector lead to a range of conscious and unconscious beliefs that can cause obstacles to drawing together the various aspects into a central core mathematical concept. WATSON, SPIROU e TALL (2003, p.2)

Este enfoque é importantíssimo para nosso trabalho por considerar que o mesmo objeto matemático deve ser tratado não só no contexto da Matemática, mas também pelo ponto de vista da utilização pelas outras ciências na aplicação prática do conceito de vetor. Como já averiguamos, os autores de livros didáticos das disciplinas dos cursos de engenharia adotam uma abordagem mais próxima ao olhar da Física e, portanto, mais distante dos conteúdos apresentados nos livros de Matemática, sem a preocupação com o peculiar formalismo ali encontrado. Muitas vezes, os autores também não levam em conta os aspectos relevantes para a apreensão do conceito de vetor pelos estudantes da Engenharia. O resultado disso é o isolamento de ambas as comunidades, tendo cada qual sua forma particular e distinta de tratar o mesmo objeto e, neste caso, o estudante que deveria reconhecer o vetor nas duas óticas pode entendê-lo como objetos completamente diferentes.

Os compartilhamentos dos distintos enfoques, sobre o conceito de vetor, entre as experiências oriundas da Física e da Matemática, podem, de fato, contribuir de modo muito significativo para a construção do conhecimento acerca desse objeto matemático, por parte do estudante. Para que isso aconteça, a existência de alguns elementos precisa ocorrer, segundo Watson, Spirou e Tall (2003) e de acordo com nossa realidade no Brasil:

- o currículo escolar para a Matemática deve contemplar um tópico sobre vetores, já a partir dos anos finais do Ensino Fundamental e também no Ensino Médio;
- os professores de Física e de Matemática devem estar preparados para a abordagem do conceito de vetor, tanto com o enfoque corporificado da Física, como do ponto de vista simbólico e formal da Matemática; em outras palavras, devem buscar um enfoque pluralista, que por meio da articulação entre os dois pontos de vista, promova uma ampla cognição por parte do aluno sobre esse conceito, ou seja, deve-se promover a transdisciplinaridade;
- outro elemento, e neste caso não referenciado pelos autores Watson, Spirou e Tall (2003), reporta-se aos livros didáticos de modo geral, os quais poderiam abranger os conceitos de ambas as comunidades para

esse objeto, além de referenciar os diferentes registros de representação, permitindo ao estudante apreender o conceito de forma mais flexível e também transitar com mais facilidade pelos distintos registros de vetores. Consideramos isso fundamental, uma vez que os livros didáticos podem se tornar valorosos instrumentos no auxílio ao processo de ensino e de aprendizagem de vetores, tanto para professores como para estudantes.

O artigo de Watson, Spirou e Tall (2003), a partir de evidência experimental, abordou alguns aspectos importantes no que diz respeito às concepções de vetor e às leis do triângulo e do paralelogramo. Também nos traz um estudo comparativo entre a tradicional abordagem de vetor como um ente matemático que representa uma grandeza com intensidade, direção e sentido e a forma corporificada de vetores de translação de figuras no plano.

Segundo as evidências empíricas levantadas pelos autores (ibidem, p.3) há diferenças conceituais, demonstradas pelos estudantes, quando se tomam os vetores, de um lado, a partir da ideia corporificada de força e, por outro lado, a ideia corporificada relativa a translação.

No exemplo da figura 15, destacado por Watson, Spirou e Tall (2003), é possível a discussão do conceito de vetor como força e das respectivas passagens do mundo real para o científico e por fim, para o modelo matemático, o que pode ser útil ao aprendizado do conceito vetorial, com os cuidados já mencionados para esse tipo de abordagem.

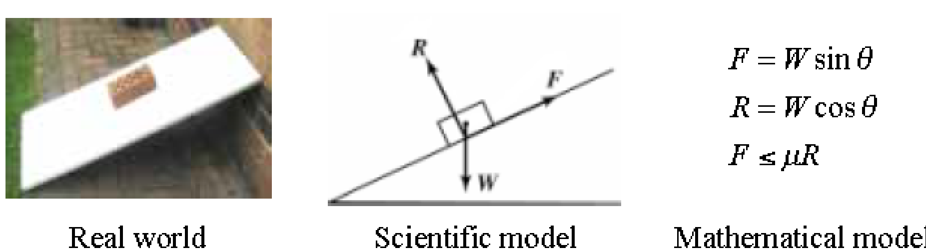


Figura 15: Da situação do mundo real para o modelo matemático.
Fonte: WATSON, SPIROU e TALL (2003)

Essa linha de pensamento reforça a importância de se apreciar os dois tratamentos dados nos livros didáticos: por um lado o conceito de vetor no âmbito da Matemática e de outro, as representações utilizadas pelas Engenharias e, os livros fazendo a ligação entre ambos.

Segundo os autores, certos efeitos físicos, como as sensações provocadas por puxões sobre o próprio corpo do estudante, podem levá-lo a uma compreensão da combinação dessas forças e a um aspecto intuitivo para o uso da lei do paralelogramo, para a adição dessas forças. Ao operar com os vetores, o efeito da translação de um objeto leva mais naturalmente ao uso da lei do triângulo. Embora a lei do triângulo possa ser considerada como uma particularidade da lei do paralelogramo, essa sutil diferença pode levar o estudante a um problema de cognição com relação à operação com os vetores, pois para ele essa aparente semelhança entre as leis não se apresenta tão simples e clara quanto pensamos e, pode assumir como coisas bem distintas.

Segundo Watson, Spirou e Tall (2003) essa sutileza de conceito leva a equívocos no momento de resolver problemas, como pode ser visto em duas situações, propostas pelos autores, a seguir.

Na figura 16, a partir de uma situação de equilíbrio entre forças, os estudantes precisam encontrar o valor de duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, conforme mostra o sistema de forças. Para isso, eles obtêm as componentes verticais e horizontais e resolvem o problema. Na figura 17, o aluno deve descrever quais são as forças que atuam sobre o objeto no plano inclinado. Em ambas as situações os alunos não tiveram muito sucesso.

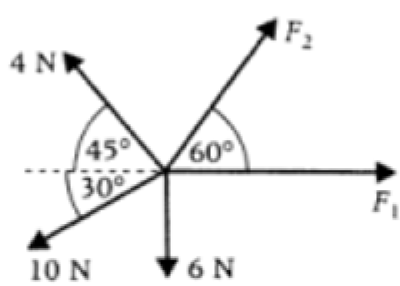


Figura 16: Encontrar $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.
Fonte: WATSON, SPIROU e TALL (2003)

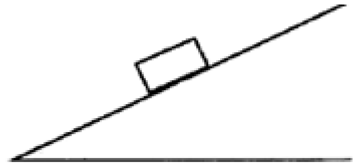


Figura 17: Descrever e marcar as forças.
Fonte: WATSON, SPIROU e TALL (2003).

Uma solução apresentada para o problema da figura 17, é mostrada na figura 18, abaixo:

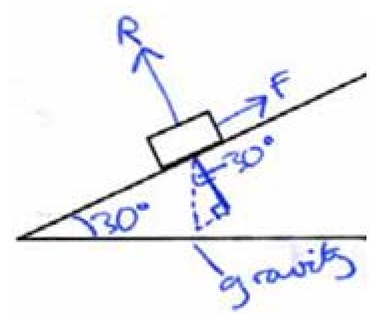


Figura 18: Forças marcadas pelo estudante.
Fonte: WATSON, SPIROU e TALL (2003).

Pode-se observar nas atividades realizadas com esses alunos, a possibilidade de confusão entre os conceitos originados a partir das duas sensações físicas de força e translação e, portanto, legitimam a preocupação dos autores com as sutis diferenças entre esses dois conceitos, uma vez que força pode ou não produzir uma translação. Cabe, também, uma observação sobre o fato de que o estudante não está lidando, nestes casos, somente com o conceito de vetor, mas também com conceitos próprios da Física, como os das forças especiais envolvidas no exemplo.

Dessas situações apresentadas por Watson, Spirou e Tall (2003) tiramos subsídios para nossa pesquisa, por deixarem evidentes a importância dos registros de representação, seja privilegiando os aspectos da Física, seja privilegiando os aspectos da Matemática, e destacarem o fato de que o acesso ao objeto matemático passa por esses distintos aspectos.

Outro trabalho de investigação científica com tema alinhado à nossa pesquisa é o estudo realizado por Castro (2001) sobre os vetores do plano e do espaço e os registros de representação. O estudo está no âmbito das investigações sobre o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica, com foco no conceito de vetor.

Como suporte teórico para a pesquisa, Castro valeu-se da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval (1995,1999 apud CASTRO, 2001), para a qual a essencialidade do aprendizado em matemática consiste em distinguir o objeto de sua representação e, ainda, a importância da conversão entre as representações semióticas nos possíveis registros semióticos para os objetos matemáticos.

Castro (2001), em sua pesquisa, relatou as dificuldades dos alunos de primeiro ano na aprendizagem do conceito de vetor e levantou uma hipótese inicial: partindo do pressuposto de que no ensino médio o aluno trabalha com segmento de reta caracterizado por um comprimento, talvez ele traga essa ideia para o conceito de vetor, não levando em consideração os elementos de direção e sentido, implicados nesse conceito.

De fato, a hipótese levantada pela pesquisadora, faz bastante sentido e pode ser verificada em outros trabalhos de pesquisa, que apontam para esse tipo de erro conceitual, como já verificado anteriormente no trabalho de Poynter e Tall (2005), em que alunos submetidos a situações com operação vetorial, na qual tinham que representar a translação de um objeto, o faziam sem levar em conta a seta para caracterizar a direção e o sentido do vetor translação.

A escolha desta pesquisa é justificada, pois Castro (2001) tinha por objetivo investigar as dificuldades dos alunos universitários iniciantes em relação ao conceito de vetor e à articulação dos vários registros de representação. Essa preocupação, em certo ponto, tem forte relação com nosso trabalho, que buscou nos livros didáticos, as diferentes abordagens dadas a este objeto matemático por meio de seus registros de representação.

Castro (2001, p.24) trouxe a seguinte questão de pesquisa:

> "É possível favorecer a evolução do funcionamento representacional dos alunos sobre vetor, por meio de uma sequência didática que focalize atividades de tratamentos e conversões de registros? "

A partir da análise da tese de Pavlopoulou (1994) e de um teste diagnóstico preliminar, aplicado aos alunos do ensino superior, da área de exatas, Castro (2001) pôde perceber as dificuldades dos alunos em lidar com os registros de representação semiótica e as conversões entre as representações, as quais se assemelhavam às dificuldades apontadas por Pavlopoulou, em sua tese.

Em sua pesquisa, Castro (2001) desenvolveu uma sequência didática para alunos que estavam cursando ou que já haviam cursado a disciplina de Geometria Analítica. Este requisito foi necessário para que os alunos já tivessem conhecimento sobre o tema.

O teste para análises preliminares (baseado na tese de Pavlopoulou) foi aplicado a três turmas de primeiro ano, sendo duas turmas do curso de engenharia e uma do curso de matemática, em três faculdades diferentes, num total de 70 alunos. Os estudantes resolveram sete exercícios, em dupla, usando lápis, régua e papel. O objetivo foi verificar a capacidade dos alunos em fazer a transformação de conversão entre as representações semióticas de vetores.

No teste diagnóstico, Castro (2001) observou dificuldades que foram comuns entre os alunos e que também noto em minhas salas de aula, quais sejam não souberam usar a “regra do paralelogramo”, traçado errado de linhas auxiliares para obtenção de vetores no plano e no espaço, mescla entre os registros de representações das n-uplas e das combinações lineares, problemas de visualização espacial e dificuldades na representação semiótica em registro gráfico, dificuldades de articulação entre os tipos de registro de representação de vetores, confusão entre um vetor e um número real, erro na representação da dimensão do vetor, entre outros. Alguns erros típicos, conforme figuras 19 e 20, podem ser observados nos exercícios e respostas do teste diagnóstico, proposto pela autora.

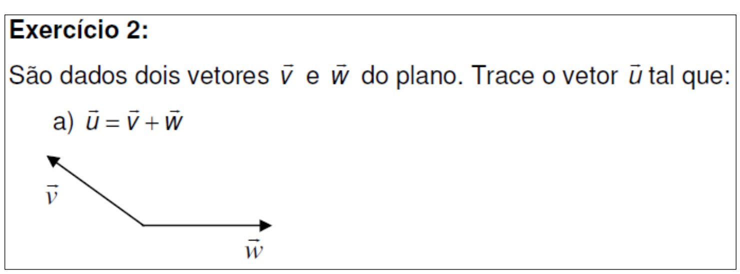


Figura 19: Adição geométrica de vetores – Regra do paralelogramo.
Fonte: Castro (2001).

Mostramos abaixo duas respostas dos alunos para o exercício 2 da figura 19:

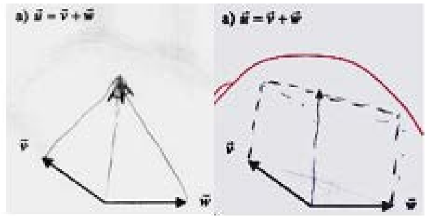


Figura 20: Respostas de duplas para o exercício 2.
Fonte: Castro (2001).

Estes exemplos demonstram as dificuldades dos alunos na aplicação da regra do paralelogramo. Eles não constroem as linhas auxiliares paralelas aos vetores dados, para desenhar o vetor soma a partir daí. Tais erros podem ser consequência de um problema maior, além dos conceitos relacionados aos vetores. Esses aspectos são relevantes, por exemplo, quando estamos falando da decomposição de um vetor em suas componentes na forma trigonométrica, que levam a uma representação semiótica importante para o vetor em disciplinas da engenharia, como já mencionado em momentos anteriores.

A partir do teste diagnóstico foi escolhida a escola que obteve o resultado menos satisfatório para a aplicação das atividades, e com isso a sequência foi concebida em duas sessões. As sessões foram realizadas em uma turma de alunos de primeiro e segundo anos do curso de engenharia, com formação de duplas para estimular a discussão sobre as estratégias de resolução.

A primeira sessão teve participação de 21 duplas que realizaram cinco atividades. Na segunda sessão participaram 17 duplas, foram realizadas seis atividades. Nas sessões foram trabalhadas as coordenadas de um ponto e de um vetor do espaço, explorando as conversões entre as representações no registro gráfico e das n-uplas, de vetores do espaço.

Na primeira sessão, Castro (2001) pôde, por meio das atividades, verificar alguns erros conceituais dos alunos, como, por exemplo, a confusão entre vetor e ponto, conforme figura 21, a seguir. Destacou que duas duplas não obtiveram êxito em nenhuma das atividades da primeira sessão.

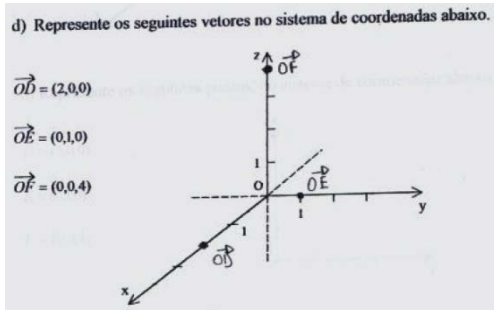


Figura 21: Resposta de três duplas.
Fonte: Castro (2001).

Observamos que esse é um aspecto notável e delicado que o professor deve reforçar quando apresentar a definição de coordenadas de ponto e vetor, e seus respectivos registros de representação semiótica, para evitar esse tipo de confusão conceitual. Acreditamos, também, que os livros didáticos da Matemática ou da Engenharia (que são fontes de estudo para professores e estudantes), que abordam esse tema, tenham a devida atenção ao apresentá-los e os cuidados necessários com os registros de representações semióticas envolvidos.

A partir das anotações de Castro (2001), pudemos perceber as dificuldades que muitos alunos têm com as construções geométricas, sobretudo nas construções espaciais, que são recorrentes, também, em minhas turmas de engenharia. Esses são conceitos fundamentais e também essenciais, não só para vetores, mas, também, para outros campos da Matemática e da Engenharia.

A representação semiótica de vetores e a conversão entre as representações envolvendo o registro gráfico, foram apontadas por Castro (2001) como as principais dificuldades encontradas pelos alunos, sobretudo quando o registro gráfico era o de chegada. Em tais aspectos, segundo a pesquisadora, pôde-se notar, ao longo da realização das sessões, evolução dos conhecimentos por parte dos alunos. Os alunos também apresentaram progresso ao reconhecerem como equivalentes, vetores apresentados no registro gráfico com origens distintas. Destaca-se que um objetivo da sequência foi atingido: rompeu-se com a concepção de que um vetor representado graficamente deva sempre ter sua origem na origem do sistema de coordenadas.

A pesquisadora pontuou que, a partir da aplicação da sequência e de sua análise, é possível interferir positivamente, por meio do ensino, na evolução do funcionamento representacional dos alunos e, que, portanto, é necessário levar em conta os diferentes tipos de registros de representações semióticas para os vetores durante o processo de ensino, em concordância com a teoria de Duval (1995,1999 apud CASTRO, 2001).

Essas observações nos mostram o quão essencial é para o aprendizado do estudante o reconhecimento das diversas representações semióticas de vetores e, principalmente, a articulação entre os diversos registros semióticos disponíveis, reforçando o papel do professor e de uma de suas ferramentas de apoio que é o livro didático, que deve contemplar tais representações e transformações.

Reforçando a essencialidade dos registros de representações semióticas de vetores e suas transformações que podem ser balizadoras para nossa investigação, apresentamos outra dissertação que nos ajudará a dar suporte à nossa pesquisa, na qual buscamos como são trabalhadas as possibilidades de representações semióticas de vetores nos livros didáticos.

Patrício (2011) investigou as dificuldades dos alunos com relação à produção, tratamento e conversão das representações semióticas de vetores, embasado na Teoria dos Registros de Representações Semióticas, Duval (2004, apud PATRÍCIO, 2011), o que nos interessa especialmente pela afinidade com o nosso trabalho.

Os sujeitos da pesquisa foram alunos de uma turma de primeiro ano de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual do Pará – UEPA. Os participantes cursavam a disciplina de Geometria Analítica, no período em que foram aplicados os testes. A pesquisa foi dividida em três etapas: na primeira, os participantes assistiram às aulas teóricas, que tiveram foco nas várias representações semióticas de vetores e suas operações básicas; na segunda etapa, foram realizadas atividades envolvendo a resolução de exercícios, tirados de livros didáticos recomendados na bibliografia da disciplina, que envolviam as representações semióticas de vetores nos registros algébrico, figural e da língua natural, e as conversões entre tais representações; na terceira etapa tratou-se da análise das resoluções produzidas pelos participantes.

Concordamos com Patrício (2011) quando observou que o planejamento e a abordagem do conceito de vetor, feita para o Ensino Médio, pode ser uma das origens das dificuldades enfrentadas pelos alunos. No EM o vetor é tratado exclusivamente na disciplina de Física, que o utiliza apenas como ferramenta para o estudo da cinemática, dinâmica e estática, entre outros, trabalhando com vetores apenas no plano, ou seja, em $\boldsymbol{R}^{\mathbf{2}}$.

A partir da observação do autor, podemos afirmar que o aluno chega ao ensino superior com conhecimento insuficiente sobre este assunto, e somente com o enfoque da Física, sem o avizinhamento necessário com a Matemática, o que pode acarretar dificuldades nas disciplinas que, no ensino superior, se utilizam do conceito de vetor e suas variadas representações semióticas. Sabe-se, no entanto, que este conteúdo não está previsto nos PCNEM e, por conseguinte, fica para o ensino superior, a tarefa de adequá-lo neste cenário.

É fato que o conceito de vetor, advindo de experimentos da Física, é importantíssimo para facilitar a compreensão desse objeto para o aluno, como já visto em pesquisas mencionadas aqui neste trabalho, como o artigo de Poynter, A. e Tall, D. (2005), intitulado *“What do mathematics and physics teachers think that students will find difficult? A challenge to accepted practices of teaching”* e, também, o artigo *“The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: the concept of Vector”*, Watson, Spirou e Tall (2003) que reforçam essas ideias. Entretanto, a abordagem do conceito necessita maior abrangência, além do ponto de vista da Física, para a construção do conceito e a exploração de suas representações semióticas.

Segundo Patrício (2011), a Álgebra ainda preserva forte ligação com os conceitos da Geometria, dado que os vetores são apresentados aos alunos, pela primeira vez, em sua representação semiótica, em registro figural, ou seja, associados a uma flecha com comprimento, direção e sentido. Esta representação semiótica para o vetor é utilizada na Física e tem larga aplicação em disciplinas da engenharia, pelas suas características de cunho experimental. No entanto, em termos cognitivos, é necessário estabelecer o que ou como o método de ensino baseado em experimentos físicos tem a ver com os conceitos matemáticos para o objeto vetor, e destacar os aspectos comuns aos dois pontos de vista.

Em nosso trabalho de pesquisa a consideração desses dois pontos de vista, o da Matemática e o da Física, torna-se relevante, pois se trata aqui de abordagens diferentes que facilitam a compreensão deste conceito.

Em sua análise, Patrício (2011) trouxe as dificuldades e os erros mais relevantes, que foram observados nas atividades realizadas pelos alunos, e classificou-os em quatro categorias:

1- Confusão entre coordenadas de ponto e coordenadas de vetor, que segundo o autor pode ser explicado pela semelhança existente entre as duas representações. O ponto tem coordenadas únicas no plano, enquanto o vetor representa uma classe infinita de segmentos orientados equipolentes. Ressaltamos nesta primeira categoria classificada pelo autor, que o fato exposto precisa ser destacado pelo professor em suas aulas e, também, ser enfatizado nos livros didáticos;
2- Dificuldades na aplicação da regra do paralelogramo foram observadas pelo autor na maioria das resoluções apresentadas pelos alunos, que demonstraram não dominar a regra do paralelogramo para a soma de vetores, nem as propriedades geométricas dessa figura;
3- Dificuldades em identificar vetores iguais ficaram evidentes, por meio das atividades nas quais os alunos não souberam escolher, dentro de certas configurações, um representante de vetor que fosse mais conveniente para a realização das operações indicadas. Muitas vezes os alunos consideraram que dois vetores de mesma direção, mesmo sentido e mesma norma, eram diferentes só pelo fato de terem suas origens e extremidades em pontos diferentes.
4- A conversão entre as representações semióticas envolvendo o registro gráfico, segundo Patrício (2011), apresentou dificuldades enormes por parte dos alunos; nenhuma equipe conseguiu realizar a conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

Patrício (2011) ainda observou que a abordagem predominantemente geométrica contribui para as dificuldades dos alunos para a produção das demais representações dos vetores. Notou, também, que os exercícios presentes nos livros didáticos de Geometria Analítica ora privilegiam um tipo de registro, ora privilegiam outro, ou seja, não há preocupação com a conversão entre os vários registros de representação disponíveis.

As conclusões, apontamentos e observações feitas por Patrício (2011) e pelos demais autores das pesquisas até aqui apresentadas, são de nosso interesse, pois consideram aspectos cruciais em nossa pesquisa, tais como as representações e as dificuldades de articulação, para os alunos, entre os vários tipos de registros. Quando o estudante está no universo da Matemática, resolvendo problemas específicos dele, ou quando seu universo, não mais, é o matemático, é desejável que saiba reconhecer o objeto vetor, no contexto em que está inserido, como sendo o objeto matemático, porém, com representação particular adequada à situação problema exposta.

Nesse contexto torna-se necessário investigar como são apresentados os registros de representações semióticas de vetores nos variados livros didáticos das disciplinas de engenharia e como são tratadas pelos autores as diferentes representações, sob olhares distintos das ciências em geral.

As pesquisas de Patrício (2011), Castro (2001), Watson, Spirou e Tall (2003) e Poynter e Tall (2005) apontaram, a partir de situações diversas, uma série de problemas recorrentes e semelhantes ligados aos aspectos relacionados à construção do conceito de vetor e, em certa medida, às representações semióticas de vetores, sejam em suas produções ou na articulação entre elas.

A segunda etapa de nossa revisão de literatura tem atenção especial à representação algébrica trigonométrica para vetores e, portanto, discutiremos temas relacionados ao ensino de Trigonometria do Ensino Médio, por razões já explicitadas no início deste capítulo.

Lima, Sauer e Sartor (2011) em seu artigo, ressaltam a importância da interação das ciências da Engenharia junto aos professores e alunos do Ensino Médio como um todo. Para tanto, realizaram quatro oficinas, destinadas aos professores do EM, nas quais o foco foi o conhecimento matemático e destacamos a oficina de Trigonometria. A interdisciplinaridade envolvendo a Matemática e as Engenharias foi um aspecto importante considerado para a realização das oficinas.

Para Lima, Sauer e Sartor (2011), a proposta das oficinas de Matemática teve o objetivo de buscar formas e métodos mais atraentes, com uma abordagem contextualizada e também prática, de modo que o professor possa exercitar a interdisciplinaridade com seus alunos, inserindo, por exemplo, a Trigonometria em situações comuns a Engenharia e as Ciências de uma maneira geral.

Segundo as autoras, o tema de Trigonometria, abordado nas oficinas de Matemática, foi escolhido pela sua importância para a Engenharia e também, pelas deficiências e lacunas apresentadas pelos alunos. Quando iniciaram a oficina de Trigonometria, fizeram uma breve abordagem histórica para que se estabelecesse minimamente, as origens da Trigonometria e sua importância para a ciência em geral. Apresentaram várias situações nas quais se desenvolveram cálculos com uso de conceitos trigonométricos, tais como na Astronomia, na Geografia e em sistemas de navegação via satélite, e chamaram a atenção para a importância dessa área da Matemática dentro da Engenharia, e também sua aplicação no conceito de vetor, dizendo:

> A Trigonometria é usada em cálculos que envolvem **física, mecânica de materiais, mecânica de solos, resistência de materiais, dentre muitos outros ramos** da Engenharia. Para efetuar cálculos que envolvem força e pressão são **utilizados vetores** e, para realizar cálculos com esses vetores, utilizam-se conceitos da Trigonometria. (LIMA, SAUER e SARTOR, 2011, p.5, grifo nosso).

A oficina apresentou uma proposta metodológica baseada na construção das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, a partir das razões entre os lados de um triângulo retângulo. Para a realização de todas as atividades foi necessária a utilização de instrumentos de desenho, tais como régua, esquadros, compasso e transferidor. As autoras chamaram a atenção para o fato de que essas práticas de ensino, com o uso de instrumentos de desenho, foram sendo esquecidas com o tempo, com prejuízo aos alunos, sobretudo, aos que optaram pelas áreas técnicas.

Em uma das atividades foi proposta a construção de um “teodolito”, com o qual os professores foram desafiados a calcularem uma distância inacessível e, por fim, a resolução de problemas de trigonometria que foram apresentados e discutidos entre os demais participantes. A partir das conclusões e discussões entre os grupos, estabeleceu-se uma nova maneira de tratar sobre os conceitos de razão trigonométrica. Os professores relataram que se sentiram motivados a desenvolverem atividades planejadas, nas quais os alunos possam aprender novos conceitos a partir de suas ações e, não só pela ação dos professores.

No registro simbólico, a representação semiótica de um vetor pode ser construída a partir das suas componentes, que são as projeções ortogonais desse vetor sobre cada um dos eixos coordenados. Essas componentes vetoriais podem ser obtidas com o uso da Trigonometria básica, o que confere maior complexidade à compreensão da representação do vetor. O artigo anteriormente discutido trata justamente deste objeto matemático e das dificuldades no processo de ensino e de aprendizagem e de sua importância e aplicação nas áreas técnico-científicas.

Um estudo que consideramos importante para nosso trabalho, alinhado com o aspecto da representação algébrica trigonométrica, de nossa pesquisa, é o de Nascimento (2005), que trata dos aspectos relacionados ao significado dos conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo, tais como seno, cosseno e tangente. O autor teve por objetivo investigar como os alunos da 1ª série do Ensino Médio, de uma escola da rede pública de São Paulo se apropriaram do significado dos conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Foi explorada a construção de uma tabela trigonométrica, baseada em levantamentos históricos de trabalhos de Ptolomeu e de outros matemáticos da Grécia Antiga.

O entendimento de tais razões é vital para a compreensão da produção do registro de representação algébrica trigonométrica de um vetor e da articulação com os demais registros e, assim sendo, de grande interesse em nosso trabalho.

Para seu trabalho de pesquisa, a autora fundamentou-se em três referenciais teóricos: de Vygotsky, Vergnaud e os pressupostos teóricos de Parzysz, este último, para lidar com o ensino de geometria, apoiado nas quatro etapas de desenvolvimento do pensamento geométrico. O interesse da autora por esta pesquisa é fortemente ampliado pelos resultados de um problema proposto a mais de 650 alunos do Ensino Médio, de escolas estaduais, municipais e particulares. O problema envolveu o conceito da razão trigonométrica seno, a partir do qual o aluno deveria explicar o porquê de $\sin 30°$ ser igual a ½.

A imensa maioria dos alunos não obteve êxito e, segundo a autora, somente um aluno conseguiu responder corretamente ao problema proposto e, concluiu:

> O exposto evidencia que nossos alunos fazem cálculos sem saber ao certo o porquê. Então procuramos pensar numa sequência de atividades que levasse o aluno a construir os conceitos elementares da Trigonometria. (NASCIMENTO, 2005, p.23).

Diante disso, Nascimento (2005) estudou estratégias para conceber atividades por meio das quais os alunos construiriam seus conceitos trigonométricos. A partir do estudo das motivações as quais levaram os matemáticos gregos ao desenvolvimento da Trigonometria e à construção de uma tabela trigonométrica, é que a autora idealizou suas atividades. O propósito da construção da tabela trigonométrica está na tentativa de despertar o interesse do aluno por fatos históricos e de tornar o aprendizado mais atraente, por meio da utilização de alguns instrumentos ou artefatos, afastando os estudantes do cálculo puro e do processo mecanizado de ensino e de aprendizagem.

A pretensão da autora era de que, com as atividades, o conhecimento pudesse ser construído e não meramente transmitido, que fosse possível ao aluno expandir seu conhecimento elementar de trigonometria para outras áreas relacionadas aos fundamentos básicos, preliminarmente entendidos, das razões seno, cosseno e tangente.

Essa visão, de fato, vem ao encontro de nossas ideias com relação a importância da Trigonometria para as outras áreas da ciência, inclusive para a própria Matemática, como na Álgebra Vetorial, na representação semiótica do vetor, que, por sua vez, permeia vários ramos da Engenharia e é uma ferramenta fortemente utilizada.

A metodologia de pesquisa utilizada por Nascimento (2005) baseou-se em fundamentos da Engenharia Didática, de Michèle Artigue, da qual fez uso de alguns de seus elementos, a saber: concepção e análise *a priori* das atividades, aplicação da sequência didática e análise *a posteriori* das atividades. A partir das análises *a priori* e *a posteriori* a pesquisadora validou sua questão de pesquisa.

Nascimento (2005) propôs atividades divididas em cinco etapas, para um grupo de 14 alunos, da 1ª série do Ensino Médio, da rede pública de São Paulo. Na primeira e segunda atividades explorou os conceitos de Semelhança de Triângulos e das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo, sob a luz do modelo de Parzysz. Na terceira atividade foram apresentados os conceitos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de forma experimental, com a construção de aparelhos utilizados na Antiguidade, tais como o astrolábio e o teodolito. Após a construção dos artefatos, foram propostos problemas de aplicação prática. Na quarta atividade, a finalidade foi construir uma tabela trigonométrica, seguindo os passos históricos de Ptolomeu e mostrar aos alunos como esta tabela poderia otimizar os cálculos. A quinta e última etapa, que Nascimento (2005) definiu como uma situação de reinvestimento, consistiu na avaliação da contribuição da sequência didática para a aprendizagem dos alunos, referente aos conceitos das razões trigonométricas. Para a resolução dos exercícios desta etapa, os alunos tiveram à sua disposição todos os instrumentos utilizados, como régua, compasso, esquadros, transferidor e a própria tabela trigonométrica construída, só que nesta etapa, exclusivamente, fariam os exercícios individualmente.

Neste estudo, Nascimento (2005) concluiu que, de maneira geral, os resultados apontaram para defasagem em relação aos conteúdos abordados na sequência realizada. Nas atividades iniciais, nas quais os conhecimentos de Geometria foram avaliados, verificou-se que os alunos souberam identificar as figuras planas mais conhecidas, porém, não sabiam nenhuma propriedade relacionada às principais figuras planas e ainda, não sabiam diferenciar figuras planas e figuras no espaço e retas de segmentos.

Esses conhecimentos são relevantes para o estudo de vetores, principalmente quando se trabalha com a representação semiótica no registro figural, ou seja, o conceito de vetor por meio do desenho de uma flecha que o representa.

Os alunos também apresentaram problemas quanto à utilização dos instrumentos, mostrando que não tinham familiaridade com régua, esquadro, transferidor, compasso e calculadora, portanto, ignorando os conhecimentos mobilizados a partir de seu uso.

Este, também, foi um problema apontado por Lima, Sauer e Sartor (2011) em seu artigo, no qual relatam as mesmas dificuldades dos alunos para trabalhar com os instrumentos de desenho, deixando transparecer a falta de uso desses instrumentos em práticas de sala de aula, que ao contrário disso, poderia enriquecer muito o aprendizado dos estudantes, sobretudo em Geometria e Trigonometria, e ainda seria de grande valia para os futuros graduandos de engenharia ou outros cursos da área técnica.

Outra menção interessante, que observamos nesta pesquisa, foi a relacionada com as dificuldades enfrentadas pelos alunos em converter um registro de representação da língua natural para um registro gráfico ou algébrico. Esse problema foi evidenciado pela autora durante a realização da sequência didática e, a nós, parece corroborar com a importância dada por Duval (2011) às transformações de conversão das representações semióticas.

Nascimento (2005) diz que ainda há muito a se aprimorar no ensino de Trigonometria, e que ela encontrou apenas mais um caminho, no qual utilizou fatos históricos para construir conhecimento junto com os alunos e, aplicações em situações do dia a dia, como por exemplo, as relacionadas aos fenômenos físicos envolvendo a Óptica Geométrica, que podem ser bastante úteis.

Os conteúdos de Trigonometria são muito importantes para diversas aplicações técnicas e, também, para o próprio conceito de vetor e para uma de suas representações.

Em nossa revisão de literatura procuramos pesquisas que abordassem o conceito de vetor e suas representações e, também, os aspectos trigonométricos envolvidos em uma de suas representações. Selecionamos alguns trabalhos que julgamos estarem mais próximos de nossa investigação, conforme algumas justificativas apresentadas ao longo deste capítulo.

Pudemos observar, nos trabalhos escolhidos, as dificuldades relacionadas com a produção, o tratamento e a conversão para o objeto vetor, em suas múltiplas formas de representação disponíveis e constatar a relevância dos aspectos associados aos registros de representações semióticas.

A partir desse ponto levantamos subsídios para prosseguir com nossa pesquisa, buscando nos livros didáticos da Engenharia, as questões relacionadas com a complexidade do objeto vetor em seus principais registros de representações e a articulação entre eles.

Capítulo 4 - Procedimentos metodológicos

Nessa pesquisa vamos investigar e analisar os registros de representação de vetores e as aplicações que fazem uso desse objeto em atividades propostas nos livros didáticos de algumas disciplinas técnicas da Engenharia Mecânica e Engenharia de Produção que são comuns aos dois cursos, e também em disciplinas de Matemática que abordem este tópico. A pesquisa é de caráter documental (Gil, 2002), por se tratar de fontes primárias, uma vez que estes livros ainda não receberam nenhum tratamento analítico com esse propósito antes. A coleta e análise de dados serão delineadas e adaptadas a partir do método da análise de conteúdo proposto por Bardin (1977), de maneira mais livre e própria a esta pesquisa.

Segundo Bardin (1977) a análise documental realiza operações sobre as fontes documentais de maneira a criar uma forma interpretativa distinta do original, sem, no entanto, alterar sua essência e se tornando uma nova fonte de consulta posteriormente: “Enquanto tratamento da informação contida nos documentos acumulados, a análise documental tem por objetivo dar forma conveniente e representar de outro modo essa informação, por intermédio de procedimentos de transformação”.

Não há um método ou um modelo rígido estritamente a ser seguido, que possa ser aplicado a qualquer documento com a finalidade de análise de conteúdo e, que tenha passos bem delimitados. Para cada documento e com um leque de finalidades de análise tão amplo, devemos desenvolver e adaptar nosso método inspirando-se em técnicas e modelos de análises disponíveis até o momento, pois “Não existe o pronto-a-vestir em análise de conteúdo, mas somente algumas regras de base, por vezes dificilmente transponíveis”. (Ibidem, 1977, p.31)

Cabe ressaltar, como destacado pela autora, que a análise de conteúdo difere da análise documental pela inferência que se faz na primeira e a limitação à análise categorial característica na segunda. A finalidade da análise documental é a de sintetizar o conteúdo a ser armazenado e consultado, enquanto que a análise de conteúdo tem por objetivo manipular o conteúdo das informações e assim permitir inferências, sendo que nesta última se encaixa nossa pesquisa.

Bardin (1977) organiza a análise em três fases:

1- Pré-análise

Esta é a fase de estruturação e organização daquilo que será analisado. Determina-se a escolha dos documentos, ou seja, quais livros serão analisados, a formulação das hipóteses e dos objetivos (quais e como são utilizados os registros de vetores) e a formulação dos indicadores que possibilitem a interpretação final dos dados.

Segundo Bardin (1977) é necessário constituir um *corpus*, ou seja, estabelecer o conjunto de documentos (livros), escolhidos sob certas regras, que estarão sujeitos à análise de conteúdo. As principais regras são:

- regra da exaustividade, ou seja, deve-se considerar todos os documentos que sejam relevantes aos propósitos da análise;
- regra da representatividade, ou seja, a análise pode ser efetuada numa amostra, desde que esta seja representativa do universo considerado;
- regra da homogeneidade, quer dizer, todo livro selecionado deve obedecer ao mesmo critério de seleção;
- regra de pertinência, significa que todo livro escolhido deve ser adequado ao objetivo estabelecido.

O critério de seleção dos livros foi feito de acordo com os livros-texto indicados nos Planos de Ensino e Aprendizagem (PEA) das disciplinas da Engenharia e que são adotados em algumas universidades públicas e privadas da Grande São Paulo, e também que contenham o objeto matemático vetor ou que façam uso dele como ferramenta para a solução de problemas.

As instituições, por sua vez, foram escolhidas contemplando representantes de instituições públicas e privadas da Grande São Paulo, conhecidas no meio acadêmico, de forma a abranger uma amostra significativa e representativa de instituições. O quadro 05 a seguir, traz informações sobre as instituições pesquisadas. Os livros referidos na sexta coluna desse quadro, que estão numerados e listados no quadro 06, fazem parte dos PEA’s das disciplinas das referidas instituições. As universidades FEI, UNICSUL, UNINOVE e USJT não disponibilizam seus PEA´s, portanto, os livros relacionados a estas universidades foram confirmados a partir de “blogs” de engenharias e “sites” de estudo dos alunos.

Ordem	**Instituição de Ensino Superior**	**Engenharia Mecânica**	**Engenharia de Produção**	**Pública(Pu) ou privada (Pr)**	**Livros (1 a 11) – PEA’s**
01	Centro Universitário – FEI	Sim	Sim	Pr	5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11
02	Fundação Armando Álvares Penteado - FAAP	Sim	Sim	Pr	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11
03	Fundação Santo André - FSA	Sim	Sim	Pu	1, 5, 6, 7, 8, 10, 11
04	Instituto Mauá de Tecnologia	Sim	Sim	Pr	1, 2, 6, 7, 8, 11
05	Pontifícia Universidade Católica – PUC-SP	Sim	Sim	Pr	1, 6, 7, 8, 10 e 11
06	Universidade Anhanguera de São Paulo	Sim	Sim	Pr	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11
07	Universidade Cruzeiro do Sul – UNICSUL	Sim	Sim	Pr	2, 4, 5, 7, 8, 9, 10 e 11
08	Universidade de São Paulo - USP	Sim	Sim	Pu	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11
09	Universidade Estácio de Sá	Sim	Sim	Pr	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11
10	Universidade Mackenzie	Sim	Sim	Pr	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11
11	Universidade Nove de Julho – UNINOVE	Sim	Sim	Pr	2, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11
12	Universidade Paulista – UNIP	Sim	Sim	Pr	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11
13	Universidade São Judas Tadeu – USJT	Sim	Sim	Pr	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11

Quadro 5: Instituições de ensino superior pesquisadas com grades curriculares semelhantes.
Fonte: Acervo pessoal.

Os conteúdos programáticos que constam das disciplinas utilizados para a seleção dos livros estão reproduzidos parcialmente nos anexos, acompanhados das bibliografias básica e complementar, sendo que o leitor poderá consultar sua íntegra nas respectivas instituições de ensino.

Selecionamos onze livros didáticos dentre os adotados em disciplinas de Matemática ou técnico-científicas do currículo de Engenharia Mecânica e Engenharia de Produção que são de autores reconhecidos no meio acadêmico e indicados com frequência nas bibliografias básica ou complementar dos Planos de Ensino e Aprendizagem (PEA) das instituições.

Os livros selecionados têm uma grande frequência de utilização e estão nas bibliografias dos PEA´s das seguintes disciplinas: *Álgebra Linear; Geometria Analítica; Geometria Analítica e Vetores I; Álgebra Linear e Geometria Analítica; Física I (ou Física Geral I); Resistência dos Materiais I; Mecânica Estática (ou Mecânica Geral); Mecânica dos Sólidos II (ou Mecânica Aplicada).* A partir do quadro 05 selecionamos três instituições de ensino para centrar nossa análise, obedecendo aos seguintes critérios:

- ✓ Oferecem os cursos de Engenharia Mecânica e Engenharia de Produção;
- ✓ São conhecidas no meio acadêmico;
- ✓ Ao menos uma representante do setor público e uma do privado;
- ✓ Grades curriculares com disciplinas comuns;
- ✓ Disciplinas com livros comuns em suas referências bibliográficas.

Segundo os critérios acima, escolhemos do setor público a Universidade de São Paulo-USP e do setor privado a Universidade Mackenzie-UM. A Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN-SP também foi selecionada segundo os mesmos critérios, porém, com uma razão a mais, o fato de o pesquisador lecionar nessa instituição.

Os livros selecionados são comuns aos PEA’s das disciplinas das três instituições escolhidas e abordam o conceito de vetor e/ou utilizam este objeto na resolução de problemas. Em boa parte, esses livros também constam nos PEA’s das outras instituições conforme pode ser observado no quadro 05.

O quadro 06, a seguir, mostra os livros didáticos selecionados em cada disciplina e as instituições de Ensino Superior nas quais são utilizados. A primeira coluna enumera os livros, de Livro 01 a 11. O “Livro 06” consta em bibliografias de muitas instituições, no entanto, não está presente no PEA da disciplina “Álgebra Linear e Geometria Analítica” da Universidade Anhanguera, na qual consta o “Livro 03”. Esse livro traz como autores Steinbruch e Winterle, enquanto que o “Livro 06”, apenas Winterle. O Livro 03 é o resultado da compilação de materiais extraídos dos Livros 04 e 05, e faz parte do Programa do Livro Texto (PLT) da Universidade Anhanguera; e na compilação foram subtraídas as listas de exercícios propostos, permanecendo apenas os exercícios resolvidos. As abordagens para o estudo dos vetores nos quatro livros (03, 04, 05 e 06) são muito semelhantes; os autores são os mesmos e, por esta razão, suas análises serão feitas os considerando praticamente como um único livro, levando em conta e destacando apenas aspectos distintos que venham a emergir de tais livros.

Livro	**Disciplina**	**Livro/autor**	**Instituição de Ensino Superior**
Livro 01	Álgebra Linear	Geometria Analítica – um tratamento vetorial. 3ª ed. 2005. Camargo, I; Boulos, P. (1ª edição, 1986)	Anhanguera Mackenzie USP
Livro 02	Álgebra Linear	Álgebra Linear com aplicações. 10ª ed. 2012. Anton, H.; Rorres, C. (1ª edição, 1973)	Anhanguera Mackenzie USP
Livro 03	Álgebra Linear e Geometria Analítica	Álgebra Linear e Geometria Analítica. (PLT195) 2ª ed. 1987. Steinbruch, A.; Winterle, P. (1ª edição, 1979.)	Anhanguera
Livro 04	Álgebra Linear	Álgebra Linear. 2ª ed. 1987. Steinbruch, A.; Winterle, P. (1ª edição, 1979.)	Anhanguera Mackenzie USP
Livro 05	Geometria Analítica	Geometria Analítica. 2ª ed. 1987. Steinbruch, A.; Winterle, P. (1ª edição, 1979.)	Anhanguera Mackenzie USP
Livro 06	Geometria Analítica	Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. 2014. Winterle, P. (1ª edição, 2000)	Mackenzie USP
Livro 07	Física Geral I (Física I)	Fundamentos de Física. Vol.1, 9ª ed. 2012. Halliday, D; Resnick, R.; Walker, J. (1ª edição, 1960)	Anhanguera Mackenzie USP
Livro 08	Física Geral I (Física I)	Física para cientistas e engenheiros. Vol.1. 6ª ed. 2009. Tipler, P; Mosca, G (1ª edição, 1976)	Anhanguera Mackenzie USP
Livro 09	Mecânica Geral (Estática)	Estática. Mecânica para engenharia. 12ª ed. 2011.Hibbeler, R. C. (1ª edição, 1974)	Anhanguera Mackenzie USP
Livro 10	Mecânica Aplicada (Dinâmica)	Dinâmica. Mecânica para engenharia. 12ª ed. 2011.Hibbeler, R. C. (1ª edição, 1974)	Anhanguera Mackenzie USP

Livro 11	Resistência dos Materiais	Resistência dos Materiais. 7ª ed. 2010. Hibbeler, R. C. (1ª edição, 1991)	Anhanguera Mackenzie USP

Quadro 6: Livros didáticos por disciplinas e suas respectivas instituições de ensino superior.
Fonte: Acervo pessoal.

Podemos observar a partir do quadro 06, que os livros de Matemática e Física em geral são antigos e os livros das disciplinas técnico-científicas da engenharia geralmente são traduções de livros americanos, não tão completamente adaptados às características dos cursos de engenharia no Brasil.

Vamos destacar, nos livros escolhidos, os capítulos que tratem exclusivamente do objeto matemático vetor, propriamente dito, quando for o caso ou somente suas aplicações ou as duas coisas quando possível. Investigaremos de que forma os conceitos são apresentados e os tipos de registros de representações mobilizados; a apresentação das operações de adição e subtração, do módulo ou norma de um vetor e da multiplicação de um escalar por um vetor. Verificaremos também que recursos são utilizados para determinar os ângulos entre vetores, ou entre um vetor e um eixo de referência, o que determina sua direção. Iniciaremos esse estudo pelo exame dos livros das disciplinas da área da Matemática. Posteriormente, vamos investigar como é apresentado o conceito de vetor, e quais são os registros de representações utilizados e aplicados para solução de problemas nas disciplinas da área técnico-científica.

A análise dos livros foi estruturada em duas partes: a primeira, a análise da teoria e dos exercícios resolvidos e a segunda, a análise de exercícios propostos. Cabe salientar que os livros, aqui nomeados de livros da área técnico-científica da Engenharia, não necessariamente, possuem a teoria específica sobre vetores e podem trazer, tão somente, problemas nos quais os vetores são utilizados de alguma forma para a solução.

Uma vez selecionados e coletados os dados extraídos dos documentos deverão ser preparados, ou seja, organizados para posterior análise.

2- A exploração do material

Esta fase não é independente da anterior, ao contrário, tem aspecto de complementaridade e consiste basicamente na codificação ou enumeração, de acordo com as regras previamente estabelecidas para a escolha dos documentos (livros) e procura administrar e organizar a seleção feita.

3- Tratamento dos resultados obtidos e interpretação.

Segundo Bardin (1977), “os resultados brutos são tratados de maneira a serem significativos (falantes) e válidos” e com algum tratamento estatístico pode facilitar a emergência das informações da análise a ser feita. Uma vez que os resultados são considerados significativos, pode-se interpretá-los de acordo com o objetivo da pesquisa.

Nossa análise está enquadrada na categoria qualitativa e, portanto, não iremos criar uma codificação para os dados obtidos nos livros, como o seria numa análise quantitativa. Não estamos, propriamente, buscando elementos que se repetem com frequência; para nossa análise, “a abordagem não quantitativa, recorre a indicadores não frequenciais susceptíveis de permitir inferências; por exemplo, a presença (ou a ausência), pode constituir um índice tanto (ou mais) frutífero que a frequência de aparição. ” (BARDIN, 1977, p.114)

No entanto, a análise quantitativa não será totalmente rejeitada; à medida que certos tópicos se tornarem recorrentes poderão ser tratados adequadamente com as ferramentas quantitativas necessárias.

Segundo Bardin (1977), o processo de categorização pode ser resumido como sendo uma operação de classificação dos elementos que constituem o material selecionado para a análise, por meio de diferenciação e reagrupamento, de acordo com critérios pré-estabelecidos, organizando os dados brutos obtidos.

Para o processo de categorização é necessário que se leve em conta alguns aspectos essenciais:

- Cada elemento só pode se enquadrar em uma única categoria;
- As categorias devem ser homogêneas, sendo construídas com um princípio único em sua organização;
- As categorias devem ser pertinentes, ou seja, adequadas ao propósito das questões de pesquisa;

- As categorias devem ser objetivas e fieis de forma a evitar distorções e falsos juízos de análise;
- Por fim, as categorias devem ser produtivas, fornecendo dados precisos e que facilitem inferências.

As categorias constituídas com a finalidade de orientar a análise de conteúdo dos livros didáticos em nossa pesquisa são:

1) Conceito de vetor estabelecido nos livros didáticos da Engenharia;
2) Representações semióticas utilizadas para os vetores;
3) Operações com vetores, ou seja, os tipos de registros de representação e os tratamentos matemáticos utilizados;
4) Transformações (conversões ou tratamentos) realizadas entre as representações semióticas de vetores.

A análise de conteúdo apresentada por Bardin (1977) e adaptada à nossa pesquisa, ajuda a organizar, a delimitar e a estabelecer parâmetros que facilitam nossa investigação e a obtenção de respostas para as nossas questões de pesquisa e o processo de inferência.

No próximo capítulo, a partir dos livros selecionados no quadro 06, apresentaremos os dados com comentários e análises.

Capítulo 5 - Vetores e suas representações em livros didáticos.

5.1 Introdução

As primeiras noções sobre vetor surgiram, provavelmente, com Aristóteles no século IV a.C., conforme já relatado no Capítulo 01, e trazem, já em suas ideias iniciais, a associação com o conceito de força ou de movimento por meio do uso da regra do paralelogramo, com a qual os vetores podem ser adicionados. A representação geométrica para vetores talvez seja a mais antiga, está presente nas considerações iniciais dos livros de Matemática e está fortemente presente nos livros de Física e de Engenharia, associada às representações algébricas trigonométricas, como poderemos observar ao longo deste trabalho.

Neste capítulo apresentaremos os dados e as análises feitas sobre os conteúdos dos livros didáticos dos cursos de Engenharia selecionados, conforme critérios já estabelecidos no capítulo anterior, nos quais constatamos a presença do objeto matemático vetor e/ou suas aplicações nas referidas disciplinas. Iremos investigar quais são os registros de representação mobilizados e quais operações semióticas são realizadas entre esses registros, de acordo com os fundamentos da teoria dos Registros de Representações Semióticas, Duval (2006, 2011a, 2011b).

Vamos iniciar nosso trabalho apresentando os conceitos e as representações utilizadas, primeiramente nos livros de Matemática e depois nos livros das disciplinas técnico-científicas da Engenharia e, verificar como o objeto vetor é explorado em ambas as áreas e como são estabelecidas as ligações entre os diferentes aspectos dessas distintas abordagens feitas para o mesmo objeto.

Para facilitar a leitura das análises dos livros didáticos, estruturaremos o trabalho em duas etapas distintas, conforme já mencionado no capítulo anterior: a primeira etapa consistirá na análise da parte teórica e dos exercícios resolvidos como exemplos, a segunda, uma breve análise dos exercícios propostos, identificando as representações utilizadas e as operações semióticas implícitas.

Inicialmente, podemos observar que, nos livros de Matemática, Física e Engenharia selecionados, alguns símbolos e notações adotados diferem, como por exemplo:

- Nos livros de Matemática, em geral: $\|\vec{v}\|$ significa "norma ou módulo do vetor $\vec{v}$";
- Nos livros de Física: $\vec{v}$ é o "vetor $\boldsymbol{v}$" e, $\boldsymbol{v}$ (sem a seta sobre a letra) denota o módulo do vetor;
- Nos livros de Engenharia: $\boldsymbol{v}$ em "negrito" identifica o vetor e, v sem negrito o seu módulo.

Estes são apenas alguns exemplos; no entanto, quando olhamos para os livros das disciplinas técnico-científicas da engenharia, que geralmente são traduções de livros americanos, constatamos que a simbologia como um todo, diverge da adotada nos livros de Física e Matemática, pois não sofreram completa adaptação às características dos demais textos utilizados nos cursos de engenharia no Brasil. Este fato acrescenta um grau a mais na complexidade da produção dos registros de representação, com o nosso interesse específico voltado para os vetores. Tais fatos serão observados e comentados ao longo deste capítulo.

5.2 Conceitos e Representações de vetores nos livros de Matemática

5.2.1 Análise da parte teórica e de exercícios resolvidos

Iniciaremos a análise trazendo os elementos dos prefácios dos livros selecionados. O livro de Geometria Analítica, que denominamos "Livro 01" e o consideraremos como um modelo, a espinha dorsal, a partir da qual as análises e comentários dos demais livros da Matemática serão construídos. Em seu prefácio, os autores evidenciam que os conceitos serão apresentados sob o ponto de vista da Geometria, com posterior tradução para a linguagem algébrica. Os doze primeiros capítulos tratam da Álgebra Vetorial, intervalo este no qual se encontra o objeto de nosso interesse. O Capítulo 1 traz o conceito de vetor tratado em sua forma geométrica; os Capítulos 2, 3 e 4 apresentam as operações e técnicas que constituem a ferramenta vetorial. O Capítulo 5 traz aplicações na Geometria Plana e, de modo geral, os Capítulos 6 a 11 trazem os resultados teóricos sobre dependência linear, base, produto escalar e produto vetorial. Nos capítulos 13 a 26 encontramos o estudo de Geometria Analítica.

O prefácio do Livro 02, Álgebra Linear, apresenta uma série de informações a respeito da estrutura do livro, com sugestões que servem como guia para o professor ou para o aluno criarem seu próprio cronograma de estudos e procura atender a diversos públicos, como estudantes de Engenharia, Ciências da Computação, Física, Matemática entre outros. No Livro 03, PLT 195, não há introdução ou prefácio que dê orientações ou sugestões sobre como usar o livro.

Os prefácios dos Livros 04 e 05 são idênticos, pois são o resultado do processo de desmembramento de um único livro. Neles os autores só ressaltam que nesse processo, muitos exercícios foram acrescentados, os textos foram revisados com o intuito de tornar os livros mais acessíveis e práticos, no entanto, não há nenhuma sugestão ou estratégia de como melhor utilizar os livros.

Na introdução do Livro 06, Vetores e Geometria Analítica, o autor descreve a estrutura geral do livro constituído por nove capítulos, sendo os quatro primeiros sobre vetores. O autor destaca sua importância para outras áreas, para além das disciplinas de Matemática, trazendo exemplos de aplicações na Física. A noção de vetor é apresentada de forma intuitiva e estudada por meio do tratamento geométrico e algébrico; a relação entre ambos os tratamentos é estabelecida e, entre alguns de seus aspectos importantes, o autor destaca o desenvolvimento do raciocínio geométrico e a visão espacial, que são essenciais, por exemplo, aos futuros engenheiros.

Para simplificar o desenvolvimento e a compreensão das análises, tornando a leitura mais acessível, consideraremos as notações estabelecidas no quadro a seguir, no qual atribuímos siglas para as representações semióticas aqui consideradas.

Tipo de registro	Registro	Denominação da representação	Sigla
Língua natural	Registro em língua portuguesa	Representação em língua natural (para descrição de situações-problema e linguagem matemática específica)	RLN
Figural	Registro em forma de desenho	Representação geométrica	RGE
Gráfico	Registro cartesiano	Representação gráfica	RGR
Simbólico	Registro algébrico vetorial	Representação algébrica vetorial	RAV
Simbólico	Registro algébrico em coordenadas	Representação algébrica em coordenadas	RAC
Simbólico	Registro algébrico trigonométrico	Representação algébrica trigonométrica	RAT
Simbólico	Registro algébrico módulo-ângulo	Representação algébrica módulo-ângulo	RAM

Quadro 7: Representações e suas siglas.
Fonte: Acervo pessoal.

O quadro 7 mostra a correspondência entre os registros e representações e as respectivas siglas que serão utilizadas a partir daqui.

O conceito de vetor é abordado no Capítulo 1 do Livro 01, primeiramente de maneira intuitiva e usando a representação geométrica. A mesma abordagem geométrica também é dada no Livro 02, Capítulo 3, porém, um pouco mais concisa. O mesmo acontece com os livros 03, 04, 05 e 06, isto é, todos de modo geral, apresentam da mesma forma o conceito geométrico de vetor no Capítulo 1. Os autores do Livro 01 destacam os conceitos de grandezas escalares e vetoriais, fazem uso da representação de uma força por meio de uma flecha e estabelecem as noções iniciais de vetor, dizendo que duas flechas de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido são representantes de um mesmo vetor. A primeira definição formal, dada pelos autores, passa pelo conceito geométrico de segmento orientado. Podemos observar as definições dos Livros de 01 a 06, apresentados nos quadros 8 a 12, a seguir.

Um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados. Se (A, B) é um segmento orientado, o vetor que tem (A, B) como representante será indicado por $\overrightarrow{AB}$. Quando não se quer destacar nenhum representante em especial, usam-se letras latinas minúsculas com uma seta $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{x}\ etc.)$. O conjunto de todos os vetores será indicado por V^3.

Quadro 8: Definição de vetor.
Fonte: LIVRO 01, p.6.

Os engenheiros e os físicos representam vetores em duas dimensões (no espaço ***bi***dimensional) ou em três dimensões (no espaço ***tri***dimensional) por flechas. A direção e o sentido da flecha especificam a ***direção*** e o ***sentido*** do vetor, e o comprimento da flecha descreve seu ***comprimento***, ou ***magnitude***. Os matemáticos dizem que esses vetores são ***geométricos***. A cauda da flecha é o ***ponto inicial*** do vetor, e a ponta da flecha é seu ***ponto final*** (Figura 3.1.1).

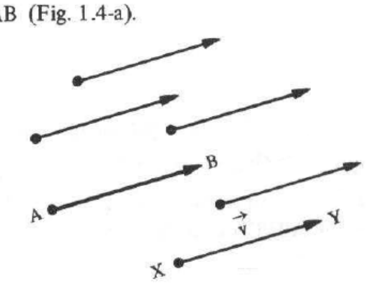
Quadro 9: Definição de vetor.
Fonte: LIVRO 02, p.119.

Sabe-se que os vetores do plano ou do espaço são representados por *segmentos orientados*. Todos os segmentos orientados que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento são *representantes* de um mesmo vetor. Por exemplo, no paralelogramo da Figura 1.1a, os segmentos orientados AB e CD determinam o mesmo vetor v, e escreve-se

$$v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Quadro 10: Definição de vetor.
Fonte: LIVROS 03 e 04, p.1.

Vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB (Fig. 1.4-a).



Quadro 11: Definição de vetor.
Fonte: LIVRO 05, p.4.

Abstendo-se da ideia de grandezas vetoriais, diríamos que o vetor é representado por um *segmento orientado* (um segmento está orientado quando nele há um sentido de percurso, considerado positivo).

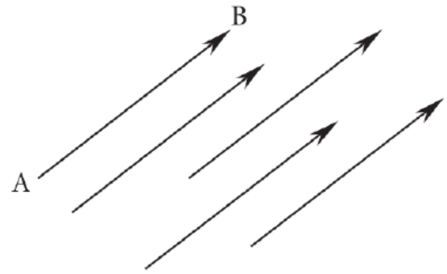


Figura 1.3

Dois ou mais segmentos orientados de mesmo comprimento, mesma direção (são paralelos ou colineares) e mesmo sentido são *representantes* de um mesmo vetor. Na Figura 1.3 todos os segmentos orientados paralelos, de mesmo sentido e mesmo comprimento de AB, representam o mesmo vetor, que será indicado por $\overrightarrow{AB}$ ou $B - A$

Quadro 12: Definição de vetor.
Fonte: LIVRO 06, p.2.

Dessa forma, temos introduzido o conceito de vetor com base numa abordagem geométrica, em todos os textos, sem diferenças significativas e também a adoção de um registro figural que denominamos sua representação geométrica. Os exemplos dos Livros 01 e 02, na figura 22 reproduzem essa representação geométrica de vetor descrita pelos autores. Observa-se que a notação de vetor no Livro 02, difere da dos demais livros de Matemática, pois o autor usa letras minúsculas em negrito para representar os vetores e letras minúsculas em itálico para os escalares (números reais).

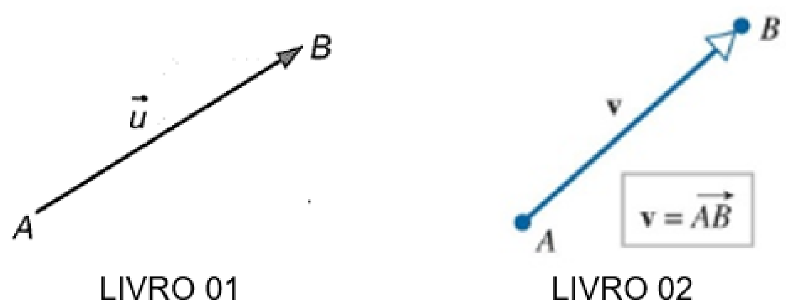


Figura 22: Representações geométricas de um vetor.
Fonte: LIVRO 01, p.4, LIVRO 02, p.120.

Outra representação de vetor descrita pelos autores é a chamada representação algébrica, baseada nas operações com vetores ou em coordenadas definidas a partir da escolha de uma base específica, como veremos a seguir.

No Livro 01, define-se uma base qualquer $\boldsymbol{E} = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3)$ de um espaço vetorial $\boldsymbol{V}^3$, como um conjunto linearmente independente, a partir do qual se pode definir as coordenadas dos vetores deste espaço vetorial; ou seja, existem escalares ou números reais $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ de forma que a expressão ou decomposição de um vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ a partir desta base é dada por:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{a_1}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \boldsymbol{a_2}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \boldsymbol{a_3}\vec{\boldsymbol{e}}_3$$

Neste trabalho consideramos esta forma de representação como sendo uma representação algébrica vetorial (RAV), conforme estabelecido no quadro 02, p.46. Esta definição está presente no Livro 01, conforme quadro 13 e nos demais livros, como se apresentam nos quadros 14, 15, 16 e 17 a seguir.

Sendo E = $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base, podemos dizer, conforme a Proposição 6-8, que todo vetor $\vec{u}$ é gerado por $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, isto é, existem escalares a_1, a_2, a_3 tais que

$$\vec{u} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \qquad \textbf{[7-1]}$$

Quadro 13: Representação algébrica vetorial.
Fonte: LIVRO 01, p.53.

DEFINIÇÃO 4 Dizemos que um vetor **w** em R^n é uma ***combinação linear*** dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ em R^n se **w** puder ser expresso na forma

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r \qquad (14)$$

em que $k_1, k_2, \ldots, k_r$ são escalares. Esses escalares são denominados ***coeficientes*** da combinação linear. No caso em que $r = 1$, a Fórmula (14) se torna $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1$, de modo uma combinação linear de um vetor só é simplesmente um múltiplo escalar desse vetor.

Quadro 14: Representação algébrica vetorial.
Fonte: LIVRO 02, p.127.

2.5 COMBINAÇÃO LINEAR

Sejam os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ do espaço vetorial V e os escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Qualquer vetor $v \in V$ da forma:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

é uma *combinação linear* dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Quadro 15: Representação algébrica vetorial.
Fonte: LIVRO 03, p.39 e LIVRO 04, p.39.

Nos quadros 16 e 17 a seguir são apresentados apenas os vetores como combinação linear de vetores no plano; os autores exibem, da mesma forma, a combinação linear para vetores no espaço *R³,* não mostrada aqui.

Quando o vetor $\vec{v}$ estiver representado por:

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \tag{2.1}$$

dizemos que $\vec{v}$ é *combinação linear* de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. O par de vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, não colineares, é chamado *base* no plano. Aliás, qualquer conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de vetores não colineares constitui uma base no plano. Os números a_1 e a_2 da representação (2.1) são chamados *componentes* ou *coordenadas* de $\vec{v}$ em relação à base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Quadro 16: Representação algébrica vetorial.
Fonte: LIVRO 05, p.16-17.

De modo geral, dados dois vetores quaisquer $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos, para cada vetor $\vec{v}$ representado no mesmo plano de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, existe uma só dupla de números reais a_1 e a_2 tal que

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \qquad \textbf{(1)}$$

A Figura 1.39 ilustra essa situação, na qual $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são vetores não paralelos quaisquer e $\vec{v}$ é um vetor arbitrário do plano determinado por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$

Quando o vetor $\vec{v}$ é expresso como em **(1)**, diz-se que $\vec{v}$ é *combinação linear* de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. O conjunto $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é chamado *base no plano*. Aliás, qualquer conjunto de dois vetores não paralelos constitui uma *base no plano*.

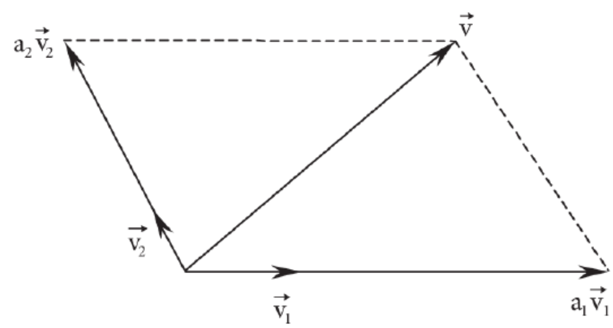


Figura 1.39

Quadro 17: Representação algébrica vetorial no Livro 06.
Fonte: LIVRO 06, p.18.

Trata-se, pois, de considerar uma combinação linear de vetores de uma base ***E***. Os autores deixam claro que existem infinitas bases, entretanto, as bases ortonormais (discutidas mais adiante) são, na prática, as mais utilizadas. São essas bases ortonormais que permitem obter expressões para a norma e as projeções de um vetor de maneira mais simples. Nos exemplos, cada escalar da tripla ou do par ordenado é denominado de uma *coordenada* do vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ em relação a base $\boldsymbol{E}$, ou *coeficiente* ou *componente escalar* do vetor, como definido pelos autores (Livro 02, p.123). Observa-se que, escolhida uma base, cada vetor fica associado a uma única tripla ordenada de escalares (considerando-se o espaço tridimensional) e, podemos representar as coordenadas do vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ escolhida a base, da seguinte maneira:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$$

Esta forma de representar o vetor será denominada, neste trabalho, uma *representação algébrica em coordenadas* (RAC). As formas de conceituação algébrica de um vetor nos Livros 03 e 04 são exatamente iguais (são os mesmos autores), o que também acontece, de modo geral, com os Livros 05 e 06, pela mesma razão. Verificamos essa representação nos seis livros de Matemática, conforme constata-se nos quadros 18, 19, 20, 21 e 22 a seguir:

$$\vec{u} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \qquad \textbf{[7-1]}$$

A tripla de escalares (a_1,a_2,a_3) é a única a satisfazer [7-1], pois, se $\vec{u} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$, então, pelo Corolário 6-12, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$ e $b_3 = a_3$. Cada escalar dessa tripla é chamado **coordenada** de $\vec{u}$ **em relação à base** E (ou: **na base** E). Portanto, escolhida uma base, a cada vetor fica associada univocamente uma tripla ordenada de escalares, chamada **tripla de coordenadas** de $\vec{u}$ **em relação à base** E (ou: **na base** E).

Pode-se, portanto, escrever [7-1] sob as formas $\vec{u} = (a_1,a_2,a_3)_E$ e $\vec{u} = (a_1,a_2,a_3)$. Esta última é, na verdade, um abuso de notação, pois o primeiro membro é um vetor e o segundo, uma tripla de escalares.

Quadro 18: Conceituação algébrica de vetor em coordenadas.
Fonte: LIVRO 01, p.53.

Vetores em sistemas de coordenadas

Se um vetor **v** qualquer do espaço bi ou tridimensional for posicionado com seu ponto inicial na origem de um sistema de coordenadas retangulares, então o vetor estará completamente determinado pelas coordenadas de seu ponto final (Figura 3.1.10). Dizemos que essas coordenadas são os ***componentes*** de **v** em relação ao sistema de coordenadas. Escrevemos $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ para denotar um vetor **v** do espaço bidimensional de componentes (v_1, v_2) e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ para denotar um vetor **v** do espaço tridimensional de componentes (v_1, v_2, v_3).

Quadro 19: Conceituação algébrica de vetor em coordenadas.
Fonte: LIVRO 02, p.122.

1.3 VETORES NO $\mathbb{R}^2$

O conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$

é interpretado geometricamente como sendo o plano cartesiano xOy.

Qualquer vetor $\overrightarrow{AB}$ considerado neste plano tem sempre um representante (segmento orientado OP) cuja origem é a origem do sistema (Figura 1.3a).

Em nosso estudo consideraremos geralmente vetores representados por segmentos orientados com origem na origem do sistema. Nessas condições, cada vetor do plano é determinado pelo ponto extremo do segmento. Assim, o ponto $P(x, y)$ individualiza o vetor $v = \overrightarrow{OP}$ (Figura 1.3b) e escreve-se: $v = (x, y)$ identificando-se as coordenadas de P com as componentes de v.

1.9 VETORES NO $\mathbb{R}^3$

O conjunto $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$

é interpretado geometricamente como sendo o espaço cartesiano tridimensional Oxyz.

Da mesma forma como fizemos para o plano, consideraremos geralmente vetores representados por segmentos orientados com a origem na origem do sistema. Nessas condições, cada vetor do espaço é determinado pelo ponto extremo do segmento. Assim, o ponto $P(x, y, z)$ individualiza o vetor $v = \overrightarrow{OP}$ (Figura 1.9) e escreve-se: $v = (x, y, z)$

identificando-se as coordenadas de P com as componentes de v.

Quadro 20: Conceituação algébrica de vetor em coordenadas.
Fonte: LIVRO 03, p.5-13 e LIVRO 04, p.5-13.

2.2 Expressão Analítica de um Vetor

Ora, fixada a base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre os vetores do plano e os pares ordenados (x, y) de números reais. Nestas condições, a cada vetor $\vec{v}$ do plano pode-se associar um par (x, y) de números reais que são suas componentes na base dada, razão porque define-se:

vetor no plano é um par ordenado (x, y) *de números reais* e se representa por:

$\vec{v} = (x, y)$ que é a *expressão analítica de* $\vec{v}$.

Quadro 21: Conceituação algébrica de vetor em coordenadas.
Fonte: LIVRO 05, p.19.

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 \qquad (1)$$

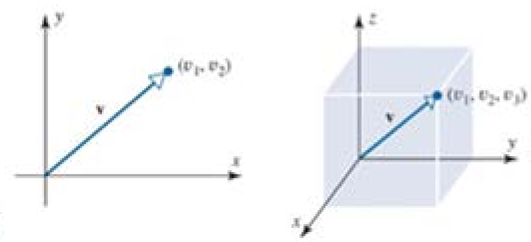
Os números a_1 e a_2 da igualdade **(1)** são chamados *componentes* ou *coordenadas* de $\vec{v}$ na base B (a_1 é a primeira componente, e a_2, a segunda).

O vetor $\vec{v}$ da igualdade **(1)** pode ser representado também por $\vec{v} = (a_1, a_2)_B$ ou $\vec{v}_B = (a_1, a_2)$.

Quadro 22: Conceituação algébrica de vetor em coordenadas.
Fonte: LIVRO 06, p.18.

Observamos que o tratamento algébrico dado ao vetor nos livros de Matemática produz inicialmente duas representações algébricas que consideramos distintas: a representação algébrica vetorial (RAV) e a representação algébrica em coordenadas (RAC). No Livro 01, os autores fazem a transição da representação RAV para a RAC, mostrando sua correspondência, numa transformação de conversão, no entanto, não há ênfase na mudança da representação geométrica (RGE) ou da representação gráfica (RGR) para uma das representações algébricas, ficando a cargo do estudante ou do professor fazer esta operação semiótica. Para os demais livros, de 02 a 06, além de conversões que envolvem representações do registro algébrico, encontramos ênfase na transição da representação RGR ou RGE para as representações RAV e RAC, de tal forma que fica mais claro que tais representações se referem ao mesmo objeto matemático. Para ilustrar isso, consideramos a figura 23, do Livro 02, que também representa essa conversão para os demais livros de 03 a 06.

Escrevemos $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ para denotar um vetor $\mathbf{v}$ do espaço bidimensional de componentes (v_1, v_2) e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ para denotar um vetor $\mathbf{v}$ do espaço tridimensional de componentes (v_1, v_2, v_3).



▶ **Figura 3.1.10**

Figura 23: Conversão de RAC para RGR.
Fonte: LIVRO 02, p.122.

Podemos ter uma base qualquer de um espaço vetorial $\boldsymbol{V}^3$ para definir as coordenadas de um vetor, no entanto, há bases particularmente importantes, que são as *bases ortogonais* às quais nos referimos anteriormente. Antes convém definir o conceito de ortogonalidade (notação: $\perp$) entre vetores. Segundo definição dos autores, Livro 01, mostrado no quadro 23:

Definição:
a) Os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **ortogonais** se existe um representante (A, B) de um deles e um representante (C, D) do outro tais que AB e CD sejam ortogonais. Indica-se $\vec{u} \perp \vec{v}$.
b) O vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.

Quadro 23: Ortogonalidade entre vetores.
Fonte: LIVRO 01, p. 58, grifo dos autores.

O quadro 24, Livro 02, apresenta a definição de ortogonalidade a partir do conceito de produto escalar, o que se repete nas definições dos livros 03, 04, 05 e 06, exceção às pequenas mudanças de linguagem e de notação e aos exemplos, como a representação geométrica, no Livro 06, que ilustra a relação entre o sinal do produto escalar $\vec{u}.\vec{v}$ e os intervalos de variação da medida dos ângulos formados entre estes vetores, podendo ser verificado com o auxílio do quadro 25.

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que dois vetores não nulos **u** e **v** em R^n são ***ortogonais*** (ou ***perpendiculares***) se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Também convencionamos que o vetor nulo em R^n é ortogonal a *cada* vetor em R^n. Um conjunto não vazio de vetores em R^n é denominado ***ortogonal*** se dois quaisquer de seus vetores forem ortogonais. Um conjunto ortogonal de vetores unitários é dito ***ortonormal***.

Quadro 24: Ortogonalidade e ortonormalidade entre vetores.
Fonte: LIVRO 02, p.143.

b) Se dois vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ são ortogonais, o ângulo θ por eles formado é de 90°, e, portanto, $\cos\theta = \cos 90° = 0$, o que implica, pela Fórmula (1.7.1):

$$u.v = 0$$

ou:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

isto é, dois vetores u e v são ortogonais quando o produto escalar deles é nulo. Representa-se por $u \perp v$ dois vetores u e v ortogonais.

Referência: Livros 03, 04 e 05

c) Como em **(2)** o sinal de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é o mesmo de $\cos\theta$, concluímos que:

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \cos\theta > 0 \Leftrightarrow 0° \leq \theta < 90°$ (Figura 2.4(a))

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \cos\theta < 0 \Leftrightarrow 90° < \theta \leq 180°$ (Figura 2.4 (b))

3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90°$ (Figura 2.4 (c))

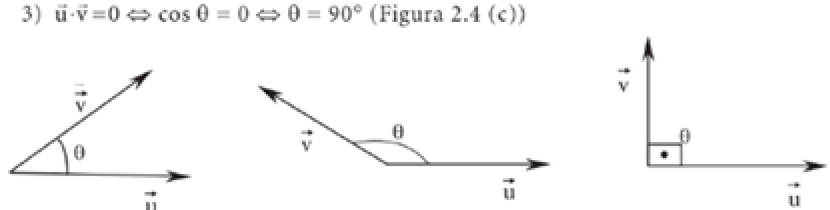


Figura 2.4

Esta afirmação estabelece a *condição de ortogonalidade* de dois vetores:

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Referência: Livro 06

Quadro 25: Ortogonalidade entre vetores, Livros 03, 04, 05 e 06.
Fonte: LIVRO 03, p.13 e LIVRO 06, p.52.

Uma base $\boldsymbol{E} = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3)$ é dita *ortogonal* se $\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3$ são ortogonais entre si e *ortonormal,* se $\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3$ são unitários e ortogonais entre si, conforme figura 24. A definição se repete nos demais livros de Matemática, de forma idêntica.

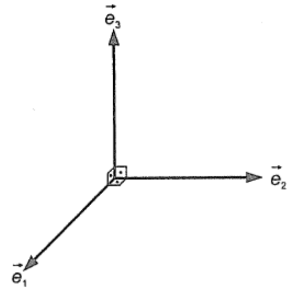


Figura 24: Base ortonormal.
Fonte: LIVRO 01, p.58.

Com a base ortonormal podemos aplicar o Teorema de Pitágoras e obter a norma de um vetor em função de suas coordenadas. Considerando a figura 25, se o vetor $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\alpha}\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{\beta}\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\gamma}\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{3}}$, está definido numa base ortonormal, então:

$$\|\vec{\boldsymbol{v}}\| = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\gamma}^{\mathbf{2}}}$$

Lembrando que esta fórmula só é válida se a base $\boldsymbol{E}$ for ortonormal.

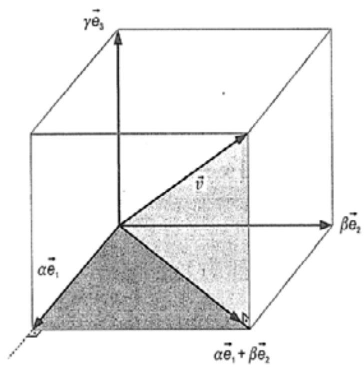


Figura 25: Representação do vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ na base ortonormal.
Fonte: LIVRO 01, p.59.

Ainda na figura 25, destacamos que o vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ pode ser obtido facilmente com a soma geométrica de cada vetor gerado pelo produto da coordenada e o respectivo versor da base.

O módulo ou norma de um vetor foi apresentado como uma aplicação do Teorema de Pitágoras nos espaços bi e tridimensional de maneira semelhante em todos os livros de Matemática (01 a 06), ressalva feita ao Livro 02, que a partir do plano e do espaço, vai um pouco além e generaliza a definição para um vetor n-dimensional, como se verifica no quadro 26.

DEFINIÇÃO 1 Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ for um vetor em R^n, então a ***norma*** de $\mathbf{v}$ (também denominada ***comprimento*** ou ***magnitude*** de $\mathbf{v}$) é denotada por $\|\mathbf{v}\|$ e definida pela fórmula

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2} \qquad (3)$$

Quadro 26: Módulo ou norma de um vetor qualquer.
Fonte: LIVRO 02, p.131.

Na representação do vetor por coordenadas há, ainda, um conceito importante apresentado pelos autores do Livro 01, enfatizado e bastante útil para os estudos da Estática, em problemas que envolvem decomposição de forças. Trata-se da projeção ortogonal de um vetor sobre a direção de outro.

A figura 26 mostra um caso particular em que $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ são vetores não nulos que formam um ângulo $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{C}$ é o pé da perpendicular passando por $\boldsymbol{B}$. O vetor $\vec{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OC}}$ é a projeção ortogonal de $\vec{\boldsymbol{v}}$ sobre a direção de $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$ a projeção de $\vec{\boldsymbol{v}}$ na direção ortogonal a $\vec{\boldsymbol{u}}$.

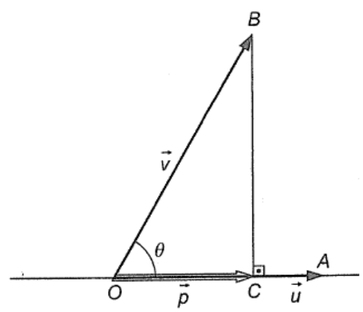


Figura 26: Projeção de um vetor $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$.
Fonte: LIVRO 01, p.82.

O quadro 27 estabelece as condições para a projeção ortogonal:

Definição	Seja $\vec{u}$ um vetor *não-nulo*. Dado $\vec{v}$ qualquer, o vetor $\vec{p}$ é chamado **projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$**, e indicado por $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$, se satisfaz as condições (a) $\vec{p} // \vec{u}$ (b) $(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}$

Quadro 27: Condições para projeção ortogonal.
Fonte: LIVRO 01, p.82.

Desta forma podemos reescrever o vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ como sendo a soma de suas projeções ortogonais, ou seja, $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{p}} + \vec{\boldsymbol{q}}$.

O vetor $\vec{p}$ é chamado projeção ortogonal de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$ e é indicado por $proj_{\vec{u}}\vec{v}$. A partir da definição os autores (Livro 01, 02, 05 e 06) deduzem a expressão para obter a projeção e sua norma, como mostrado abaixo:

$$\text{Projeção de } \vec{v} \text{ na direção de } \vec{u}\text{:} \vec{p} = proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{v}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$$

$$\text{Norma de } \vec{p}\text{:} \|proj_{\vec{u}}\vec{v}\| = \frac{|\vec{v}.\vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$$

Os autores dos livros 3 e 4 não abordam a projeção ortogonal a partir do conceito de produto escalar e norma como nos outros livros, apenas se utilizam das representações algébricas vetoriais e em coordenadas (RAV e RAC) para apresentar as componentes ou coordenadas de um vetor, como já exposto.

O quadro 28 do Livro 01, a seguir, ilustra o conceito de projeção ortogonal com um exercício resolvido, que pode ser encontrado de forma semelhante nos livros 02, 05 e 06. Aqui os autores fazem a conversão da representação RAV para RAC:

Exercício Resolvido

Dada a base ortonormal B = $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, sejam $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - 6\vec{j}$.

(a) Obtenha a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

(b) Determine $\vec{p}$ e $\vec{q}$ tais que $\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}$, sendo $\vec{p}$ paralelo e $\vec{q}$ ortogonal a $\vec{u}$.

Resolução

(a) Em relação a B, $\vec{u} = (2,-2,1)$ e $\vec{v} = (3,-6,0)$. Logo, $\|\vec{u}\|^2 = 2^2 + (-2)^2 + 1^2 = 9$ e $\vec{v}\cdot\vec{u} = 3\cdot 2 + (-6)(-2) + 0\cdot 1 = 18$; aplicando [9-11], obtemos:

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \frac{18}{9}(2,-2,1) = (4,-4,2)$$

(b) O vetor $\vec{p}$ é a projeção ortogonal calculada em (a), e $\vec{q}$ é a diferença $\vec{v} - \vec{p}$. Portanto,

$$\vec{q} = \vec{v} - \vec{p} = (3,-6,0) - (4,-4,2) = (-1,-2,-2)$$

Quadro 28: Exercício resolvido sobre projeção ortogonal.
Fonte: LIVRO 01, p.83.

A decomposição vetorial de uma força em suas projeções ortogonais é muito útil, como bem lembrado pelos autores no livro 01 e encontrada nos estudos da Estática, Física e tantas outras disciplinas da Engenharia que se valem de vetores para representar força ou outra grandeza vetorial qualquer. Em nosso ponto de vista, no entanto, a maneira apresentada para representar as projeções ortogonais que possibilita reescrever um vetor como a soma de suas projeções (componentes), ou seja, $\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}$ não é a mais encontrada ou a mais utilizada nas disciplinas da Engenharia.

A partir do conceito de produto escalar, os autores do livro 1 desenvolvem expressões para obter as projeções e suas normas, o que sem dúvida é uma abordagem bastante abrangente, mas não tão pragmática. A representação algébrica trigonométrica, que se vale da decomposição de vetores por meio das razões trigonométricas $\boldsymbol{seno\ e\ cosseno}$, e de larga aplicação na Engenharia conforme apresentamos no capítulo 01, não foi tratada em nenhum dos seis livros de Matemática selecionados para esta pesquisa. Em certas situações a representação algébrica trigonométrica simplifica a solução de um problema e se torna uma ferramenta muito útil para as áreas técnicas.

As projeções do vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ nos respectivos eixos coordenados $(\boldsymbol{O_x}, \boldsymbol{O_y}, \boldsymbol{O_z})$**,** que são relacionadas aos *cossenos diretores* são tratadas de forma superficial pelos autores no livro 01, e aparecem em apenas um exercício em que se deve mostrar algumas propriedades importantes, ficando inteiramente a cargo do leitor a aprendizagem desse conceito, conforme verificamos no exercício do quadro 29. No Livro 02, os cossenos diretores também não são propriamente tratados, apenas aparece o conceito de ângulo entre vetores a partir do produto escalar e das normas dos vetores, por meio da introdução de um problema de geometria, conforme quadro 30. Os Livros 03 e 04 também não tratam do conceito de cossenos diretores e, como nos Livros 01 e 02, abordam somente o conceito de ângulo entre vetores.

9-10 Sejam B = $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal, $\vec{u} = (x,y,z)_B \neq \vec{0}$, $\alpha = \text{ang}(\vec{u}, \vec{i})$, $\beta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{j})$ e $\gamma = \text{ang}(\vec{u}, \vec{k})$. Cada um dos números $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ chama-se **co-seno diretor de $\vec{u}$ relativamente a B**, e $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ chama-se **tripla de co-senos diretores de $\vec{u}$ relativamente a B**. Mostre que:

(a) $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\qquad \cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\qquad \cos\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(Aplique este resultado a $(1,-3,\sqrt{6})$ e a seu oposto.)

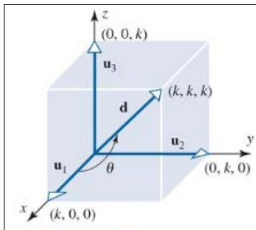
(b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

(c) Os co-senos diretores de $\vec{u}$ relativamente a B são as coordenadas do versor de $\vec{u}$ na base B.

(d) Se $(\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$ e $(\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2)$ são, respectivamente, as triplas de co-senos diretores de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ relativamente à base B e θ é a medida angular entre $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, então $\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$, ou seja, devido a (c), $\cos\theta$ é o produto escalar dos versores de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ (isso é também uma conseqüência imediata de [9-3]).

Quadro 29: Exercícios envolvendo o conceito de cossenos diretores.
Fonte: LIVRO 01, p.74.

Os conceitos de cossenos e ângulos diretores são tratados de forma semelhante nos Livros 05 e 06, e como exemplo, partimos da referência ao Livro 06, como mostrado no quadro 31. Nota-se nos quadros 30 e 31, ênfase em apresentar uma representação gráfica para os ângulos diretores, conforme observa-se no enunciado, e estabelecer ligação desta com a representação algébrica em coordenadas, o que em certa medida leva à conversão entre as representações.



▲ **Figura 3.2.6**

► **EXEMPLO 6** **Um problema de geometria resolvido com produto escalar**

Encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

Solução Seja k o comprimento de uma aresta e introduza um sistema de coordenadas retangulares conforme indicado na Figura 3.2.6. Denotando $\mathbf{u}_1 = (k, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, k, 0)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 0, k)$, então o vetor

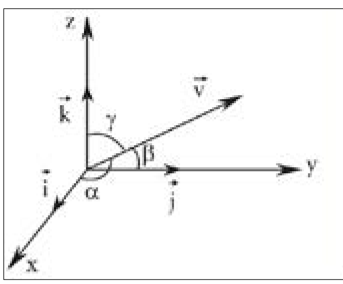
$$\mathbf{d} = (k, k, k) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

é a diagonal do cubo. Segue da Fórmula (13) que o ângulo θ entre $\mathbf{d}$ e a aresta $\mathbf{u}_1$ satisfaz

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{d}\|} = \frac{k^2}{(k)(\sqrt{3k^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Com a ajuda de uma calculadora, obtemos $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54{,}74°$ ◄

Quadro 30: Ângulo entre dois vetores.
Fonte: LIVRO 02, p.134.



$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(1,0,0)}{|\vec{v}|(1)} = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}||\vec{j}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,1,0)}{|\vec{v}|(1)} = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}||\vec{k}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,0,1)}{|\vec{v}|(1)} = \frac{z}{|\vec{v}|}$$

Quadro 31: Cossenos e Ângulos diretores.
Fonte: LIVRO 06, p.57.

A representação algébrica trigonométrica de um vetor é importantíssima, como constatamos em aulas ministradas em disciplinas da engenharia que se valem dessa representação, e deve ser de domínio dos estudantes. No Livro 01, Capítulo 19, o conceito de cosseno diretor volta a ser abordado, porém, com o objetivo de definir medidas angulares entre retas, entre planos e entre reta e plano, não sendo utilizada especificamente como representação para os vetores, em geral. No Livro 02, capítulo 6, *Espaços com Produto Interno*, os autores retomam o assunto sobre ângulo entre vetores e ortogonalidade, no entanto, estendendo o conceito a

Espaços Vetoriais, não sendo alvo de nossa investigação. No Livro 03, os autores voltam a falar de ângulo no capítulo 06, porém, voltado para reta e plano e não propriamente aos vetores e, no Livro 04 o assunto não é mais retomado. Os autores dos Livros 05 e 06 tratam do assunto como já descrito.

Nos capítulos iniciais do livro 01, são apresentados os registros de representação para vetores, em sua forma figural e simbólica (algébrica: combinação linear das n-uplas das coordenadas), no entanto, não foi observada nenhuma ênfase em fazer passagens de uma representação para outra, por exemplo, da representação geométrica para a representação algébrica vetorial ($\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ no plano *R²*) e vice-versa, em outras palavras e à luz da *Teoria dos Registros de Representações Semióticas*, uma transformação de conversão. As atividades (exercícios) exploraram bem os conceitos teóricos apresentados, dentro da mesma representação, considerando quase que exclusivamente operações de tratamento, porém, não tinham o objetivo específico da conversão.

Nos capítulos 1 e 2 dos Livros 03, 04, 05 e 06 e no Livro 02, a partir do capítulo 03, são apresentados os conceitos iniciais sobre vetores nos registros figural, gráfico e simbólico. A representação geométrica (RGE) é a primeira a ser utilizada para introduzir a noção de vetor, em seguida, os autores passam para a representação gráfica (RGR), a partir da qual constroem as representações algébricas em coordenadas (RAC) e vetorial (RAV), num processo que pode ser considerado uma operação semiótica de conversão, embora, somente no sentido aqui descrito e que podemos verificar pela figura 27, extraída do Livro 04, que de modo geral representa os demais livros de 02 a 06. Os exercícios exploram bem os conteúdos desenvolvidos, no entanto, não exigem do estudante a transformação de conversão entre as representações de registros distintos, ficando em sua maior parte em transformações de tratamento.

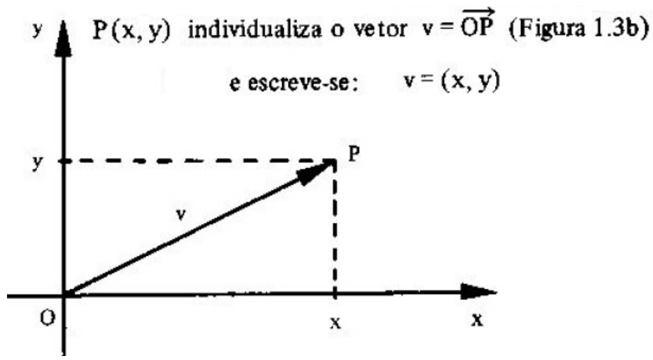


Figura 27: Transição da representação gráfica para algébrica em coordenadas.
Fonte: LIVRO 04, p.5.

Outra forma particular de representação algébrica é a que envolve uma base ortonormal especial, dita canônica e é abordada nos Livros de Matemática aqui estudados. Cabe uma pequena ressalva ao Livro 01 que traz o resultado teórico sobre esse assunto no Capítulo 9, Produto escalar, (veja Livro 01, Observação 9.15, p.86) por meio da descrição do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt. É interessante notar que, antes da abordagem da base canônica $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$ para três dimensões, alguns exercícios já exploram essa notação para base ortonormal, como o exercício 9.10 já mencionado no quadro 29 e o exercício 9.56 mostrado no quadro 32, entre outros. Os autores dos demais livros (02 a 06) consideram a base canônica $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}\}$ para o plano e para o espaço tridimensional a base $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$, a partir das quais são geradas as representações algébricas vetoriais ou em coordenadas.

9-56

(a) Mostre que, se $\vec{u}$ é unitário, então $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{u}$.

(b) Seja B = $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal. Mostre que todo vetor $\vec{u}$ é a soma de suas projeções ortogonais sobre $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. Isto está ilustrado na Figura 9-8.

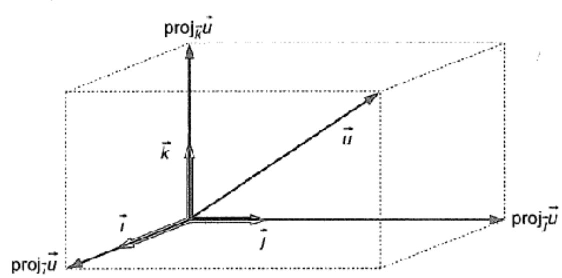


Figura 9-8

Quadro 32: Exercício proposto envolvendo a base $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$.
Fonte: LIVRO 01, p.84.

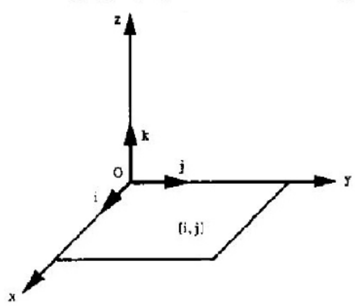
Nos Livros 03 e 04 os autores tratam desse assunto em dois momentos, o primeiro com a abordagem dos subespaços vetoriais gerados e aí usando a notação da base $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$ e, num segundo momento, quando descrevem a base vetorial, e neste caso não relacionando de forma direta a notação da base canônica $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$ com sua representação $\vec{\boldsymbol{\imath}} = (1, 0, 0)$, $\vec{\boldsymbol{\jmath}} = (0, 1, 0)$ e $\vec{\boldsymbol{k}} = (0, 0, 1)$, conforme verificamos pelo quadro 33.

2) Os vetores $i = (1, 0, 0)$ e $j = (0, 1, 0)$ do $\mathbb{R}^3$ geram o subespaço

$S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\}$ pois: $(x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0)$

Então:

$[i, j] = S$ é um subespaço próprio do $\mathbb{R}^3$ e representa, geometricamente o plano xOy.



(pp.45-46)

3) Consideremos os vetores $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$. No exemplo 3 de 2.7.i deixamos claro que o conjunto $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é LI em $\mathbb{R}^n$. Tendo em vista que todo vetor $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como combinação linear de $e_1, e_2, \ldots, e_n$, isto é:

$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$

conclui-se que B gera o $\mathbb{R}^n$. Portanto, B é uma base de $\mathbb{R}^n$. Essa base é conhecida como *base canônica* do $\mathbb{R}^n$. **(p.68)**

Quadro 33: Representação algébrica - Base canônica.
Fonte: LIVRO 04, pp.45-46 e 68.

Os vetores unitários canônicos

Quando introduzimos um sistema de coordenadas retangulares em R^2 ou R^3, dizemos que os vetores unitários nas direções positivas dos eixos coordenados são os ***vetores unitários canônicos***. Em R^2, esses vetores são denotados por

$$\mathbf{i} = (1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{j} = (0, 1)$$

e, em R^3, são denotados por

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

(Figura 3.2.2). Cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ em R^2 e cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ em R^3 pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores unitários canônicos, escrevendo

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = v_1(1, 0) + v_2(0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} \tag{5}$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} \tag{6}$$

Além disso, podemos generalizar essas fórmulas para R^n definindo os ***vetores unitários canônicos em*** $\boldsymbol{R^n}$

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1) \tag{7}$$

caso em que cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em R^n pode ser expresso como

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n \tag{8}$$

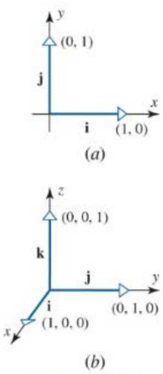


Figura 3.2.2

Quadro 34: Representação de vetor com a base canônica.
Fonte: LIVRO 02, p.132.

O conteúdo do quadro 34 tem origem no Livro 02, no entanto, pode representar os Livros 05 e 06, que abordam o conceito de base canônica de maneira muito semelhante, excetuando-se a pequena diferença na notação (Livros 05 e 06: $(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ e Livro 02: $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$) e o fato de que no Livro 02 a base canônica é definida de forma mais concisa: inicia por um sistema de coordenadas bi e tridimensional e, rapidamente, generaliza para um sistema de coordenadas n-dimensional. Nos outros dois livros (05 e 06), diferentemente da concisão do Livro 02, os estudos no plano e no espaço são tratados em momentos distintos, de forma mais detalhada, ou seja, todo conteúdo teórico relativo ao plano é desenvolvido, com exercícios resolvidos e propostos e, depois disso explana-se o conteúdo teórico relativo ao espaço.

Os autores dos Livros 02 a 06 apresentam os vetores unitários canônicos em sua representação gráfica, a partir da qual, posteriormente, exibem um vetor em sua representação algébrica em coordenadas e por fim, em sua representação algébrica vetorial, caracterizando conversão entre essas representações, como podemos observar no quadro 34.

Os autores do Livro 02 apresentam alguns exemplos de aplicação de vetores em áreas como Economia, Transporte e armazenamento, Circuitos elétricos, Sistemas mecânicos entre outros, que é algo quase inexistente nos outros livros selecionados e que a nosso ver, é bastante estimulante para o estudante. Outro aspecto muito interessante desse livro é o fato dos autores introduzirem pequenas notas históricas sobre matemáticos e outros cientistas que de alguma forma estão relacionados com o tema abordado naquele momento com bastante frequência.

5.2.1.1 Operações com vetores (adição e multiplicação por um escalar) nos livros de Matemática

A adição de vetores, figura 28, no registro figural, é definida pelos autores do Livro 01, quadro 35, como sendo:

> Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sejam (A,B) um representante qualquer de $\vec{u}$ e (B,C) o representante de $\vec{v}$ que tem origem B (Figura 2-1). O vetor soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$, indicado por $\vec{u}+\vec{v}$, é o vetor que tem (A,C) por representante: $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

Quadro 35: Operação de adição.
Fonte: LIVRO 01, p.8.

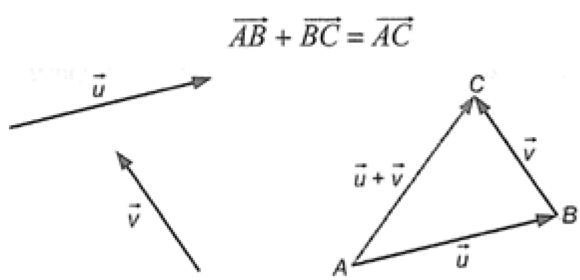


Figura 28: Soma de vetores usando representação geométrica.
Fonte: LIVRO 01, p.8.

Para a adição de dois vetores $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ não paralelos, os autores se valem de duas "regras", ou seja, a regra do triângulo ou a regra do paralelogramo, ambas baseadas na representação geométrica. A regra do triângulo é exatamente o que vemos na figura 28, na qual se escolhe um representante do vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ com origem na extremidade do representante do vetor $\vec{\boldsymbol{u}}$, em seguida fecha-se o triângulo $\boldsymbol{ABC}$ obtendo-se o vetor soma $\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}=\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$.

Para a regra do paralelogramo, figura 29, escolhe-se uma origem comum para os dois representantes dos vetores $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ e, construindo o paralelogramo $\boldsymbol{ABCD}$, a diagonal $\overline{\boldsymbol{AC}}$ que "fecha" o triângulo $\boldsymbol{ABC}$ é um representante do vetor soma

$\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$. Podemos notar que a regra do triângulo é um caso particular da regra do paralelogramo.

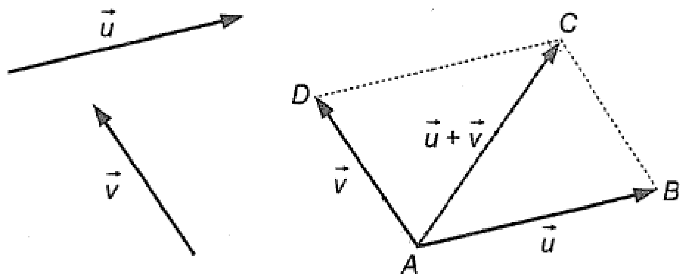


Figura 29: Soma de dois vetores pela regra do paralelogramo.
Fonte: LIVRO 01, p.9.

A diferença $\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}}$ é definida como a soma $\vec{\boldsymbol{u}} + (-\vec{\boldsymbol{v}})$, sendo $(-\vec{\boldsymbol{v}})$ o vetor oposto de $\vec{\boldsymbol{v}}$, dado pela multiplicação do escalar (-1) pelo vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$. No paralelogramo $\boldsymbol{ABCD}$ a diagonal $\overline{\boldsymbol{DB}}$ está associada à diferença $\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}}$, conforme figura 30.

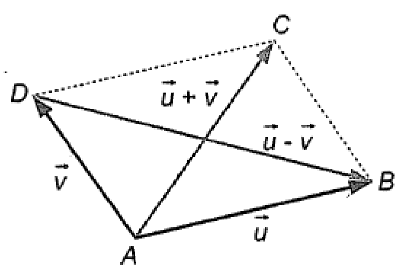
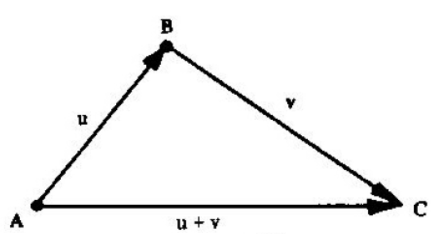


Figura 30: Diagonal $\overline{\boldsymbol{DB}}$ representando a diferença $\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}}$.
Fonte: LIVRO 01, p.11.

1.2.1 Adição de Vetores

Sejam os vetores u e v representados pelos segmentos orientados AB e BC, respectivamente (Figura 1.2a).

Figura 1.2a



Os pontos A e C determinam o vetor soma $\overrightarrow{AC}$ = u + v.

Quadro 36: Soma geométrica de dois vetores – Regra do triângulo – (Livros 03, 04 e 05).
Fonte: LIVRO 04, p.03.

O Livro 02 também apresenta as mesmas duas regras para a operação de adição vetorial: a regra do triângulo e a regra do paralelogramo. Os exemplos utilizados para encontrar a soma de vetores em sua representação geométrica são praticamente idênticos e, portanto, apresentamos apenas os exemplos do Livro 01, que valem para os demais livros. Os Livros 01 e 02 são os únicos que evidenciam a regra do triângulo para a adição vetorial. Os Livros 03, 04 e 05 apresentam a adição vetorial por meio do triângulo, porém, não mencionam como regra do triângulo, nem essa como uma particularidade da regra do paralelogramo, e não detalham o processo geométrico de soma, o que podemos verificar com o auxílio do quadro 36, que traz um exemplo comum a esses 3 livros. Ao contrário, o Livro 06 apresenta e detalha o processo de soma por meio do triângulo, porém, não faz referência à regra do triângulo, veja quadro 37.

Adição de vetores

Consideremos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, cuja soma $\vec{u} + \vec{v}$ pretendemos encontrar. Tomemos um ponto A qualquer (Figura 1.14) e, com origem nele, tracemos um segmento orientado AB representante do vetor $\vec{u}$. Utilizemos a extremidade B para traçar o segmento orientado BC representante de $\vec{v}$. O vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C é, por definição, o vetor *soma* de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja,

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

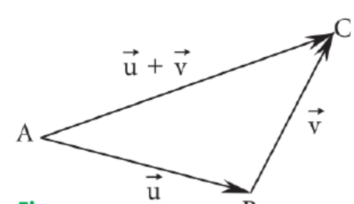


Figura 1.14

Quadro 37: Soma geométrica de dois vetores – Regra do triângulo.
Fonte: LIVRO 06, pp.6-7.

No quadro 38, o autor do Livro 01 propõe o exercício 2.9 que explora bem o conceito de vetor em sua representação geométrica e as regras da soma geométrica de vetores, exigindo um bom entendimento por parte do estudante. Nesse exercício os vetores são mostrados na representação geométrica (RGE) e para a solução se mantém o mesmo registro de representação (figural) e não é necessária mudança do registro de representação, portanto, temos um tratamento.

2-9 Obtenha a soma dos vetores indicados em cada caso da Figura 2-9.

(a) *ABCDEFGH* é um paralelepípedo.

(b) *ABCDEFGH* e *EFGHIJLM* são cubos de arestas congruentes.

(c) O cubo *ABCDEFGH* tem centro *O* e está dividido em oito cubos congruentes por planos paralelos às faces.

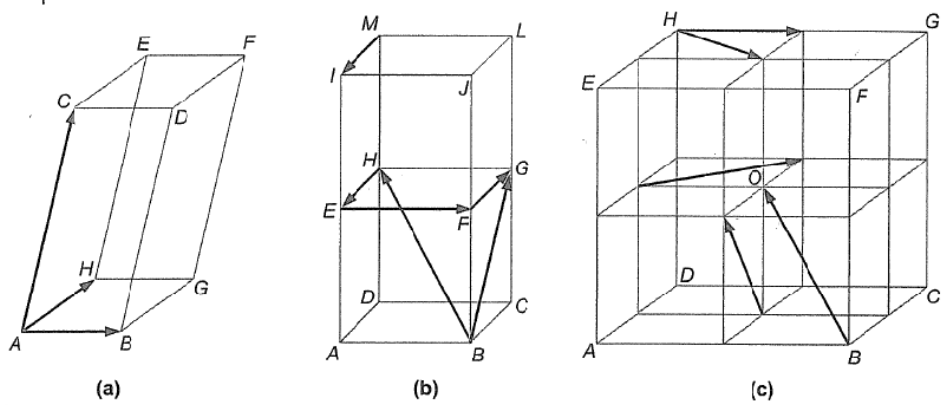


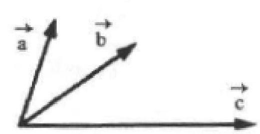
Figura 2-9

Quadro 38: Exercícios sobre soma geométrica de vetores.
Fonte: LIVRO 01, p.14.

Os quadros 39 e 40 trazem exemplos de exercícios propostos nos livros 05 e 06, respectivamente, nos quais é explorada a soma geométrica de vetores. Para a solução do exercício 2, do Livro 05, é necessário transitar da representação algébrica vetorial para a representação geométrica, ou seja, temos transformações de conversões. O exercício 4, Livro 06, mostrado no quadro 40, também deve ser resolvido partindo da representação algébrica vetorial para a representação geométrica, caracterizando uma conversão. Para a solução desses exercícios o aluno tem de ter a capacidade de interpretar os dados algébricos e, a partir daí, aplicar os procedimentos geométricos.

2) Dados os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, como na figura, apresentar um representante de cada um dos vetores:

a) $4\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$
b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
c) $2\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})$



Quadro 39: Soma e diferença geométricas com vetores.
Fonte: LIVRO 05, p.14.

4. O paralelogramo ABCD (Figura 1.30) é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sendo M e N pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente. Determinar:

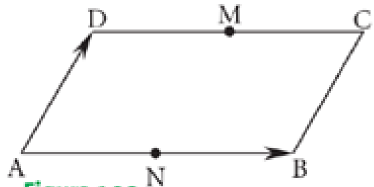


Figura 1.30

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$

c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$

f) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

Quadro 40: Exercícios envolvendo soma geométrica de vetores.
Fonte: Livro 06, p.14.

O autor do Livro 02 não apresenta nenhum exercício resolvido sobre soma vetorial utilizando a representação geométrica (RGE) como forma de ilustrar o processo, apenas desenvolve a teoria. Dos 37 exercícios propostos encontramos apenas um que se vale da representação geométrica para encontrar a soma, com predominância de exercícios que utilizam a representação algébrica em coordenadas (RAC) para efetuar as operações solicitadas.

Os Livros 03 e 04 não apresentam nenhum exercício resolvido para exemplificar o processo de soma geométrica, nem apresentam exercícios para a prática da teoria. O estudante e o professor não dispõem desses recursos e devem buscar exercícios em outras fontes, se assim o quiserem. A ausência de exercícios resolvidos e até mesmo de uma lista proposta, não dá ao estudante, a oportunidade de pôr em prática o que aprendeu na teoria, nem a prática com operações semióticas de tratamento, muito menos com as operações de conversão consideradas essenciais ao processo de aprendizagem.

O procedimento relativo à operação de adição com vetores descritos por coordenadas pode facilmente ser verificado e executado e conduz à seguinte generalização descrita no Livro 01 e que, no entanto, não faz a transição da representação geométrica (RGE) para a representação algébrica em coordenadas (RAC):

Dadas as coordenadas dos vetores $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})\ e\ \vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3})$, as coordenadas do vetor soma $\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{u}}$ são obtidas da seguinte forma:

$$\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{a_3} + \boldsymbol{b_3})$$

Vejamos o exemplo do quadro 41, no qual temos a operação de multiplicação de escalar por vetor (aqui não explicitado, porém, tratado no Capítulo 3 do Livro 01 e também, nos demais livros) e a operação de adição para vetores com representação algébrica em coordenadas, anteriormente apontado.

Exercício Resolvido Sendo $\vec{u} = (-1,2,0)_E$ e $\vec{v} = (3,-3,4)_E$, calcule a tripla de coordenadas de $\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$ na base E.

Resolução

$$\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v} = -3(-1,2,0)_E + 2(3,-3,4)_E = (3,-6,0)_E + (6,-6,8)_E = (9,-12,8)_E$$

Quadro 41: Operações com a representação algébrica em coordenadas.
Fonte: LIVRO 01, p.54.

No exemplo numérico do quadro 41 fica bastante clara a transformação de tratamento, uma vez que toda operação acontece com a representação algébrica em coordenadas, na qual, em primeiro lugar executa-se a operação de multiplicação dos vetores pelos respectivos escalares e, posteriormente, realizam-se as somas das respectivas coordenadas, obtendo o resultado em cada eixo.

Nosso próximo objetivo é definir as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar para vetores em R^n. Para motivar essas ideias, consideramos como essas operações podem ser efetuadas com componentes usando vetores em R^2. Observando a Figura 3.1.13, é possível deduzir que se $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \qquad (6)$$

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2) \qquad (7)$$

Em particular, segue de (7) que

$$-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} = (-v_1, -v_2) \qquad (8)$$

e, portanto, que

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v}) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2) \qquad (9)$$

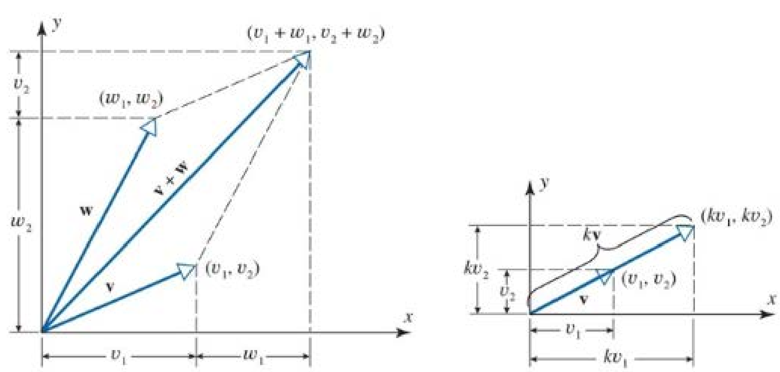


Figura 3.1.13

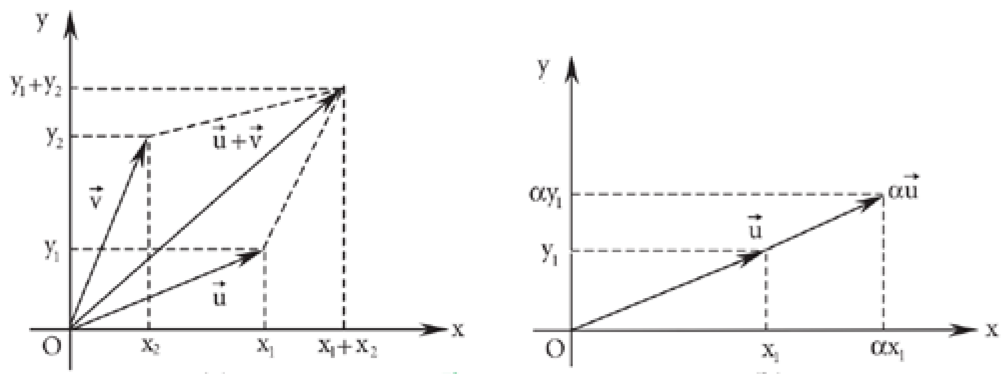
Quadro 42: Adição e subtração por meio das componentes escalares.
Fonte: LIVRO 02, p.125.

No quadro 42, verificamos a abordagem dada pelo autor do Livro 02 para o processo de soma vetorial levando em conta as chamadas componentes escalares do vetor. A partir da representação gráfica da soma de dois vetores, o autor deduz a operação de soma algébrica usando as componentes dos vetores em suas representações algébricas em coordenadas. Esse é o exemplo no qual uma transformação de conversão ocorre, partindo da representação gráfica para a representação algébrica em coordenadas.

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:

1) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ 2) $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

Portanto, para somar dois vetores, somam-se as correspondentes coordenadas, e para multiplicar um número real por um vetor, multiplica-se cada componente do vetor por este número. As Figuras 1.43(a) e 1.43(b) ilustram as definições das operações dadas anteriormente.



(a) **Figura 1.43** (b)

Quadro 43: Adição e subtração por meio das componentes escalares.
Fonte: LIVRO 06, p.20.

Podemos verificar a abordagem dada no Livro 06, no quadro 43, e perceber que se trata de algo bastante semelhante ao apresentado pelo autor do Livro 02, que também se vale, como partida, da representação gráfica (RGR) para chegar a definição de soma na representação algébrica em coordenadas (RAC). Os livros 03, 04 e 05 apresentam exatamente o mesmo exemplo, e por isso não são mostrados.

Os exemplos de operações de adição de vetores considerados no Livro 01 restringem-se basicamente às transformações de tratamento, pois ficam dentro do mesmo sistema semiótico, ou no registro figural ou no registro simbólico.

Uma das maneiras de definirmos um vetor é por meio da especificação de seu módulo (norma) e de seu ângulo em relação a uma semirreta fixada, completada com a trigonometria básica do triângulo retângulo; essa é uma representação bastante utilizada na Estática, por exemplo, para representar forças. Esta representação é de grande utilidade. A quase inexistência dessa representação, seja no conteúdo teórico, seja no conteúdo das atividades nos livros de Matemática denota a baixa importância dada a ela pelos autores, especificamente nos livros de 01 a 06 selecionados para esta pesquisa. Pensamos que, de modo geral, a ausência desta forma de representação pode provocar uma desconexão com os conteúdos de relevância nas áreas técnico-científicas, como observaremos nos textos seguintes, quando tratarmos dos livros didáticos das disciplinas técnicas da Engenharia.

5.2.2 Análise dos exercícios propostos nos livros de Matemática

O objetivo desta etapa é o de estabelecer uma visão geral quanto aos registros de representações utilizados e as operações semióticas explicitas ou implícitas nos exercícios propostos nos livros didáticos selecionados (01 a 06).

Por exemplo, no exercício 1.1 (LIVRO 01, p.3) "*Mostre que, se $A \neq B$ então (A,B) e (B,A) são de mesmo comprimento, mesma direção e sentido contrário*". Identificamos nesse caso uma proposta de operação semiótica de tratamento em RLN, pois está em acordo com o quadro anteriormente estabelecido, tratando-se de um registro em língua natural, com representação em linguagem específica matemática. Em princípio, todo enunciado traz a representação em língua natural, no entanto, consideraremos o enunciado em RLN quando este for única e exclusivamente concebido neste tipo de representação, não havendo outra identificada, como por exemplo, o exercício 2.12 (LIVRO 01, p.15) "*Calcule a soma dos seis vetores que têm por representantes segmentos orientados com origem em cada um dos vértices, e extremidade no centro de um mesmo hexágono regular.* ", no qual identificamos apenas a representação em língua natural (RLN).

A seguir, passamos a quantificar as representações encontradas nas séries de exercícios propostos nos capítulos selecionados dos livros didáticos da Matemática, identificando e quantificando os tipos de representações, e os tipos de operações semióticas implícitas ou explicitas. Ao final de cada livro didático, neste subcapítulo, faremos uma compilação dos resultados analisados e ao término dos seis livros, uma compilação geral de todos os resultados.

5.2.2.1 Análise dos exercícios propostos no Livro 01

No Livro 01, verificamos os exercícios relativos aos capítulos 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 e 11. A escolha desses capítulos segue alguns critérios: procura identificar a presença de definições e propriedades gerais, operações de adição e subtração e ângulo entre vetores, que são tópicos mais comumente utilizados nas disciplinas de Física e nas técnico-científicas da Engenharia e que constituem ferramentas vetoriais essenciais. Tais critérios estão estabelecidos para o Livro 01 e também são válidos para os demais livros de Matemática aqui selecionados.

O *capítulo 1* desse livro, intitulado *Vetor*, no qual é introduzido o conceito geométrico de vetor, contém 11 exercícios propostos, a maioria (nove exercícios) envolvendo algum tipo de prova relacionada com as definições ou propriedades dos vetores. Identificamos que todos os enunciados dos exercícios estão em RLN, com linguagem específica matemática, sendo que dez desses exercícios dão encaminhamento às resoluções de forma discursiva, seguindo o exemplo apresentado pelo autor e permanecendo no interior do mesmo registro, caracterizando uma operação de tratamento, que podemos confirmar com o exemplo do quadro 44. Apenas o exercício 1.3a, p.4, pede claramente que se faça uma ilustração geométrica para representar uma proposição algébrica, caracterizando uma conversão de RLN para RGE, conforme observamos no quadro 45.

EXERCÍCIO **1-5** Prove que:

(a) $-(-\vec{u}) = \vec{u}$ (b) $\vec{u} = -\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Quadro 44: Enunciado e resolução em RLN.
Fonte: LIVRO 01, p.6.

EXERCÍCIO 1-3 (a) Faça um desenho ilustrando a proposição anterior no caso em que A, B, C e D são colineares.
(b) Prove que $(A,B) \sim (C,D) \Rightarrow (B,A) \sim (D,C)$. (c) Prove que $(A,B) \sim (C,D) \Rightarrow (C,A) \sim (D,B)$.

Quadro 45: Enunciado do item 1.3a em RLN com conversão para RGE.
Fonte: LIVRO 01, p.4.

No *capítulo 02, Soma de vetores*, encontramos 14 exercícios propostos, sendo que em sete deles há solicitação de algum tipo de prova e estão assim distribuídos: oito em RLN (do exercício 2.8, somente itens a e b) e sete em RGE (do exercício 2.8, somente item c). O exemplo a seguir, quadro 46, mostra um exercício em cujo enunciado estão presentes os seguintes registros, RLN e RGE, no entanto, consideraremos este exercício com representação RGE. Para a solução temos como representação de partida a RGE e a de chegada RLN, portanto, temos uma operação semiótica de conversão.

2-7 No Exercício Resolvido 2-7, exprima $\overrightarrow{HB}$ e $\overrightarrow{DF}$ em função de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

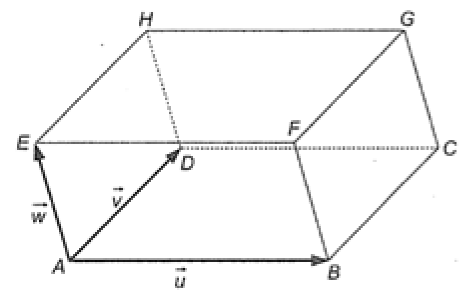


Figura 2-7

Quadro 46: Exercício proposto 2-7.
Fonte: Livro 01, p.13.

No *capítulo 3, Produto de número real por vetor*, encontramos 18 exercícios propostos, cujos enunciados possuem as seguintes representações: 18 RLN e 4 RGE. Do total de exercícios nove são relativos a algum tipo de prova. O quadro 47 mostra o enunciado em RLN e RGE com solução em RGE e, portanto, conversão.

3-3 Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representados na Figura 3-2, represente $\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} + 5\vec{w}/4$ por uma flecha de origem O.

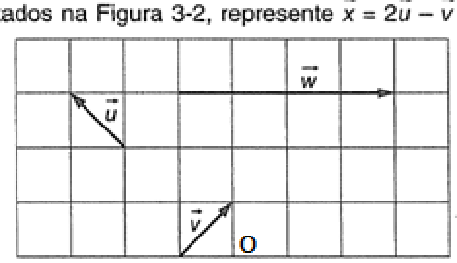


Figura 3-2

Quadro 47: Enunciado em RLN e RGE. Conversão de RLN para RGE.
Fonte: LIVRO 01, p.17.

No *capítulo 4*, que trata da *Soma de ponto com vetor*, encontramos 13 exercícios propostos, dentre os quais 8 envolvem prova e todos os enunciados trazem somente a representação RLN, ficando as resoluções restritas à forma discursiva.

No *capítulo 5, Aplicações geométricas*, encontramos 24 exercícios propostos, dos quais 12 tratam de provas e as representações identificadas nos enunciados estão assim distribuídas: 15 RLN e 10 RGE.

No *capítulo 7, Base*, encontramos 21 exercícios propostos, com apenas três envolvendo prova e os enunciados contêm as seguintes representações: 3 RLN, 13 RAC, 4 RAV e 1 RGE. O quadro 48 mostra um exercício com as representações RAC e RAV. Para o cálculo do módulo não é preciso mudar de registro de representação, portanto, temos uma operação semiótica de tratamento.

EXERCÍCIOS

7-20 Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal. Calcule $\|\vec{u}\|$, nos casos:

(a) $\vec{u} = (1,1,1)_E$ (b) $\vec{u} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

(c) $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3$ (d) $\vec{u} = -4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$

Quadro 48: Enunciado de exercício que contém as representações RAC e RAV.
Fonte: LIVRO 01, p.60.

No *capítulo 9, Produto escalar*, encontramos 70 exercícios propostos (dois relativos a matrizes e não considerados para este trabalho). Desse total temos 23 exercícios que demandam algum tipo de prova e nos enunciados estão presentes 40 RLN, 20RAC, 10 RGE e 1RGR.

No *capítulo 11, Produto vetorial*, foram encontrados 53 exercícios propostos, com 23 envolvendo prova cujos enunciados contêm as seguintes representações: 3 RGE, 6 RAV, 17 RAC e 29 RLN.

O quadro a seguir, resume quantitativamente os tipos de representações e as operações semióticas presentes nos capítulos selecionados. As operações semióticas de tratamento serão abreviadas por TR e as de conversão por CV.

Capítulo	**Exercícios propostos**	**Representações nos enunciados**	**Operações Semióticas**	**Sentido da conversão**
1. Vetor	11	11 RLN	10 TR e 1 CV	1 RLN para RGE
2. Soma de vetores	14	8 RLN e 7 RGE	10 TR e 4 CV	4 RGE para RLN

3. Produto de número real por vetor	18	18 RLN e 4 RGE	14 TR e 4 CV	3 RLN para RGE
4. Soma de ponto com vetor	13	13 RLN	13 TR	Não aplicável
5. Aplicações geométricas	24	15RLN e 10 RGE	12 TR e 12 CV	7 RGE para RLN e 5 RLN para RGE
7. Base	21	3 RLN, 13 RAC, 4 RAV e 1 RGE	19 TR e 2 CV	1 RGE para RLN e 1 RAV para RGE
9. Produto escalar	70	39 RLN, 18 RAC, 10 RGE, 3 RAV e 1 RGR	68 TR e 2 CV	2 RGE para RLN
11. Produto vetorial	53	29 RLN, 17 RAC, 6 RAV, 3 RGE	47 TR e 6 CV	4 RGE para RLN e 2 RLN para RGE
Total	224	136 RLN, 35 RGE, 48 RAC, 13 RAV e 1 RGR	193 TR e 31 CV	1 RAV para RGE 11 RLN para RGE 18 RGE para RLN

Quadro 49: Representações nos exercícios propostos do Livro 01 e operações semióticas.
Fonte: Acervo pessoal.

A partir da análise dos exercícios propostos, observamos um grande número de exercícios envolvendo provas matemáticas, ou seja, de um total de 224 exercícios propostos 94 tratam de provas, evidenciando ênfase com o rigor matemático. Dentre os exercícios, não identificamos aplicações fora do campo propriamente matemático. Há predominância de operações semióticas de tratamento, totalizando 193, e 31 operações de conversão, o que denota uma estrutura de exercícios que não atende plenamente o que é sugerido na teoria de Duval (2006, 2011a, 2011b), que enfatiza a importância da mudança de registro de representação como sendo uma das condições de aprendizagem.

5.2.2.2 Análise dos exercícios propostos no Livro 02

No Livro 02, as definições, propriedades e operações vetoriais de nosso interesse e já mencionadas, encontram-se no *capítulo 03*, intitulado *“Espaços Vetoriais Euclidianos”*. Nesse capítulo encontramos as definições geométrica e algébrica para os vetores, as operações de adição, subtração, produto escalar e as definições de norma e ortogonalidade. No capítulo 03, nos detivemos aos subcapítulos 3.1, 3.2 e 3.3 de acordo com os critérios já explicitados anteriormente.

No subcapítulo 3.1, Vetores bi, tri e n-dimensionais, encontramos um total de 38 exercícios propostos, dos quais cinco se referem a algum tipo de prova. Os enunciados apresentam as seguintes representações: 1 RGR, 8 RLN e 29 RAC. Nesse subcapítulo, temos as definições geométrica e algébrica de vetor e suas operações de adição e subtração. No entanto, nota-se na lista de exercícios propostos, a predominância dos registros de representação algébrica e das operações de tratamento. O quadro 50 apresenta exercícios com enunciados em RAC que precisam ser resolvidos em RGR, portanto, caracterizando uma operação semiótica de conversão.

► Nos Exercícios **3–4**, em cada parte esboce o vetor dado com ponto inicial na origem. ◄

3. (a) $\mathbf{v}_1 = (3, 6)$ (b) $\mathbf{v}_2 = (-4, -8)$
(c) $\mathbf{v}_3 = (-4, -3)$ (d) $\mathbf{v}_4 = (3, 4, 5)$
(e) $\mathbf{v}_5 = (3, 3, 0)$ (f) $\mathbf{v}_6 = (-1, 0, 2)$

4. (a) $\mathbf{v}_1 = (5, -4)$ (b) $\mathbf{v}_2 = (3, 0)$
(c) $\mathbf{v}_3 = (0, -7)$ (d) $\mathbf{v}_4 = (0, 0, -3)$
(e) $\mathbf{v}_5 = (0, 4, -1)$ (f) $\mathbf{v}_6 = (2, 2, 2)$

Quadro 50: Enunciados em RAC para serem resolvidos em RGR.
Fonte: LIVRO 02, p.129.

No subcapítulo 3.2, Norma, produto escalar e distância em R^n, foram encontrados 35 exercícios propostos, com quatro exercícios envolvendo algum tipo de prova. As representações presentes nos enunciados estão assim distribuídas: 1 RGR, 14 RLN e 20 RAC. Novamente há predominância de operações de tratamento.

Podemos observar no quadro 51 um exercício com enunciado em RLN, que pode ter como etapa intermediária de resolução a transformação de sua representação para RGR e, em seguida para RAC com posterior resolução algébrica para a obtenção do resultado solicitado.

15. Suponha que um vetor **a** do plano *xy* tenha um comprimento de 9 unidades e aponte na direção que faz um ângulo de 120° no sentido anti-horário a partir do eixo *x* positivo e que um vetor **b** daquele plano tenha um comprimento de 5 unidades e aponte na direção e sentido do eixo *y* positivo. Encontre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Quadro 51: Enunciado de exercício em RLN, com etapa de resolução em RGR e RAC.
Fonte: LIVRO 02, p.142.

No subcapítulo 3.3, Ortogonalidade, encontramos 25 exercícios propostos (veja observação do quadro seguinte), que tratavam dos assuntos: vetores ortogonais, projeção ortogonal e teorema de Pitágoras. Desse total de exercícios, quatro envolviam algum tipo de prova. Os enunciados continham as seguintes representações: 2 RGR, 5 RLN e 18 RAC com predominância de operações de tratamento.

Ao final do capítulo 03, o autor apresenta uma lista de exercícios suplementares com 14 exercícios propostos (veja observação do quadro seguinte), com apenas um envolvendo algum tipo de prova. Nos enunciados encontramos as seguintes representações: 1 RAV, 3 RLN e 10 RAC com predomínio das representações algébricas e somente operações de tratamento. O quadro 52 traz um exercício com enunciado em RAV como exemplo e, o exercício trata de operações de adição e subtração desses vetores, portanto, permanecendo no mesmo registro, o que denota apenas um tratamento.

2. Repita o Exercício 1 com os vetores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = -\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Quadro 52: Enunciado de exercício em RAV.
Fonte: LIVRO 02, p.170.

O exercício 13 mostrado no quadro 53 apresenta em seu enunciado vetores em representação RAC. Para a solução desse exercício não é necessário mudar de registro de representação, portanto, consideramos que se refere a uma operação de tratamento.

13. Sejam $\mathbf{u} = (4, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 5)$ e $\mathbf{w} = (-3, -3)$. Encontre os componentes de

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{v} - 3\mathbf{u}$

(c) $2(\mathbf{u} - 5\mathbf{w})$ (d) $3\mathbf{v} - 2(\mathbf{u} + 2\mathbf{w})$

(e) $-3(\mathbf{w} - 2\mathbf{u} + \mathbf{v})$ (f) $(-2\mathbf{u} - \mathbf{v}) - 5(\mathbf{v} + 3\mathbf{w})$

Quadro 53: Representação de vetores em RAC no exercício 13.
Fonte: LIVRO 02, p.129.

O quadro a seguir, resume quantitativamente as representações e operações semióticas encontradas nos exercícios propostos.

Capítulo/subcapítulo	Exercícios propostos	Representações nos enunciados	Operações Semióticas	Sentido da conversão
3.1 Vetores bi, tri e n-dimensionais	38	1 RGR, 8 RLN, 29 RAC	27 TR e 11 CV	6 RAC para RGR 4 RLN para RAC 1 RLN para RGR
3.2 Norma, produto escalar e distância em R^n	35	1 RGR, 14 RLN, 20 RAC	32 TR e 3 CV	2 RLN para RGR 1 RGR para RLN
3.3 Ortogonalidade*	25	2 RGR, 5 RLN, 18 RAC	23 TR e 2 CV	2 RGR para RLN
3 Exercícios suplementares**	14	1 RAV, 3 RLN, 10 RAC	14 TR	Não aplicável
Total	112	4 RGR, 30 RLN, 77 RAC, 1 RAV	96 TR e 16 CV	6 RAC para RGR 4 RLN para RAC 3 RLN para RGR 3 RGR para RLN

Quadro 54: Representações nos exercícios propostos do Livro 02 e operações semióticas.
Fonte: Acervo pessoal.

No quadro 54 temos duas observações, a primeira identificada com (*), refere-se ao subcapítulo 3.3, Ortogonalidade, no qual, de 47 exercícios, alguns exercícios não foram analisados, pois não pertencem aos temas abordados nessa pesquisa: exercícios 9-12 equação ponto-normal, 13-16 paralelismo entre planos, 17-18 perpendicularismo entre planos, 29-32 distância entre ponto e reta, 33-36 distância entre ponto e plano, 37-40 distância entre planos. A segunda observação identificada com (**), refere-se aos exercícios suplementares, capítulo 03 do Livro 02, no qual temos um total de 29 exercícios, no entanto, desconsideramos 15 exercícios por se relacionarem com sistemas lineares e produto vetorial, que não foram considerados em nossa abordagem.

Partindo dos resultados gerais apontados no quadro 54, encontramos e avaliamos 112 exercícios propostos abordando os temas de nosso interesse. Desse total, apenas 14 envolveram algum tipo de prova, denotando que o formalismo matemático não foi o objetivo principal dos exercícios propostos. Os exercícios estão restritos às aplicações exclusivamente matemáticas, com exceção ao exercício proposto 32, p.130, cuja interpretação geométrica solicitada pode levar ao conceito de deslocamento em Cinemática. Das operações semióticas identificadas, a maioria se concentra nos tratamentos, ou seja, 96 operações de tratamento e 16 de conversão, transparecendo uma estrutura de exercícios que não é a mais favorável ao processo de aprendizagem, conforme já explicitado no quadro teórico.

5.2.2.3 Análise dos exercícios propostos no Livro 03

Os dois primeiros capítulos desse livro são *Capítulo 01, Vetores* e *Capítulo 02, Espaços vetoriais*, que compreendem as definições, as propriedades e, de modo geral as operações vetoriais que são os assuntos de nosso interesse. Não há exercícios propostos nesses capítulos, nem nos demais capítulos de todo o livro, portanto, não teremos, nesse livro, material para esse tipo de análise.

5.2.2.4 Análise dos exercícios propostos no Livro 04

No Livro 04, os assuntos de nosso interesse estão distribuídos nos *capítulos 01, Vetores* e *capítulo 02, Espaços vetoriais*. No capítulo 01 não há exercícios propostos, apenas os exercícios resolvidos de exemplo, somente a partir do capítulo 02 é que há lista de exercícios. A lista completa do capítulo 02 apresenta 75 exercícios, no entanto, 10 exercícios não serão analisados, pois estão em representação matricial. São estes: 07, 26, 29, 34, 42, 50, 52, 61, 73 e 74. Não há nenhum exercício proposto envolvendo algum tipo de prova. A grande maioria das representações se concentra em RAC, são 54 RAC e 11 RLN. O quadro 55 traz exemplos de representações de vetores em RAC. As soluções desses exercícios permanecem com o mesmo tipo de representação, no interior do mesmo sistema semiótico, portanto, temos operações semióticas de tratamentos.

27) **Sejam os vetores u = (2, -3, 2) e v = (-1, 2, 4) em IR^3**
a) Escrever o vetor w = (7, -11, 2) como combinação linear de u e v.
b) Para que valor de k o vetor (-8, 14, k) é combinação linear de u e v
c) Determinar uma condição entre a, b e c para que o vetor (a, b, c) seja uma combinação linear de u e v

Quadro 55: Enunciado de exercício em RAC.
Fonte: LIVRO 04, p.90.

O quadro 56 apresenta o exercício 39, que traz a representação RAC, usada nesse caso para definir um subespaço vetorial $\boldsymbol{G(A)}$. A solução $\boldsymbol{G(A)} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^2 | \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{2x}\}$ não precisa, necessariamente, uma transformação para a representação gráfica, no entanto, como é pedido o significado geométrico desse subespaço, trata-se de uma oportunidade de se apresentar vetores (RGR) pertencentes a esse subespaço que é uma reta, portanto, teríamos uma operação semiótica de conversão.

39) Determinar o subespaço G(A) para A= {(1, -2), (-2, 4)} . O que representa geometricamente esse subespaço?

Quadro 56: Representação de vetores em RAC com possível conversão para RGR.
Fonte: LIVRO 04, p.93.

No quadro 57 temos o resumo da análise dos 65 exercícios propostos.

Capítulo/subcapítulo	Exercícios propostos	Representações nos enunciados	Operações Semióticas	Sentido da conversão
1. Vetores	0	0	0	0
2. Espaços vetoriais	65	11 RLN e 54 RAC	64 TR e 1 CV	1 RAC para RGR
Total	65	11 RLN e 54 RAC	64 TR e 1 CV	1 RAC para RGR

Quadro 57: Representações nos exercícios propostos do Livro 04 e operações semióticas.
Fonte: Acervo pessoal.

O quadro anterior aponta para a predominância da representação algébrica e as operações semióticas indicam a quase totalidade das transformações de tratamento com apenas uma conversão. Quanto a esse aspecto e de acordo com a "Teoria dos Registros de Representações Semióticas" a estrutura dos exercícios propostos não favorece o processo de aprendizagem.

5.2.2.5 Análise dos exercícios propostos no Livro 05

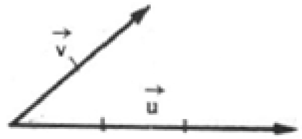
No Livro 05, os assuntos de interesse estão presentes nos seguintes capítulos: *Capítulo 01, Vetores*, *Capítulo 02, Vetores no* R^2 *e no* R^3 e *Capítulo 03, Produtos de vetores*. Vejamos o quadro 60, que resume as análises do total de 93 exercícios propostos nos três capítulos destacados. Alguns assuntos presentes em alguns capítulos podem não ter sido abordados na teoria, como por exemplo "Produto Vetorial", no entanto, as representações utilizadas para essa operação foram as mesmas aqui definidas e já referenciadas para outras operações, portanto, tendo sido suficientes para determinar o tipo de representação e as operações semióticas relacionadas. O quadro 58 mostra também uma das poucas operações semióticas de conversão identificadas nos exercícios analisados, ou seja, da representação RAV para RGE e a solução, propriamente, um tratamento em RGE.

1) Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura, mostrar, num gráfico, um representante do vetor:

a) $\vec{u} - \vec{v}$ *d)* $2\vec{u} - 3\vec{v}$

b) $\vec{v} - \vec{u}$

c) $-\vec{v} - 2\vec{u}$



Quadro 58: Conversão de RAV (enunciado) para RGE (resolução).
Fonte: LIVRO 05, p.13.

No exercício 1 do quadro 59, temos o enunciado em representação RAC e para a solução não é necessária nenhuma mudança de registro de representação, permanecendo no mesmo sistema semiótico, com a mesma representação RAC, sendo, portanto, uma operação semiótica de tratamento.

1) Determinar a extremidade do segmento que representa o vetor $\vec{v} = (2, -5)$, sabendo que sua origem é o ponto $A(-1, 3)$.

Quadro 59: Representação RAC no enunciado e na solução do exercício 1.
Fonte: LIVRO 05, p.37.

Considerando as três listas desses três primeiros capítulos, temos apenas três exercícios solicitando algum tipo de prova, demonstrando não ser esse o objetivo principal do livro. Não há excesso de provas ou demonstrações que prendam a teoria e os exercícios a um demasiado rigor matemático, o que o torna um pouco mais prático, segundo nosso ponto de vista, ao menos dentro do próprio contexto matemático. No entanto, não traz nenhum exemplo de aplicação em outras áreas, como Física ou Engenharia. Nos enunciados dos exercícios identificamos os tipos de representação: 2 RGE, 8 RAV, 15 RLN e 71 RAC.

Capítulo/subcapítulo	**Exercícios propostos**	**Representações nos enunciados**	**Operações Semióticas**	**Sentido da conversão**
1. Vetores	03	1 RLN e 2 RGE	1 TR e 2 CV	1 RAV para RGE 1 RLN para RGE
2. Vetores no R^2 e no R^3	15	15 RAC	14 TR e 1 CV	1 RAC para RGR

3. Produtos de vetores	75	8 RAV, 14 RLN e 56 RAC	71 TR e 4 CV	1 RLN para RAC 2 RAV para RAC 1 RAV para RGR
Total	93	2 RGE, 8 RAV, 15 RLN e 71 RAC	86 TR e 7 CV	1 RAV para RGE 1 RLN para RGE 1 RAC para RGR 1 RLN para RAC 2 RAV para RAC 1 RAV para RGR

Quadro 60: Representações nos exercícios propostos do Livro 05 e operações semióticas.
Fonte: Acervo pessoal.

Pela análise do quadro 60, podemos notar facilmente que predominam as representações algébricas e as operações semióticas de tratamento, em números 86 TR e 7 CV, consideradas importantes para o processo de aprendizagem.

5.2.2.6 Análise dos exercícios propostos no Livro 06

No Livro 06, os assuntos de interesse de nossa pesquisa estão contidos nos seguintes capítulos: *Capítulo 01, Vetores e Capítulo 02, Produto escalar*. O quadro 63 resume a análise dos 106 exercícios propostos pelo autor, dos quais apenas cinco envolvem algum tipo de prova.

No Capítulo 02 há exemplos de aplicação de vetores na Física, mais especificamente com o uso do produto escalar para obter “Trabalho”, sendo esse o único exemplo dado nos dois capítulos investigados.

A análise do quadro 63 permite observar que as representações algébricas são mobilizadas na grande maioria dos exercícios propostos e, as operações semióticas predominantes são as de tratamento. Em números temos 90 TR e 16 CV. Esse resultado nos mostra que as atividades propostas privilegiam os exercícios que envolvem tratamento, e a conversão é pouco utilizada. O quadro 61 traz o exemplo de exercício no qual temos conversão da RAC (enunciado) para RGR (resolução).

9. No mesmo sistema cartesiano xOy, representar:

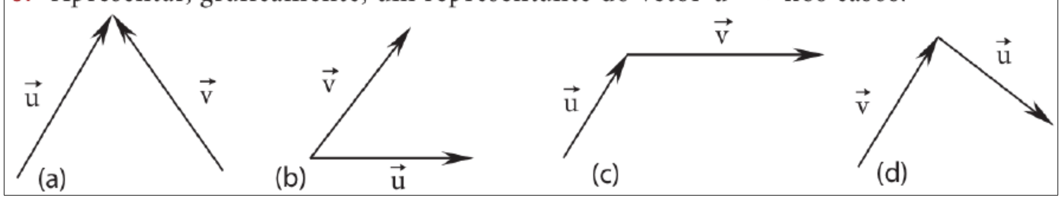
a) os vetores $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 3)$, com origem nos pontos $A(1, 4)$ e $B(1, -4)$, respectivamente;

b) os vetores posição de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Quadro 61: Exercício com conversão da RAC (enunciado) para RGR (resolução).
Fonte: LIVRO 06, p.39.

No quadro 62, exercício 5, observamos no enunciado a representação RGE, e para a resolução não é necessário mudar de registro de representação, permanecendo no mesmo sistema semiótico, com a mesma representação. Nesse caso, portanto, temos uma operação semiótica de tratamento.

5. Apresentar, graficamente, um representante do vetor $\vec{u} - \vec{v}$ nos casos:



Quadro 62: Representação RGE no enunciado e para a resolução do exercício 5.
Fonte: LIVRO 06, p.14.

As representações presentes nos enunciados dos exercícios propostos estão distribuídas em 2 RGE, 2 RGR, 12 RLN, 12 RAV e 78 RAC.

Capítulo/subcapítulo	**Exercícios propostos**	**Representações nos enunciados**	**Operações Semióticas**	**Sentido da conversão**
1. Vetores	56	3 RLN, 2 RGR, 2 RAV, 49 RAC	47 TR e 9 CV	6 RAC para RGR 2 RGR para RAC 1 RLN para RGR
2. Produto escalar	50	9 RLN, 2 RGE, 10 RAV, 29 RAC	43 TR e 7 CV	5 RLN para RAC 1 RLN para RGR 1 RGE para RAC
Total	106	12 RLN, 2 RGR, 2 RGE, 12 RAV e 78 RAC	90 TR e 16 CV	6 RAC para RGR 2 RGR para RAC 2 RLN para RGR 1 RGE para RAC 5 RLN para RAC

Quadro 63: Representações nos exercícios propostos do Livro 06 e operações semióticas.
Fonte: Acervo pessoal.

O quadro a seguir reúne os dados extraídos dos seis livros de Matemática selecionados, num total de 600 exercícios analisados, e mostra os números totais das representações e das operações semióticas encontradas nesses livros. O quadro mostra a predominância dos registros algébricos e das operações de tratamento. Verificamos, também, que não há representações trigonométricas nem representações que utilizem o módulo-ângulo.

Representações nos enunciados	**Quant.**		**Operação semiótica**	**Quant.**		**Sentido da conversão**	**Quant.**
RLN	203		Tratamento (TR)	529		RAV para RGE	2
RGE	39		Conversão (CV)	71		RAV para RGR	1
RGR	7		-	-		RGE para RAC	1
RAV	34		-	-		RAV para RAC	2
RAC	330		-	-		RGR para RAC	2
RAT	0		-	-		RGR para RLN	3
RAM	0		-	-		RLN para RGR	5
-	-		-	-		RLN para RAC	10
-	-		-	-		RLN para RGE	13
-	-		-	-		RAC para RGR	14
-	-		-	-		RGE para RLN	18
Total	613		Total	600		Total	71

Quadro 64: Resumo das representações e operações semióticas dos exercícios dos livros 01 a 6.
Fonte: Acervo pessoal.

Ainda no quadro 64 verificamos que a representação RAC é a mais frequente com 330 representações e, as representações RGR, RAV e RGE as menos frequentes, com 7, 34 e 39 representações, respectivamente, dentre um total de 613 representações identificadas nos enunciados, no entanto, as representações RGR e RGE têm bastante frequência nas conversões.

5.3 Conceitos e Representações de vetores nos livros de disciplinas técnico-científicas

Neste subcapítulo apresentaremos a análise dos dados selecionados nos livros de Física, denominados livro 07 e livro 08 e os livros técnicos, denominados livro 09, livro 10 e livro 11. Os livros 10 e 11 não abordam o tema vetores em um capítulo específico, apenas o expõem como material auxiliar em seus apêndices. Portanto, não teremos parte teórica e exercícios resolvidos a serem separadamente analisados para esses livros.

5.3.1 Análise da parte teórica e de exercícios resolvidos dos livros 07 e 08

Veremos agora o conceito e as representações dos vetores encontrados nos livros 07 e 08 da área de Física, a partir dos quais faremos as análises e os comentários. O assunto é tratado no capítulo 03 do livro 07 e capítulo 01 do livro 08. Iniciaremos esse trabalho pelo livro de Física aqui denominado de livro 07. De maneiras semelhantes, os autores de ambos os livros discutem nos prefácios a estrutura de seus livros e apontam estratégias de solução de problemas e sugestões de como utilizar bem as ferramentas e os novos materiais disponíveis. Além disso, permitem acesso aos materiais de apoio suplementares, acessíveis em sites específicos, após cadastro.

A abordagem inicial feita pelos autores dos livros 07 e 08 se utiliza da representação geométrica. A Física lida com uma quantidade enorme de grandezas que possuem uma amplitude (intensidade ou magnitude) e uma orientação, passíveis de representação vetorial. O vetor é considerado um ente matemático que possui um módulo e uma orientação (direção e sentido). Tal linguagem é utilizada pelos autores nos dois livros de Física. Uma grandeza vetorial no contexto da Física possui um módulo e uma orientação, podendo, então, ser representada por um vetor.

A figura 31, livro 07, mostra três representantes de um mesmo vetor, e a figura 32, livro 08, também apresenta a mesma ideia. Os autores mostram de uma forma indireta a ideia de equipolência de segmentos orientados e, embora não usem estes termos, afirmam que um representante de um vetor pode ser deslocado sem que seja alterado, desde que comprimento, direção e sentido se mantenham inalterados.

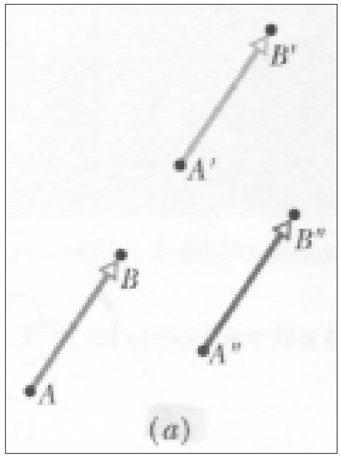


Figura 31: Representantes de um mesmo vetor.
Fonte: LIVRO 07, p.40.

> [...] as setas de A para B, de A' para B' e de A" para B'' têm o mesmo módulo e a mesma orientação; assim especificam vetores deslocamento iguais e representam a mesma variação de posição da partícula. Um vetor pode ser deslocado sem que o seu valor mude, se comprimento, direção e sentido permanecerem os mesmos. (LIVRO 07, p.40)

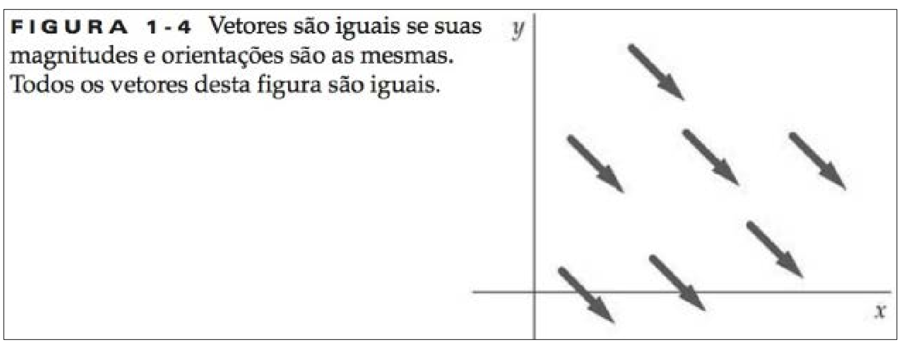


FIGURA 1-4 Vetores são iguais se suas magnitudes e orientações são as mesmas. Todos os vetores desta figura são iguais.

Figura 32: Representantes de um mesmo vetor.
Fonte: LIVRO 08, p.14.

Os autores do livro 07 não tratam dos conceitos de módulo, direção e sentido de maneira explícita, ficando subentendido o conhecimento desses elementos, como algo a ser explorado em sala de aula. Diferentemente, no livro 08, os autores abordam os três elementos presentes na definição de um vetor, como é feito por exemplo com o conceito de magnitude (módulo ou norma) apresentado na figura 33. Nesses livros, os vetores são representados por um símbolo em itálico, sobre o qual se desenha uma seta, como $\vec{\boldsymbol{a}}$. Para indicar apenas o módulo (norma) do vetor, utiliza-se o mesmo símbolo, porém, sem a seta, como $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ e assim por diante.

Há uma pequena diferença, no livro 07 os autores adotam letras minúsculas, enquanto no livro 08, letras maiúsculas.

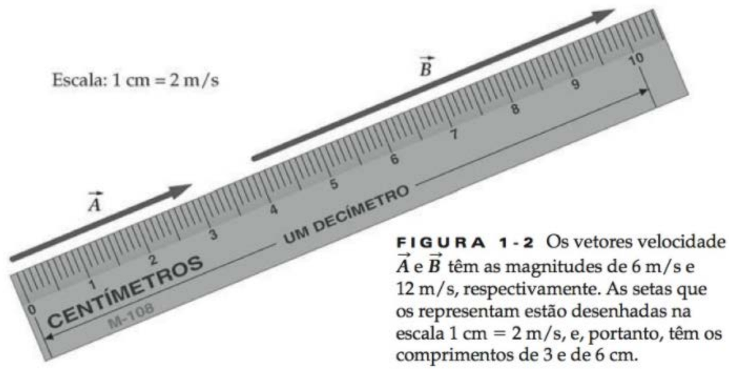


Figura 33: Conceito de magnitude (módulo ou norma) de um vetor.
Fonte: LIVRO 08, p.13.

Outra representação de vetor bastante utilizada na Física e também na Engenharia é a representação algébrica trigonométrica, ou apenas trigonométrica, na qual os vetores são representados em um sistema de coordenadas retangulares, a partir do qual se faz a decomposição dos vetores nos eixos coordenados $\boldsymbol{O_x}$,$\boldsymbol{O_y}$,$\boldsymbol{O_z}$ (ou $\boldsymbol{O_x}$,$\boldsymbol{O_y}$, no caso de vetores num plano) com auxílio de trigonometria básica, conhecendo-se o ângulo entre a direção do vetor e um dos eixos coordenados. As componentes são as projeções ortogonais dos vetores em cada eixo coordenado, como se vê na figura 34, referente ao livro 07 e figura 35, referente ao livro 08.

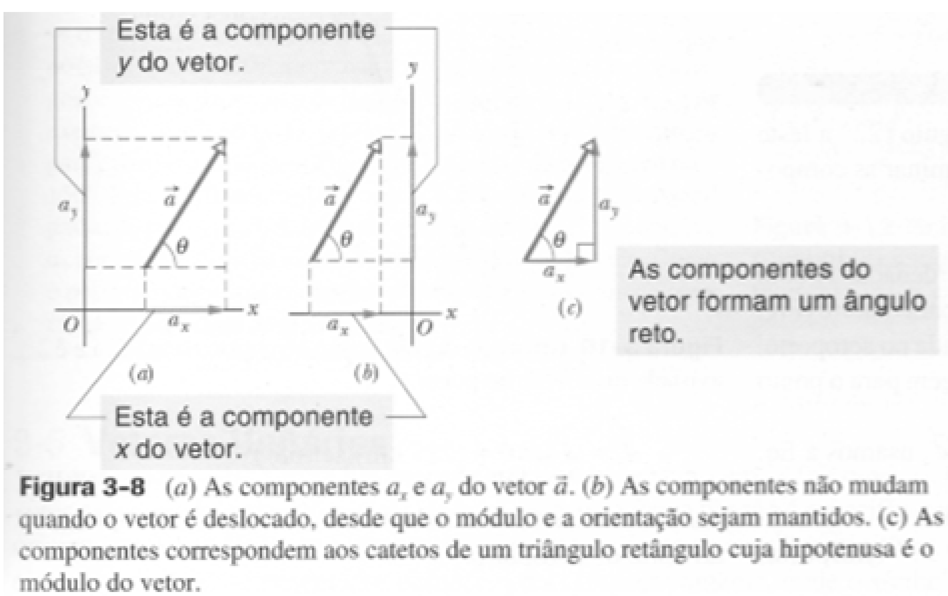


Figura 34: Decomposição de um vetor no plano em suas componentes.
Fonte: LIVRO 07, p.43.

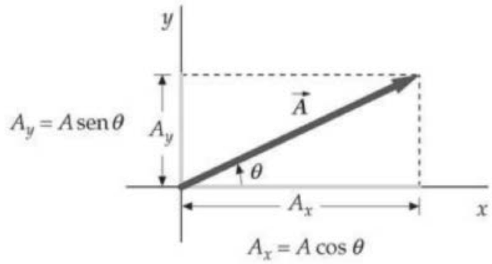


FIGURA 1-13 As componentes retangulares de um vetor. θ é o ângulo entre a orientação do vetor e a orientação $+x$. O ângulo é positivo se medido no sentido anti-horário a partir da orientação $+x$, como mostrado.

Figura 35: Decomposição de um vetor no plano em suas componentes.
Fonte: LIVRO 08, p.17.

Conforme as figuras acima, obtém-se as componentes a partir do triângulo retângulo com as expressões $\boldsymbol{a_x = a.cos\theta}$ e $\boldsymbol{a_y = a.sen\theta}$, onde $\boldsymbol{\theta}$ é o ângulo que o vetor $\vec{\boldsymbol{a}}$ faz com o semieixo $\boldsymbol{x}$ positivo, que é a referência para a medida dos ângulos. O vetor $\vec{\boldsymbol{a}}$, então, pode ser representado pela soma de suas componentes, ou seja, $\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a_x} + \boldsymbol{a_y}$, ou em sua representação algébrica trigonométrica (RAT):

$$\vec{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{a.cos\theta, a.sen\theta})$$

Os autores dizem, de forma semelhante em ambos os textos, que um vetor no plano fica completamente determinado conhecendo-se seu módulo e ângulo ($\boldsymbol{a}\ e\ \boldsymbol{\theta}$), ou, conhecendo-se suas componentes ($\boldsymbol{a_x}$ e $\boldsymbol{a_y}$**)** pois os dois pares de valores carregam a mesma informação. Para o ângulo $\boldsymbol{\theta}$ é considerada em geral a primeira determinação, isto é, $0 \leq \boldsymbol{\theta} < 2\boldsymbol{\pi}$**.** A partir da notação de vetor (no plano) por meio de suas componentes, pode-se passar para a notação módulo-ângulo ($\boldsymbol{a}\ e\ \boldsymbol{\theta}$) com o uso da trigonometria básica:

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{\boldsymbol{a_x^2} + \boldsymbol{a_y^2}} \text{ e } \boldsymbol{tan\theta} = \frac{\boldsymbol{a_y}}{\boldsymbol{a_x}} \rightarrow \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{tan^{-1}}\frac{\boldsymbol{a_y}}{\boldsymbol{a_x}}$$

Para um vetor no espaço, o texto considera a representação para a qual precisamos do módulo e de dois ângulos ($\boldsymbol{a,\theta,}$ $\emptyset$) ou de três componentes ($\boldsymbol{a_x}, \boldsymbol{a_y}, \boldsymbol{a_z}$) para especificá-lo completamente.

45 Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estão no plano xy. $\vec{A}$ tem módulo 8,00 e ângulo 130°; $\vec{B}$ tem componentes $B_x = -7{,}72$ e $B_y = -9{,}20$. (a) Determine $5\vec{A} \cdot \vec{B}$. Determine $4\vec{A} \times 3\vec{B}$ (b) em termos dos vetores unitários e (c) através do módulo e do ângulo em coordenadas esféricas (veja a Fig. 3-34). (d) Determine o ângulo entre os vetores $\vec{A}$ e $4\vec{A} \times 3\vec{B}$. (*Sugestão:* pense um pouco antes de iniciar os cálculos). Determine $\vec{A} + 3{,}00\hat{k}$ (e) em termos dos vetores unitários e (f) através do módulo e do ângulo em coordenadas esféricas.

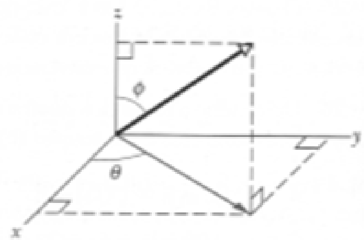


Figura 3-34 Problema 45.

Quadro 65: Vetor representado pelo módulo e dois ângulos.
Fonte: LIVRO 07, p.58.

A representação que usa o módulo e dois ângulos ($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{\theta}$,$\emptyset$) para definir um vetor no espaço, é também chamada uma representação por coordenadas esféricas que é apenas mencionada e não é explorada neste livro, embora encontremos alguns exercícios que abordem esse conhecimento, como no exercício do livro 07, quadro 65.

A decomposição de vetores em suas projeções ortogonais, com uso de trigonometria, que leva à uma representação algébrica trigonométrica é bastante explorada e antecede, nos livros 07 e 08, a representação por meio de coordenadas numa base ortogonal ($\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $\widehat{\boldsymbol{k}}$). A notação para os vetores da base é igual nos dois livros de Física, que adotam as mesmas letras encimadas com circunflexos, em vez de setas. Os livros apresentam um breve resumo de Trigonometria, conforme pode ser conferido no quadro 66, livro 08 e quadro 67 para o livro 07.

AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS **Tutorial Matemático**

A Figura M-12 mostra um triângulo retângulo formado pelo traçado da linha BC perpendicularmente à linha AC. Os comprimentos dos lados são designados por a, b e c. As definições baseadas no triângulo retângulo, para as funções trigonométricas sen θ (o **seno**), cos θ (o **cosseno**) e tan θ (a **tangente**) para um ângulo agudo θ, são

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Lado oposto}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \text{M-27}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Lado adjacente}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \text{M-28}$$

$$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{Lado oposto}}{\text{Lado adjacente}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \text{M-29}$$

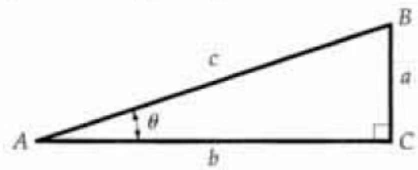


FIGURA M-12 Um triângulo retângulo com lados de comprimentos a e b e hipotenusa de comprimento c.

Quadro 66: Funções trigonométricas – trecho do “Tutorial Matemático”
Fonte: LIVRO 08, p.714-715.

O resumo de Trigonometria do livro 07 apresentado no quadro 67 e um trecho do “Tutorial Matemático” disponível ao final do livro 08, são indicativos da importância que é dada à representação algébrica trigonométrica de vetor. São revisados os conceitos de ângulos em graus e radianos, de razões trigonométricas no triângulo retângulo e das funções trigonométricas inversas necessárias para determinar as componentes vetoriais e a direção do vetor.

Táticas para a Solução de Problemas

Ângulos, funções trigonométricas e funções trigonométricas inversas

Tática 1: ***Ângulos–Graus e Radianos*** Ângulos medidos em relação ao semieixo x positivo são positivos se são medidos no sentido anti-horário e negativos se medidos no sentido horário. Assim, por exemplo, 210° e −150° representam o mesmo ângulo.

Os ângulos podem ser medidos em graus ou em radianos (rad). Para relacionar as duas unidades, lembre-se de que uma circunferência é descrita por um ângulo de 360° ou 2π rad. Para converter, digamos, 40° para radianos, escrevemos

$$40° \frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = 0{,}70 \text{ rad}.$$

Tática 2: ***Funções Trigonométricas*** A Fig. 3-11 mostra as definições das funções trigonométricas básicas (seno, cosseno e tangente), muito usadas na ciência e na engenharia, em uma forma que não depende do modo como o triângulo é rotulado.

O leitor deve saber como essas funções trigonométricas variam com o ângulo (Fig. 3-12), para poder julgar se o resultado mostrado por uma calculadora é razoável. Em algumas circunstâncias, o simples conhecimento do sinal das funções nos vários quadrantes pode ser útil.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta}$$

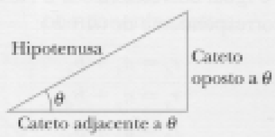


Figura 3-11 Triângulo usado para definir as funções trigonométricas. Veja também o Apêndice E.

Tática 3: ***Funções Trigonométricas Inversas*** Quando se usa uma calculadora para obter o valor de uma função trigonométrica inversa como sen^{-1}, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$, é preciso verificar se o resultado faz sentido, pois, em geral, existe outra solução possível que a calculadora não fornece. Os intervalos em que as calculadoras operam ao fornecer os valores das funções trigonométricas inversas estão indicados na Fig. 3-12. Assim, por exemplo, $\operatorname{sen}^{-1}(0{,}5)$ pode ser igual a 30° (que é o valor mostrado pela calculadora, já que 30° está no intervalo de operação) ou a 150°. Para verificar que isso é verdade, trace uma reta horizontal passando pelo valor 0,5 na escala vertical da Fig. 3-12*a* e observe os pontos em que a reta intercepta a curva da função seno. Como é possível saber qual é a resposta correta? É a que parece mais razoável para uma dada situação.

Tática 4: ***Medida dos Ângulos de um Vetor*** As expressões de $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ na Eq. 3-5 e de $\tan\theta$ na Eq. 3-6 são válidas apenas se o ângulo for medido em relação ao semieixo x positivo. Se o ângulo for medido em relação a outro eixo, talvez seja preciso trocar as funções trigonométricas da Eq. 3-5 ou inverter a razão da Eq. 3-6. Um método mais seguro é converter o ângulo dado em um ângulo medido em relação ao semieixo x positivo.

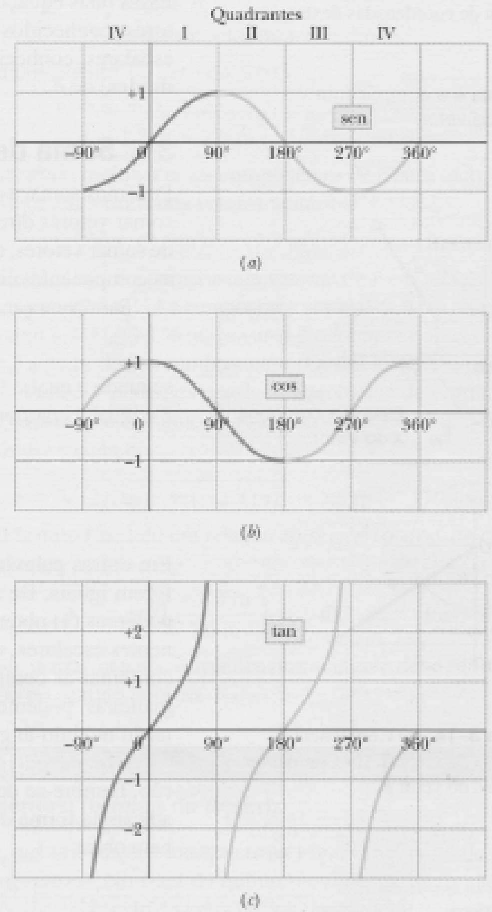


Figura 3-12 Gráficos das três funções trigonométricas. As partes mais escuras das curvas correspondem aos valores fornecidos pelas calculadoras para as funções trigonométricas *inversas*.

Quadro 67: Resumo de Trigonometria básica.
Fonte: LIVRO 07, p.45.

A partir de uma base ortonormal obtém-se as chamadas componentes escalares $(\boldsymbol{a_x}, \boldsymbol{a_y}, \boldsymbol{a_z})$ do vetor. Um vetor unitário é definido nos textos como sendo um vetor de módulo ou magnitude 1, segundo os autores do livro 07, cuja única função é especificar uma orientação. De forma análoga, os autores do livro 08, dizem que os vetores unitários apontam nos sentidos positivos dos eixos coordenados e são úteis para expressar vetores em termos de suas componentes. Podemos verificar essas ideias, em trechos de textos extraídos do livro 07, mostrado no quadro 68, e do livro 08 conforme quadro 69.

3-5 Vetores Unitários

Vetor unitário é um vetor cujo módulo é 1 e que aponta em uma certa direção. Um vetor unitário não possui dimensão nem unidade; sua única função é especificar uma orientação. Neste livro, os vetores unitários que indicam os sentidos positivos dos

Quadro 68: Definição de vetor unitário segundo autor do livro 07.
Fonte: LIVRO 07, p.45.

No texto do quadro acima se lê "vetor unitário não possui dimensão nem unidade"; o autor se refere a uma grandeza adimensional, ou seja, não associada a uma unidade de medida, somente um número.

VETORES UNITÁRIOS

Um **vetor unitário** é um vetor *adimensional* de magnitude exatamente igual a 1. O vetor $\hat{A} = \vec{A}/A$ é um exemplo de um vetor unitário que aponta no sentido de $\vec{A}$. O circunflexo indica que ele é um vetor unitário. Vetores unitários que apontam nos sentidos positivos x, y e z são convenientes para expressar vetores em termos de suas componentes retangulares. Estes vetores unitários são usualmente escritos como $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$, respectivamente. Por exemplo, o vetor $A_x\hat{i}$ tem a magnitude $|A_x|$ e aponta no sentido de $+x$ se A_x é positivo (ou no sentido de $-x$ se A_x é negativo). Um vetor qualquer $\vec{A}$ pode ser escrito como a soma de três vetores, cada um deles paralelo a um eixo coordenado (Figura 1-17):

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \qquad 1\text{-}7$$

Quadro 69: Definição de vetor unitário segundo autor do livro 08.
Fonte: LIVRO 08, p.19.

Os vetores unitários que indicam os sentidos positivos dos eixos coordenados $\boldsymbol{O_x, O_Y, O_Z}$ são respectivamente $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}$ e são muito úteis para especificar outros vetores. Os autores usam essa notação para representar um vetor, por exemplo, o vetor $\vec{\boldsymbol{a}}$ no plano, fica representado, $\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a_x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{a_y}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ ou no espaço $\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a_x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{a_y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{a_z}\hat{\boldsymbol{k}}$. Lembrando que os vetores unitários, nos livros 07 e 08, são identificados pelo símbolo "^" em vez de setas. No livro 08, os autores abordam esse tipo de representação apenas mostrando a situação no espaço ($\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}$), como podemos verificar por meio do quadro 69, para a representação do vetor no plano ($\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$) o autor não deixa explícito. A figura 36, do livro 07, mostra o processo de obtenção dessa representação a partir das componentes trigonométricas e, o livro 08, de forma menos detalhada, como se apresenta na figura 37:

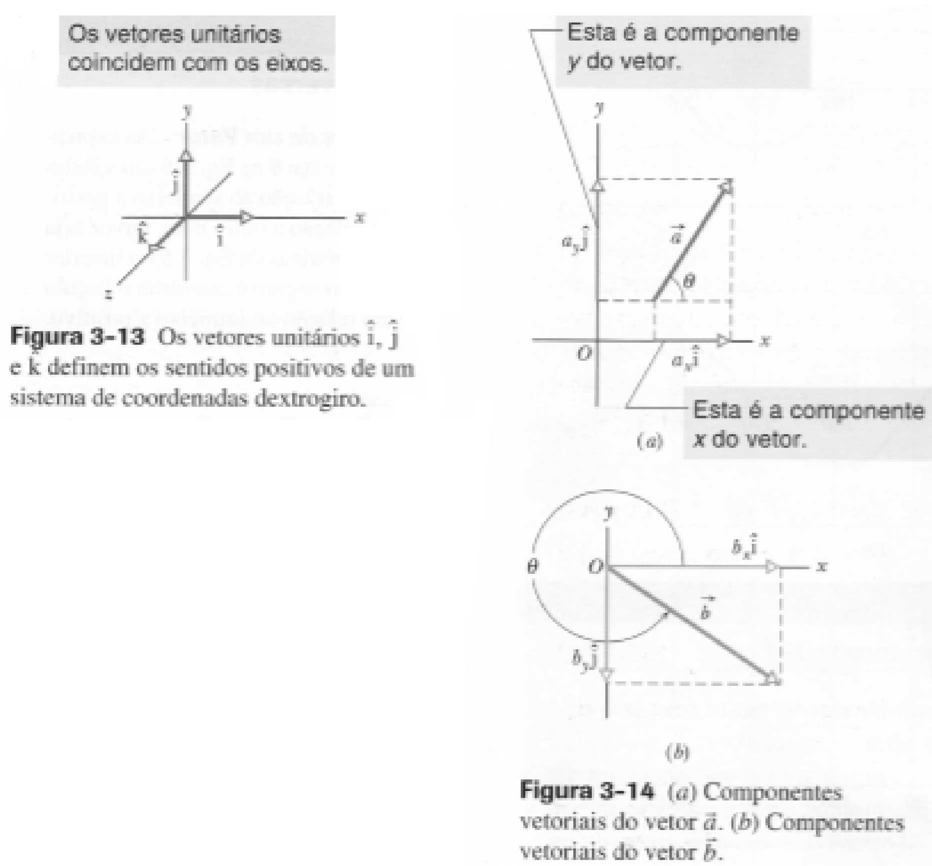


Figura 36: Componentes para a representação na base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$.
Fonte: LIVRO 07, p.46.

A representação no registro simbólico, seja em coordenadas em relação à uma base ortogonal $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, ou em componentes trigonométricas, e a representação geométrica, com os conceitos e informações que estas representações podem trazer, são exploradas nesses livros e muitas vezes exigidas nas atividades, concomitantemente, conforme vemos no quadro 71, na qual os autores do livro 07, exemplificam uma operação de adição, envolvendo conceitos geométricos, trigonométricos e da base ortogonal $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Os autores do livro 08, ao contrário dos autores do livro 07, não apresentam exercício exemplificando esta forma de representação, apenas propõem o que chamam de problema prático, quadro 70. Tal problema não proporciona solução que saia da representação RAV e transite por outras formas distintas de representação, provocando uma operação semiótica de conversão, ficando restrito apenas a uma operação de tratamento. Já no exemplo do quadro 71, podemos observar ao menos três representações distintas, RAV, RGR e RAM que proporcionam que aconteçam operações semióticas de conversão, favorecendo o aprendizado desse assunto.

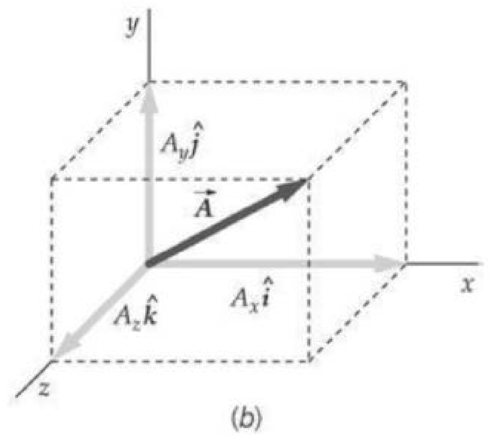


FIGURA 1-17 (*a*) Os vetores unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ em um sistema de coordenadas retangulares. (*b*) O vetor $\vec{A}$ em termos dos vetores unitários: $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$.

Figura 37: Representação vetorial na base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).
Fonte: LIVRO 08, p.19.

PROBLEMA PRÁTICO 1-7

Dados os vetores $\vec{A} = (4{,}00\ \text{m})\hat{i} + (3{,}00\ \text{m})\hat{j}$ e $\vec{B} = (2{,}00\ \text{m})\hat{i} - (3{,}00\ \text{m})\hat{j}$, encontre (*a*) *A*, (*b*) *B*, (*c*) $\vec{A} + \vec{B}$ e (*d*) $\vec{A} - \vec{B}$.

Quadro 70: Exercício envolvendo a representação RAV.
Fonte: LIVRO 08, p.19.

Exemplo

Soma de vetores usando vetores unitários

A Figura 3-15*a* mostra os seguintes vetores:

$$\vec{a} = (4{,}2\ \text{m})\hat{\imath} - (1{,}5\ \text{m})\hat{\jmath},$$
$$\vec{b} = (-1{,}6\ \text{m})\hat{\imath} + (2{,}9\ \text{m})\hat{\jmath},$$
e
$$\vec{c} = (-3{,}7\ \text{m})\hat{\jmath}.$$

Qual é o vetor soma $\vec{r}$ que também aparece na Fig. 3-15*a*?

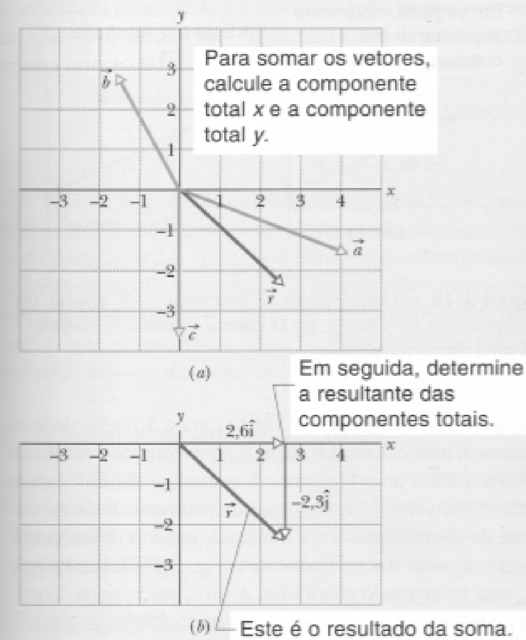


Figura 3-15 O vetor $\vec{r}$ é a soma vetorial dos outros três vetores.

IDEIA-CHAVE

Podemos somar os três vetores somando as componentes, eixo por eixo, e usando as componentes resultantes para obter o vetor soma $\vec{r}$.

Cálculos No caso do eixo x, somamos as componentes x de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ para obter a componente x do vetor soma $\vec{r}$:

$$r_x = a_x + b_x + c_x$$
$$= 4{,}2\ \text{m} - 1{,}6\ \text{m} + 0 = 2{,}6\ \text{m}.$$

Analogamente, no caso do eixo y,

$$r_y = a_y + b_y + c_y$$
$$= -1{,}5\ \text{m} + 2{,}9\ \text{m} - 3{,}7\ \text{m} = -2{,}3\ \text{m}.$$

Podemos combinar essas componentes de $\vec{r}$ para escrever o vetor em termos dos vetores unitários:

$$\vec{r} = (2{,}6\ \text{m})\hat{\imath} - (2{,}3\ \text{m})\hat{\jmath}, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde $(2{,}6\ \text{m})\hat{\imath}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao eixo x e $-(2{,}3\ \text{m})\hat{\jmath}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao eixo y. A Fig. 3-15*b* mostra uma das formas de obter o vetor $\vec{r}$ a partir dessas componentes. (Qual é a outra forma?)

Também podemos resolver o problema determinando o módulo e o ângulo de $\vec{r}$. De acordo com a Eq. 3-6, o módulo é dado por

$$r = \sqrt{(2{,}6\ \text{m})^2 + (-2{,}3\ \text{m})^2} \approx 3{,}5\ \text{m} \qquad \text{(Resposta)}$$

e o ângulo (medido em relação ao semieixo x positivo) é dado por

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}3\ \text{m}}{2{,}6\ \text{m}}\right) = -41^\circ, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde o sinal negativo significa que o ângulo deve ser medido no sentido horário.

Quadro 71: Soma de vetores: conceitos geométricos, trigonométricos e em coordenadas na base ortonormal $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$.

Fonte: LIVRO 07, p.47.

5.3.2 Análise da parte teórica e de exercícios resolvidos nos livros 09, 10 e 11.

Devemos mais uma vez ressaltar que os livros 10 e 11 não trazem um capítulo que trate dos aspectos teóricos sobre vetores; portanto, neste subcapítulo as análises referentes à parte teórica desses livros ficarão restritas aos exemplos dos exercícios resolvidos colocados pelo autor.

No livro 09, *Estática*, os vetores são abordados no capítulo 2, *Vetores de força*, no qual o objetivo do autor é apresentar uma forma de operar com vetores para trabalhar com a adição e decomposição de forças em sistemas mecânicos em equilíbrio. No livro 10, *Dinâmica*, não há capítulo que trate exclusivamente de vetores, apenas um breve resumo disponível no apêndice B, intitulado "*Análise Vetorial*", no qual o autor apresenta o vetor baseado na representação geométrica e na representação algébrica vetorial, e as operações de adição, produto escalar e produto vetorial. O autor chama o produto vetorial de produto cruzado. Há um erro de tradução e consequentemente, conceitual com relação ao produto escalar e suas propriedades, que é erroneamente chamado de produto vetorial, como podemos verificar no quadro 72. A versão original desse livro em inglês está correta, assim como as definições de produto vetorial e escalar, não havendo o mesmo erro detectado na versão em português.

Produto vetorial

O produto vetorial de dois vetores **A** e **B**, que resulta em um escalar, é definido como:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad \text{(B–14)}$$

e lê-se **A** 'ponto' **B**. O ângulo θ formado entre as *caudas* de **A** e **B** ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$).

O produto vetorial é comutativo; ou seja:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad \text{(B–15)}$$

A lei distributiva é válida; isto é,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \quad \text{(B–16)}$$

E a multiplicação escalar pode ser realizada de qualquer maneira, ou seja,

$$m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})m \quad \text{(B–17)}$$

Quadro 72: Erro na definição de produto escalar e nas propriedades.
Fonte: LIVRO 10, p.537.

Um pouco mais adiante, ainda no apêndice B do livro 10, os erros continuam se propagando: são descritas as maneiras de se obter as componentes de um vetor e o ângulo formado por dois vetores, por meio do "produto vetorial", quando na verdade trata-se do produto escalar. Isso pode ser verificado no quadro 73.

O produto vetorial pode ser usado para determinar o *ângulo θ formado entre dois vetores*. Da Equação B–14,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}\right) \qquad \text{(B–19)}$$

Também é possível se determinar o *componente de um vetor em uma dada direção* utilizando o produto vetorial. Por exemplo, a intensidade da componente (ou projeção) do vetor **A** na direção de **B**, Figura B.6, é definida por $A\cos\theta$. Da Equação B–14, esta intensidade é:

$$A\cos\theta = \mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{B}}{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_B \qquad \text{(B–20)}$$

onde $\mathbf{u}_B$ representa um vetor unitário atuando na direção de **B** (Figura B.6).

Quadro 73: Erro conceitual de produto escalar e suas aplicações.
Fonte: LIVRO 10, p.538.

Nesse apêndice, o autor indica o livro 9, *Estática*, para um maior detalhamento sobre vetores. O livro 11, *Resistência dos Materiais*, não traz nenhum resumo sobre vetores. Os livros 9, 10 e 11 são todos de mesma autoria.

No livro 9, a discussão inicial trata dos conceitos de grandezas escalares e vetoriais, sendo que, a partir dessas últimas se define vetor, sua representação geométrica e seus elementos, conforme figura 38. A direção é estabelecida inicialmente considerando o ângulo com uma reta horizontal, mas verificamos logo nos primeiros exemplos que também pode ser tomada como referência a direção vertical. A notação para vetor, neste livro, é dada por meio de letras em negrito, como $\boldsymbol{A}$, e sua intensidade (módulo) sem negrito, como A.

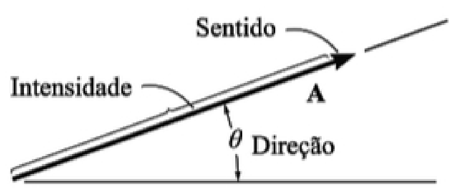


Figura 2.1

Figura 38: Representação geométrica de vetor e seus elementos.
Fonte: LIVRO 09, p.11.

Não há no livro 9 uma definição formal de vetor; o conceito é introduzido por meio de sua representação geométrica, sem preocupação em mostrar que uma “flecha” é apenas um representante de uma classe infinita de segmentos orientados.

Na sequencia o autor trata das operações de adição de vetores, introduzindo as leis do triângulo e do paralelogramo. O conceito que está embutido na ideia de vetores como uma classe de segmentos equipolentes nos parece importantíssima, pois ajuda o estudante a entender que ele pode escolher qualquer representante de um vetor, conforme a conveniência que a resolução do problema o exigir, e não necessariamente aquele que tem origem na origem do sistema de eixos. Essa ideia ajuda também a compreender melhor as leis do triângulo e do paralelogramo apresentadas na figura 39.

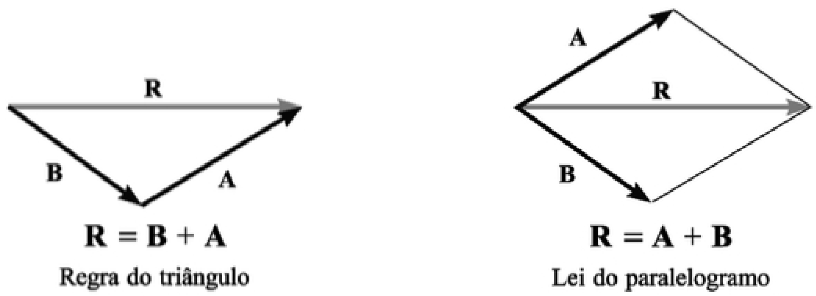
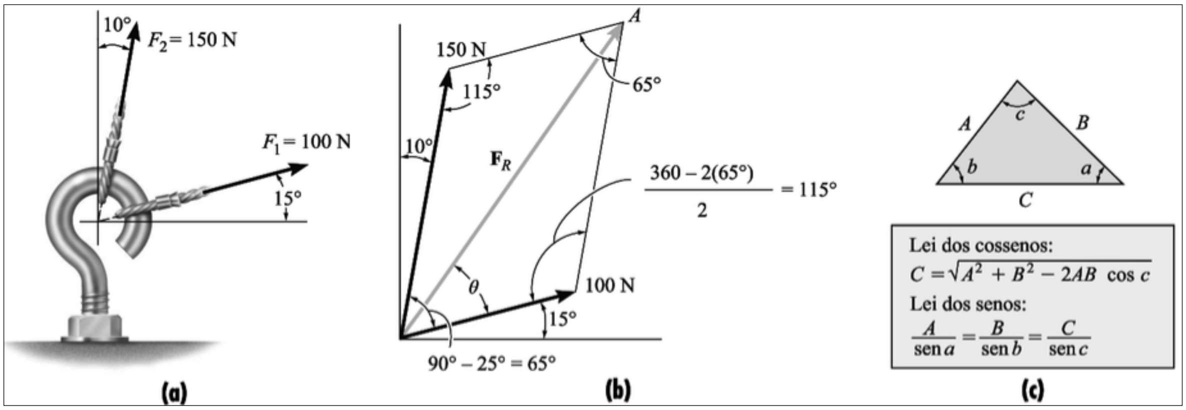


Figura 39: Leis do triângulo e do paralelogramo.
Fonte: LIVRO 09, p.12.

Na figura 39 podemos fazer uma pequena observação quanto à linguagem utilizada pelo autor quando diz “lei do paralelogramo” e “regra do triângulo”; nesse caso faltou uniformidade na linguagem adotada, pois num momento usa “regra” em outro momento “lei”. Não há engano na tradução, pois o original em inglês também apresenta essas variações. Isso é apenas uma questão de padronização e ao nosso ver, deveria ser escolhida uma forma única, ou “lei” ou “regra”.

Uma vez representados os vetores e obtido geometricamente o vetor soma, o autor apresenta a lei dos cossenos e a lei dos senos para calcular a intensidade da resultante da adição de vetores, como podemos observar no exemplo dado no quadro 74. Em seguida, apresenta uma série de problemas com aplicação das propriedades e situações reais da Engenharia, com soluções apoiadas pela representação geométrica até o momento exposta. Observamos que as soluções também levam em conta os conhecimentos sobre a soma das medidas de ângulos internos em um triângulo ou em um paralelogramo.



Quadro 74: Aplicação da lei do paralelogramo, da lei dos cossenos e dos senos.
Fonte: LIVRO 09, p.15.

A partir da representação geométrica, o autor introduz a representação algébrica trigonométrica e a algébrica vetorial no plano, utilizando duas maneiras distintas:

- a primeira, uma representação algébrica trigonométrica, chamada pelo autor de notação escalar, na qual são determinadas a decomposição do vetor em componentes retangulares, por meio do uso das razões trigonométricas, que observamos na figura 40, item a. Ainda na mesma figura, item b, verificamos que o autor introduz uma forma diferente para obter as componentes, considerando que ao invés de usar o ângulo $\boldsymbol{\theta}$ ele considera um “pequeno” triângulo para definir a direção e a partir da semelhança de triângulos ele determina as componentes usando a proporcionalidade entre os lados homólogos dos triângulos para encontrar as intensidades.

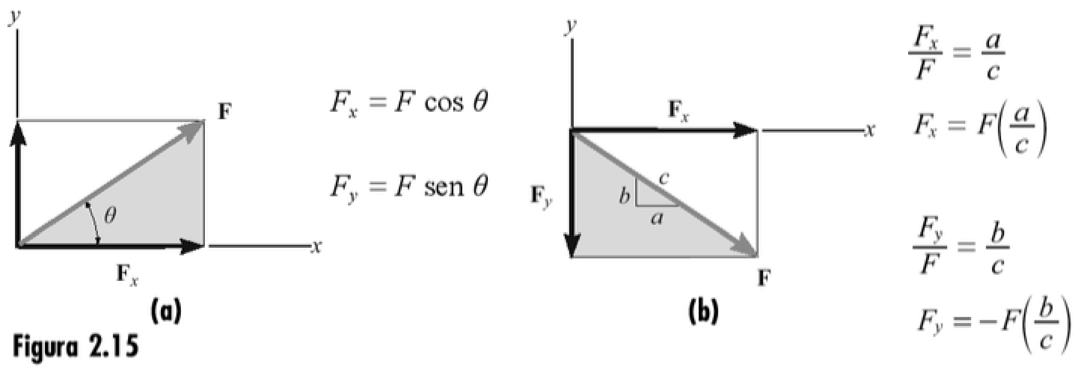


Figura 40: Notação escalar para vetores.
Fonte: LIVRO 09, p.22.

Esta nova forma de obter as componentes vetoriais, por meio da semelhança de triângulos, acrescenta maior complexidade ao registro de representação de um vetor e exige do estudante outros conhecimentos de geometria que podem enriquecer seu repertório ao lidar com as operações vetoriais, ou ao contrário, podem também, tornar mais difícil seu aprendizado.

- a segunda é a representação algébrica em coordenadas em relação à base ortonormal $(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$, para a qual usa a denominação de notação vetorial cartesiana. Nesta representação o autor define os vetores unitários como sendo adimensionais e de intensidade igual a um, sendo utilizados para designar as direções dos eixos $(\boldsymbol{O_x}, \boldsymbol{O_y}, \boldsymbol{O_z})$.

O exemplo dado pelo autor no quadro 75 mostra a aplicação das duas notações, *escalar e vetorial*, no mesmo exercício. Ao final, o autor comenta a praticidade da notação escalar, privilegiando seu uso em situações no plano e apontando que a notação vetorial cartesiana é bastante vantajosa para aplicações tridimensionais.

Ainda no exemplo do quadro 75 podemos notar a articulação entre as representações escalar e vetorial, assim denominadas pelo autor, e também, entre a representação geométrica e as duas últimas, caracterizando assim uma transformação de conversão.

Exemplo 2.6

O olhal da Figura 2.19*a* está submetido a duas forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$. Determine a intensidade e direção da força resultante.

SOLUÇÃO I

Notação escalar

Primeiro, decompomos cada força em suas componentes *x* e *y* (Figura 2.19*b*). Depois somamos essas componentes algebricamente.

$$\overset{+}{\rightarrow} F_{Rx} = \Sigma F_x; \quad F_{Rx} = 600 \cos 30° \text{ N} - 400 \text{ sen } 45° \text{ N}$$
$$= 236{,}8 \text{ N} \rightarrow$$
$$+\uparrow F_{Ry} = \Sigma F_y; \quad F_{Ry} = 600 \text{ sen } 30° \text{ N} + 400 \cos 45° \text{ N}$$
$$= 582{,}8 \text{ N} \uparrow$$

A força resultante, mostrada na Figura 2.18*c*, possui uma *intensidade* de:

$$F_R = \sqrt{(236{,}8 \text{ N})^2 + (582{,}8 \text{ N})^2}$$
$$= 629 \text{ N}$$

Da adição vetorial,

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{582{,}8 \text{ N}}{236{,}8 \text{ N}}\right) = 67{,}9°$$

SOLUÇÃO II

Notação vetorial cartesiana

Da Figura 2.19*b*, cada força é expressa como um vetor cartesiano:

$$\mathbf{F}_1 = \{600 \cos 30°\mathbf{i} + 600 \text{ sen } 30°\mathbf{j}\} \text{ N}$$
$$\mathbf{F}_2 = \{-400 \text{ sen } 45°\mathbf{i} + 400 \cos 45°\mathbf{j}\} \text{ N}$$

Assim,

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (600 \cos 30° \text{ N} - 400 \text{ sen } 45° \text{ N})\mathbf{i} + (600 \text{ sen } 30° \text{ N} + 400 \cos 45° \text{ N})\mathbf{j}$$
$$= \{236{,}8\mathbf{i} + 582{,}8\mathbf{j}\} \text{ N}$$

A intensidade e a direção de $\mathbf{F}_R$ são determinadas da mesma maneira mostrada acima.

NOTA: Comparando-se os dois métodos de solução, pode-se verificar que o uso da notação escalar é mais eficiente, visto que as componentes são determinadas *diretamente*, sem ser necessário expressar primeiro cada força como um vetor cartesiano antes de adicionar as componentes. Vamos mostrar, mais adiante, que a análise vetorial cartesiana é bastante vantajosa para resolver problemas tridimensionais.

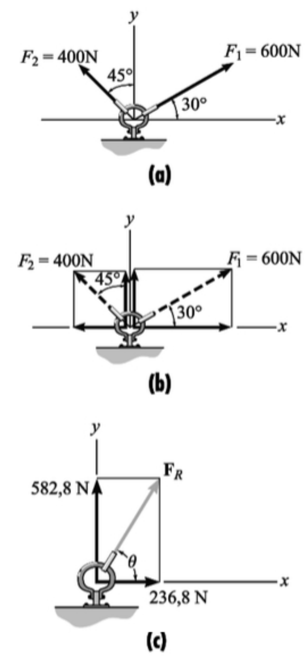


Figura 2.19

Quadro 75: Resolução de exercício na forma escalar e vetorial.
Fonte: LIVRO 09, p.25.

A direção de um vetor $\boldsymbol{A}$, definida a partir de sua representação cartesiana $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$, segundo o autor, podemos considerar os ângulos de direção $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\gamma}$, medidos a partir da origem de $\boldsymbol{A}$ em relação aos eixos coordenados $\boldsymbol{O_x}, \boldsymbol{O_y}, \boldsymbol{O_z}$, como na figura 41. Com as projeções de $\boldsymbol{A}$ e os cossenos diretores abaixo, determina-se as medidas dos ângulos $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ com a inversa das funções cosseno, sendo os cossenos diretores: $\boldsymbol{cos\alpha} = \frac{\boldsymbol{A_x}}{\boldsymbol{A}}$; $\boldsymbol{cos\beta} = \frac{\boldsymbol{A_y}}{\boldsymbol{A}}$; $\boldsymbol{cos\gamma} = \frac{\boldsymbol{A_z}}{\boldsymbol{A}}$.

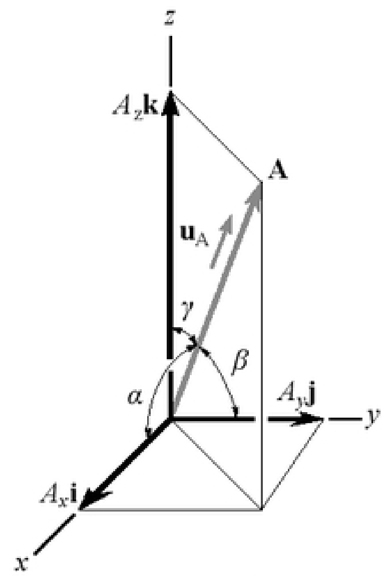


Figura 41: Ângulos $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ definem a direção de $\vec{\boldsymbol{A}}$.
Fonte: LIVRO 09, p.31.

No exemplo do quadro 76 podemos ver que o autor explora vários conceitos matemáticos em situações que envolvem vetores. A partir da representação geométrica mostrada no problema, pede-se que a força $\boldsymbol{F}$ seja representada na forma de um “vetor cartesiano”, ou seja, em sua representação algébrica vetorial (RAV). São várias etapas envolvidas na solução, começando pelo uso da lei do paralelogramo para a decomposição do vetor, seguindo com a obtenção das intensidades das componentes por meio de trigonometria, e a partir disso, chega-se a representação RAV com uso da base $(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$. Ao final, são obtidos os ângulos diretores. Nesse exercício podemos observar algumas operações semióticas de tratamento e, principalmente, de conversão, tais como RGE para RAT, RAT para RAV, exigindo bons conhecimentos para a solução.

Como os livros 10 e 11 não tratam de vetores em um capítulo específico, apenas suas aplicações, como já mencionado, apresentamos alguns exemplos nos quais o conceito de vetor é utilizado para a solução e as representações mais comumente identificadas.

Exemplo 2.10

Expresse a força **F**, mostrada na Figura 2.32*a* como um vetor cartesiano.

SOLUÇÃO

Os ângulos de 60° e 45° que definem a direção de **F** *não* são ângulos de direção coordenados. As duas aplicações sucessivas da lei do paralelogramo são necessárias para decompor **F** em suas componentes *x*, *y*, *z*. Primeiro $\mathbf{F} = \mathbf{F}' + \mathbf{F}_z$, em seguida $\mathbf{F}' = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$ (Figura 2.32*b*). Pela trigonometria, as intensidades das componentes são:

$$F_z = 100 \text{ sen } 60° \text{ kN} = 86{,}6 \text{ kN}$$

$$F' = 100 \cos 60° \text{ kN} = 50 \text{ kN}$$

$$F_x = F' \cos 45° = 50 \cos 45° \text{ kN} = 35{,}4 \text{ kN}$$

$$F_y = F' \text{ sen } 45° = 50 \text{ sen } 45° \text{ kN} = 35{,}4 \text{ kN}$$

Constatando-se que $\mathbf{F}_y$ possui uma direção definida por $-\mathbf{j}$, tem-se:

$$\mathbf{F} = \{35{,}4\mathbf{i} - 35{,}4\mathbf{j} + 86{,}6\mathbf{k}\} \text{ kN}$$

Para mostrar que a intensidade desse vetor é na verdade 100 kN, aplique a Equação 2.4.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$
$$= \sqrt{(35{,}4)^2 + (-35{,}4)^2 + (86{,}6)^2} = 100 \text{ kN}$$

Se necessário, os ângulos de direção coordenados de **F** podem ser determinados pelas componentes do vetor unitário que atuam na direção de **F**. Logo,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}}{F} = \frac{F_x}{F}\mathbf{i} + \frac{F_y}{F}\mathbf{j} + \frac{F_z}{F}\mathbf{k}$$
$$= \frac{35{,}4}{100}\mathbf{i} - \frac{35{,}4}{100}\mathbf{j} + \frac{86{,}6}{100}\mathbf{k}$$
$$= 0{,}354\mathbf{i} - 0{,}354\mathbf{j} + 0{,}866\mathbf{k}$$

de modo que,

$$\alpha = \cos^{-1}(0{,}354) = 69{,}3°$$

$$\beta = \cos^{-1}(-0{,}354) = 111°$$

$$\gamma = \cos^{-1}(0{,}866) = 30{,}0°$$

Esses resultados são mostrados na Figura 2.32*c*.

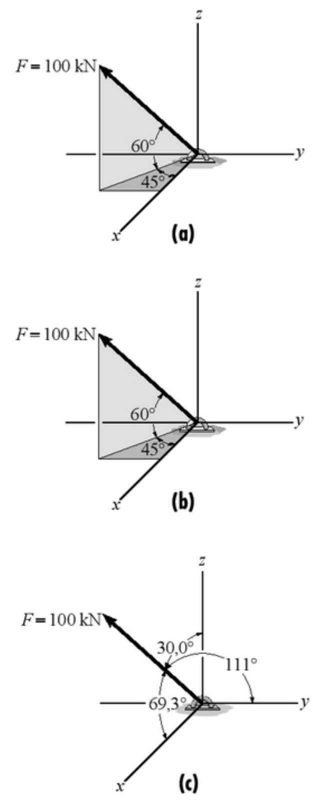


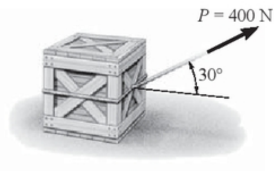
Figura 2.32

Quadro 76: Exercício envolvendo vários conceitos e representações matemáticas.
Fonte: LIVRO 9, p.35.

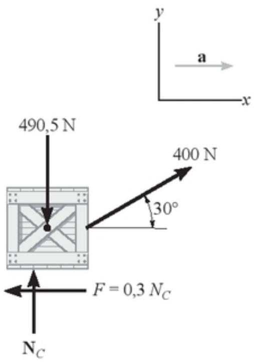
O quadro 77 apresenta um problema de cinemática do livro 10 no qual a posição de uma partícula é dada por meio de uma função vetorial que descreve o vetor posição da partícula em cada instante de tempo. De certa forma o enunciado está em representação RAV e aquilo que se pede no problema é resolvido permanecendo no mesmo registro de representação, falamos de uma operação semiótica de tratamento.

12.71. A posição de uma partícula é $\mathbf{r} = \{(3t^3 - 2t)\mathbf{i} - (4t^{1/2} + t)\mathbf{j} + (3t^2 - 2)\mathbf{k}\}$m, onde t é dado em segundos. Determine a intensidade da velocidade e da aceleração da partícula quando $t = 2$ s.

Quadro 77: Exemplo de aplicação da representação RAV.
Fonte: LIVRO 10, p.35.



(a)



(b)

Figura 13.6

Exemplo 13.1

A caixa de 50 kg mostrada na Figura 13.6*a* repousa sobre uma superfície horizontal para a qual o coeficiente de atrito cinético é $u_k = 0{,}3$. Se a caixa está sujeita a uma força de tração de 400 N como mostrado, determine a velocidade da caixa após 3 s partindo do repouso.

SOLUÇÃO

Utilizando as equações do movimento, podemos relacionar a aceleração da caixa com a força que causa o movimento. A velocidade da caixa pode então ser determinada utilizando-se a cinemática.

Diagrama de corpo livre

O peso da caixa é $W = mg = 50$ kg (9,81 m/s²) = 490,5 N. Como mostrado na Figura 13.6*b*, a força de atrito tem uma intensidade de $F = \mu_k N_C$ e atua para a esquerda, visto que ela se opõe ao movimento da caixa. Supõe-se que a aceleração **a** atue horizontalmente, na direção x positiva. Há duas incógnitas, a saber, N_c e a.

Equações de movimento

Utilizando os dados mostrados no diagrama de corpo livre, temos:

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma_x; \qquad 400 \cos 30° - 0{,}3N_C = 50a \qquad (1)$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = ma_y; \qquad N_C - 490{,}5 + 400 \text{ sen } 30° = 0 \qquad (2)$$

Solucionando a Equação 2 para N_c, substituindo o resultado na Equação 1 e resolvendo para a, resulta em:

$$N_c = 290{,}5 \text{ N}$$

$$a = 5{,}185 \text{ m/s}^2$$

Quadro 78: Exemplo de aplicação das representações RGE, RAM e RAT.
Fonte: LIVRO 10, p.90.

O problema do quadro 78 mostra uma situação na qual as leis de Newton são aplicadas e, por meio de equações vetoriais se chega à solução. Notamos algumas representações no enunciado: representação RGE, pois a força foi desenhada, representação RAM, já que conhecemos o módulo e o valor do ângulo e, na solução, a representação trigonométrica RAT, pois está resolvido com as componentes trigonométricas da força. As transformações entre essas representações caracterizam conversões.

No quadro 79 temos um problema de cinemática de um corpo rígido, cujo enunciado traz informações em representações da língua natural (RLN) e geométrica (RGE). Para a solução é necessário transformar essas representações em RAT e RAV simultaneamente, caracterizando conversão, como podemos observar no exemplo dado pelo autor.

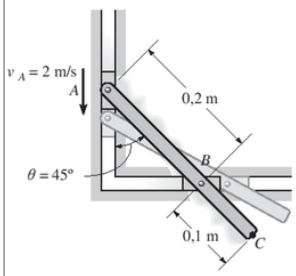
Exemplo 16.6

A barra de ligação mostrada na Figura 16.13*a* é guiada por dois blocos em *A* e *B*, que se deslocam nas ranhuras fixas. Se a velocidade de *A* é 2 m/s para baixo, determine a velocidade de *B* no instante $\theta = 45°$.

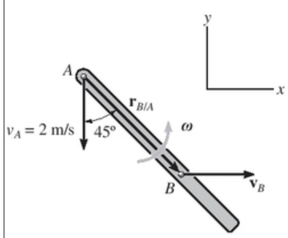
SOLUÇÃO (ANÁLISE VETORIAL)

Diagrama cinemático

Visto que os pontos *A* e *B* estão restritos a se deslocarem ao longo de ranhuras fixas e $\mathbf{v}_A$ está direcionada para baixo, a velocidade $\mathbf{v}_B$ tem de estar direcionada horizontalmente para a direita (Figura 16.13*b*). Este movimento faz com que a barra de ligação gire no sentido anti-horário; isto é, pela regra da mão direita, a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ está direcionada para fora, perpendicular ao plano do movimento. Conhecendo-se a intensidade e a direção de $\mathbf{v}_A$ e as linhas de ação de $\mathbf{v}_B$ e $\boldsymbol{\omega}$, é possível aplicar a equação de velocidade $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ aos pontos *A* e *B* a fim de resolver para as duas intensidades desconhecidas v_B e ω. Visto que $\mathbf{r}_{B/A}$ é necessário, ele também é mostrado na Figura 16.13*b*.



(a)



(b)

Figura 16.13

Equação de velocidade

Expressando cada um dos vetores na Figura 16.13*b*, em termos de suas componentes **i**, **j**, **k**, e aplicando a Equação 16.16 para *A*, o ponto base, e *B*, temos:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + [\omega\mathbf{k} \times (0{,}2 \text{ sen } 45°\mathbf{i} - 0{,}2 \cos 45°\mathbf{j})]$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + 0{,}2\omega \text{ sen } 45°\mathbf{j} + 0{,}2\omega \cos 45°\mathbf{i}$$

Equacionando as componentes **i** e **j**, resulta em

$$v_B = 0{,}2\omega \cos 45° \qquad 0 = -2 + 0{,}2\omega \text{ sen } 45°$$

Desse modo,

$$\omega = 14{,}1 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

$$v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$

Quadro 79: Exemplo de aplicação das representações RGE, RAT e RAV.
Fonte: LIVRO 10, p.272.

No livro 11, *Resistência dos Materiais*, as representações mais comumente utilizadas são a RGE e a RAM, com soluções que podem envolver a representação RAT. Os quadros 80, 81 e 82 que se seguem, exemplificam essa característica.

O quadro 80 apresenta um problema cujo objetivo é determinar tensões internas em um tubo. As forças aplicadas são representadas geometricamente (RGE) e com módulo e ângulo (RAM) como se pode observar no enunciado e figura. Para esse tipo de representação são necessários conhecimentos trigonométricos que são solicitados em muitas situações, tanto em operações de tratamento como de conversão. Não podemos esquecer de mencionar que na Física e nas disciplinas técnicas, em muitas situações, os problemas são apresentados em linguagem natural (RLN), e as demais representações de vetores estão mobilizadas de uma forma indireta. Por exemplo, vejamos o quadro 80, o enunciado do problema diz "força vertical de 50N", temos o módulo da força em "50N" e a medida do ângulo na expressão “força vertical” complementada pela representação geométrica na figura, com isso chegamos às representações RAM e RGE.

EXEMPLO 1.5

Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal em B do cano mostrado na Figura 1.8a. A massa do cano é 2 kg/m, e ele está sujeito a uma força vertical de 50 N e a um momento de 70 N·m em sua extremidade A. O tubo está preso a uma parede em C.

SOLUÇÃO

O problema pode ser resolvido considerando o segmento AB, que *não* envolve as reações do apoio em C.

Diagrama de corpo livre. Os eixos x, y, z são definidos em B, e o diagrama de corpo livre do segmento AB é mostrado na Figura 1.8b. Consideramos que as componentes da força resultante e do momento na seção agem nas direções positivas das coordenadas e passam pelo *centroide* da área da seção transversal em B. O peso de cada segmento do tubo é calculado da seguinte maneira:

$$W_{BD} = (2\ \text{kg/m})(0{,}5\ \text{m})(9{,}81\ \text{N/kg}) = 9{,}81\ \text{N}$$

$$W_{AD} = (2\ \text{kg/m})(1{,}25\ \text{m})(9{,}81\ \text{N/kg}) = 24{,}525\ \text{N}$$

Essas forças agem no centro de gravidade de cada segmento.

Equações de equilíbrio. Aplicando as seis equações escalares de equilíbrio, temos*

$\Sigma F_x = 0;$ $\quad (F_B)_x = 0$ *Resposta*

$\Sigma F_y = 0;$ $\quad (F_B)_y = 0$ *Resposta*

$\Sigma F_z = 0;\quad (F_B)_z - 9{,}81\ \text{N} - 24{,}525\ \text{N} - 50\ \text{N} = 0$

$(F_B)_z = 84{,}3\ \text{N}$ *Resposta*

$\Sigma(M_B)_x = 0; (M_B)_x + 70\ \text{N·m} - 50\ \text{N}\,(0{,}5\ \text{m}) - 24{,}525\ \text{N}\,(0{,}5\ \text{m}) - 9{,}81\ \text{N}\,(0{,}25\ \text{m}) = 0$

$(M_B)_x = -30{,}3\ \text{N·m}$ *Resposta*

$\Sigma(M_B)_y = 0; (M_B)_y + 24{,}525\ \text{N}\,(0{,}625\ \text{m}) + 50\ \text{N}\,(1{,}25\ \text{m}) = 0$

$(M_B)_y = -77{,}8\ \text{N·m}$ *Resposta*

$\Sigma(M_B)_z = 0;$ $\quad (M_B)_z = 0$ *Resposta*

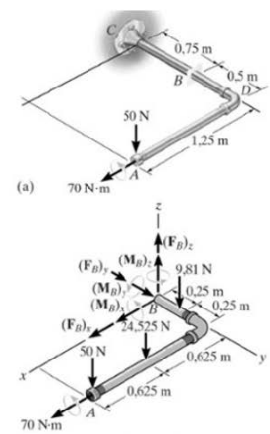


Figura 1.8

Quadro 80: Exemplo de aplicação das representações RGE e RAM.
Fonte: LIVRO 11, p.8.

O problema do quadro 81 apresenta uma situação na qual a linguagem natural (RLN) é a primeira a transparecer. A massa de 80kg do enunciado traz de forma indireta a informação de que temos uma força vertical para baixo, cuja intensidade pode ser calculada pela segunda lei de Newton, portanto, configurando uma representação RAM, que será considerada para a solução. Outras informações são complementadas por meio de ilustração, daí a representação RGR. A solução envolve trigonometria, por conseguinte, justifica a representação RAT considerada.

EXEMPLO 1.7

A luminária de 80 kg é sustentada por duas hastes, AB e BC, como mostra a Figura 1.17a. Se AB tiver diâmetro de 10 mm e BC tiver diâmetro de 8 mm, determine a tensão normal média em cada haste.

SOLUÇÃO

Carga interna Em primeiro lugar, devemos determinar a força axial em cada haste. A Figura 1.17b mostra um diagrama de corpo livre da luminária. Aplicando as equações de equilíbrio de forças, obtemos

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad F_{BC}(\tfrac{4}{5}) - F_{BA}\cos 60° = 0$

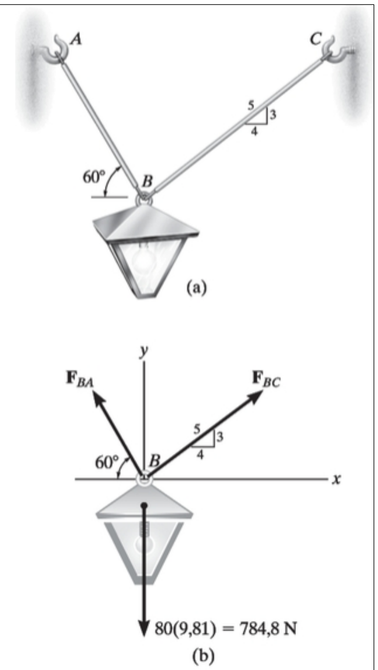
$+\uparrow\Sigma F_y = 0; F_{BC}(\tfrac{3}{5}) + F_{BA}\,\text{sen}\,60° - 784{,}8\text{ N} = 0$

$$F_{BC} = 395{,}2\text{ N}, \quad F_{BA} = 632{,}4\text{ N}$$

Tensão normal média. Aplicando a Equação 1.6, temos

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{395{,}2\text{ N}}{\pi(0{,}004\text{ m})^2} = 7{,}86\text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_{BA} = \frac{F_{BA}}{A_{BA}} = \frac{632{,}4\text{ N}}{\pi(0{,}005\text{ m})^2} = 8{,}05\text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$



Quadro 82: Exemplo de aplicação das representações RLN, RGR, RAM e RAT.
Fonte: LIVRO11, p.18.

EXEMPLO 6.6

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga mostrada na Figura 6.9a.

SOLUÇÃO

Reações nos apoios. As reações nos apoios foram determinadas e são mostradas no diagrama de corpo livre da viga (Figura 6.9d).

Funções de cisalhamento e momento fletor. Visto que há uma descontinuidade na carga distribuída e também uma carga concentrada no centro da viga, duas regiões de x devem ser consideradas para se descreverem as funções de cisalhamento e momento para a viga inteira.

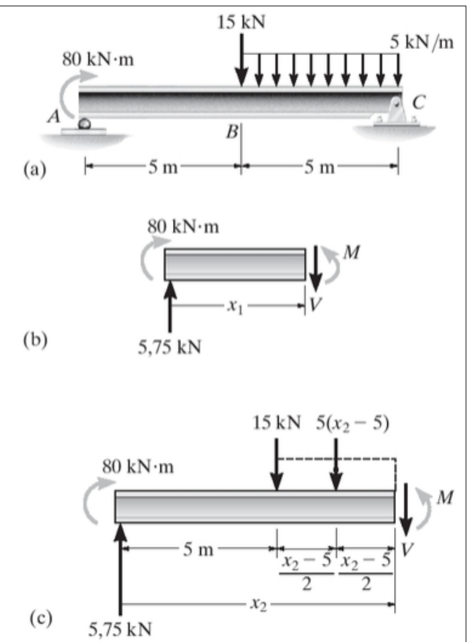
$0 \leq x_1 < 5$ m (Figura 6.9b):

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 5{,}75\text{ kN} - V = 0$

$$V = 5{,}75\text{ kN} \qquad (1)$$

$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad -80\text{ kN}\cdot\text{m} - 5{,}75\text{ kN}\,x_1 + M = 0$

$$M = (5{,}75x_1 + 80)\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad (2)$$



Quadro 81: Exemplo de aplicação das representações RGE e RAM no enunciado e figura.
Fonte: LIVRO 11, p.187.

O exemplo no quadro 82 mostra em seu enunciado a representação RGE para os vetores força apresentados e, para a solução, leva em consideração o módulo e o sentido da força, portanto, se utiliza da representação RAM. O livro 11 não trata de teoria de vetores, nem mesmo em seu apêndice.

5.4 Operações com vetores (adição e multiplicação por um escalar) nos livros de disciplinas técnico-científicas

Como informado, nos livros 10 e 11, não há teoria sobre vetores, portanto, as operações serão discutidas nessa seção apenas para os livros 7, 8 e 9.

5.4.1 Livro 07 e Livro 08

Define-se de modo análogo, nos livros 07 e 08 (Física), a operação de adição geométrica de vetores, para dois ou mais vetores bidimensionais, conforme se verifica na figura 42:

> [...] (1) desenhe o vetor $\vec{a}$ em uma escala conveniente e com o ângulo apropriado. (2) Desenhe o vetor $\vec{b}$ na mesma escala, com a origem na extremidade do vetor $\vec{a}$, também com o ângulo apropriado. (3) O vetor soma $\vec{s}$ é o vetor que vai da origem de $\vec{a}$ à extremidade de $\vec{b}$. [...] quando existem mais de dois vetores, podemos agrupá-los em qualquer ordem para somá-los. (LIVRO 07, p.41)

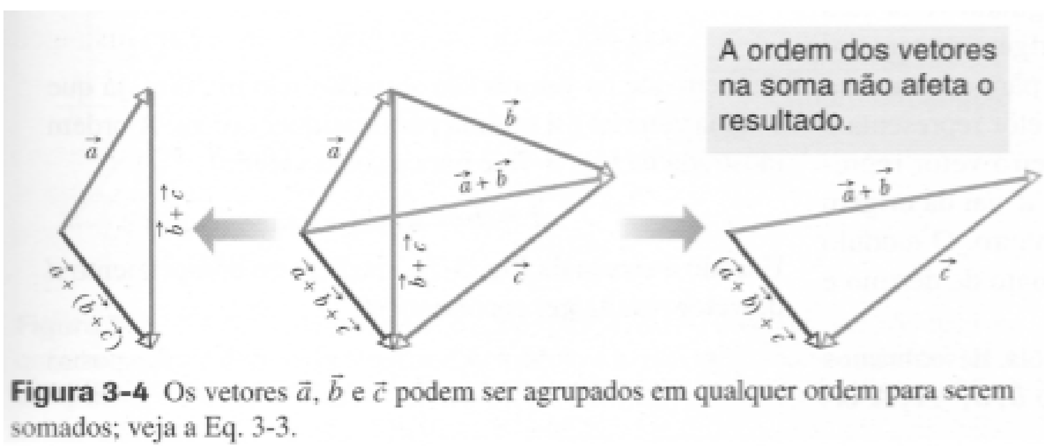


Figura 3-4 Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ podem ser agrupados em qualquer ordem para serem somados; veja a Eq. 3-3.

Figura 42: Soma geométrica de vetores.
Fonte: LIVRO 07, p.41.

A operação de subtração entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é definida pelos autores dos livros 07 e 08 como sendo a soma do vetor $\vec{a}$ com o vetor oposto de $\vec{b}$ $(-\vec{b})$, ou seja, o vetor diferença $\vec{d}$ pode ser obtido assim: $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$. O quadro 83 mostra o processo geométrico nos dois livros.

Na parte esquerda do quadro 83 observamos o exemplo dado pelos autores do livro 07, no qual são apresentados os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $-\vec{b}$ e o processo para a obtenção da diferença entre os vetores de forma clara. No livro 08, os autores mostram o processo de subtração geométrica de forma semelhante, no entanto, apresentam duas maneiras (itens *a* e *b*) distintas de se obter o mesmo resultado. Para o item *a*, fica claro, pelo processo geométrico, que o vetor diferença $\vec{C}$ é a soma do vetor $\vec{A}$ com o vetor $-\vec{B}$, entretanto, no item *b*, o autor posiciona os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ de tal forma que tenham a mesma origem, e na sequência fecha o triângulo com o vetor $\vec{C}$. Nesse item, ao nosso ver, não fica evidente a diferença entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ com o processo geométrico, apenas com o auxílio de um tratamento algébrico, ou seja, partindo de $\vec{B} + \vec{C} = \vec{A}$ chegamos a $\vec{C} = \vec{A} + (-\vec{B})$**.** Isso pode gerar uma certa dificuldade, ao transitar da representação RGE para a representação discursiva.

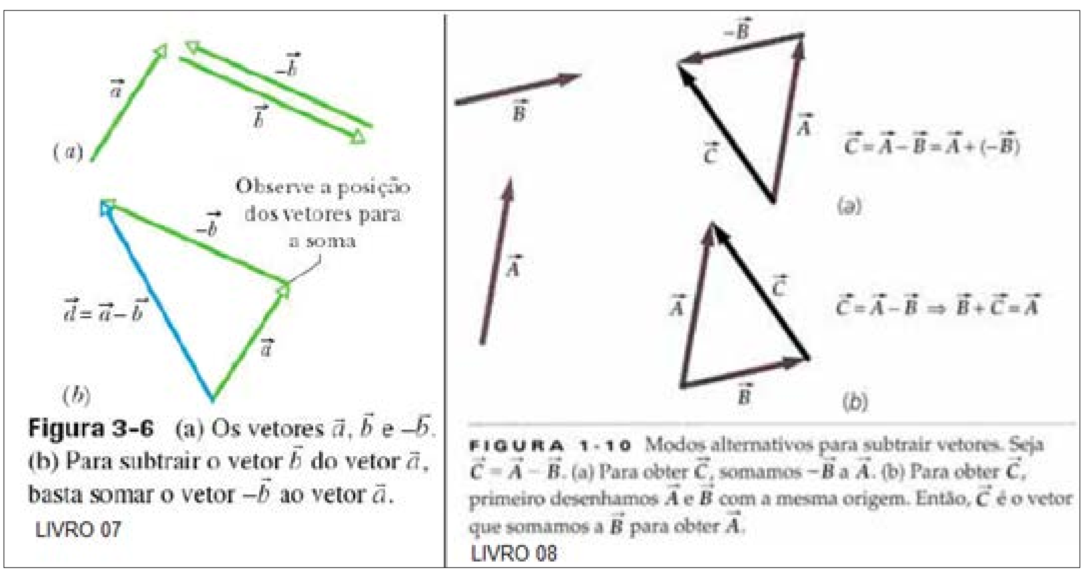


Figura 3-6 (a) Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $-\vec{b}$. (b) Para subtrair o vetor $\vec{b}$ do vetor $\vec{a}$, basta somar o vetor $-\vec{b}$ ao vetor $\vec{a}$.
LIVRO 07

FIGURA 1-10 Modos alternativos para subtrair vetores. Seja $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$. (a) Para obter $\vec{C}$, somamos $-\vec{B}$ a $\vec{A}$. (b) Para obter $\vec{C}$, primeiro desenhamos $\vec{A}$ e $\vec{B}$ com a mesma origem. Então, $\vec{C}$ é o vetor que somamos a $\vec{B}$ para obter $\vec{A}$.
LIVRO 08

Quadro 83: Subtração geométrica de vetores.
Fonte: LIVRO 07, p.42, LIVRO 08, p.15.

Ainda para o processo geométrico de adição, observamos que no livro 07 os autores não apresentaram a regra do triângulo, nem a regra do paralelogramo, como recursos extras. No livro 08, os autores apresentam a regra do paralelogramo, denominada por eles de "método do paralelogramo", figura 43, e explicitam o processo geométrico de adição nela envolvido, porém, não fornecem a fórmula para cálculo do módulo do vetor soma, nem mostram que a diferença entre os vetores poderia ser obtida por meio da segunda diagonal do paralelogramo. A regra do triângulo não é mencionada.

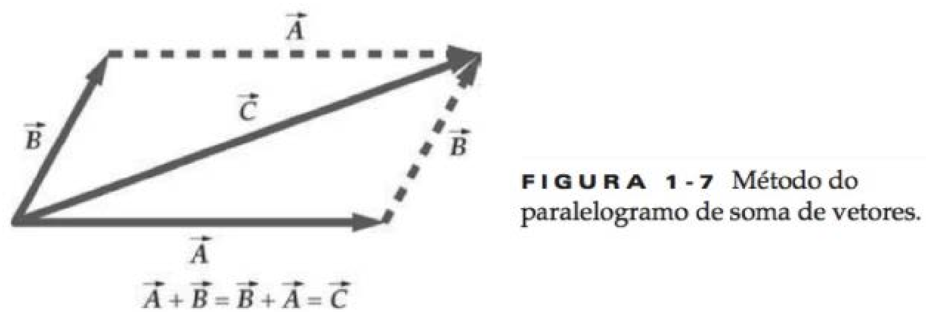


Figura 43: Regra do paralelogramo.
Fonte: LIVRO 08, p.14.

O conceito de adição geométrica de vetores, nesses livros de Física, é apenas de caráter introdutório, com objetivo de iniciar, com os estudantes, a discussão sobre as ideias e os conceitos básicos sobre a noção de vetor. Os autores exibem uma representação algébrica com suas componentes trigonométricas e uma outra em coordenadas da base ortogonal $(\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ como forma mais prática e simples de operar com vetores, como observamos nos exercícios propostos pelos autores, no quadro 84.

A operação de adição definida a partir da representação em coordenadas da base ortogonal $(\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ é definida fazendo-se a soma eixo a eixo, das componentes dos vetores. O autor considera o seguinte exemplo, para os vetores no plano, $\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a_x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{a_y}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ e $\vec{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b_x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{b_y}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ e a soma dada por $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}$ é obtida da seguinte maneira:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{a_x} + \boldsymbol{b_x})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\boldsymbol{a_y} + \boldsymbol{b_y})\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

•2 Um vetor deslocamento $\vec{r}$ no plano xy tem 15 m de comprimento e faz um ângulo $\theta = 30°$ com o semieixo x positivo, como mostra a Fig. 3-26. Determine (a) a componente x e (b) a componente y do vetor.

Figura 3-26 Problema 2.

•9 Dois vetores são dados por $\vec{a} = (4{,}0\text{ m})\hat{i} - (3{,}0\text{ m})\hat{j} + (1{,}0\text{ m})\hat{k}$

e $\vec{b} = (-1{,}0\text{ m})\hat{i} + (1{,}0\text{ m})\hat{j} + (4{,}0\text{ m})\hat{k}$.

Determine, em termos de vetores unitários, (a) $\vec{a} + \vec{b}$; (b) $\vec{a} - \vec{b}$; (c) um terceiro vetor, $\vec{c}$, tal que $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$.

LIVRO 07

57 •• São dados os seguintes vetores: $\vec{A} = 3{,}4\hat{i}$ $4{,}7\hat{j}$, $\vec{B} = (-7{,}7)\hat{i} + 3{,}2\hat{j}$ e $\vec{C} = 5{,}4\hat{i} + (-9{,}1)\hat{j}$. (*a*) Encontre o vetor $\vec{D}$, em notação de vetores unitários, tal que $\vec{D} + 2\vec{A} - 3\vec{C} + 4\vec{B} = 0$. (*b*) Expresse sua resposta para a Parte (*a*) em termos de magnitude e ângulo com o sentido $+x$.

LIVRO 08

Quadro 84: Operações com vetores em suas componentes trigonométricas e na base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$.
Fonte: LIVRO 07, p.56, LIVRO, p.24.

Nos livros 07 e 08, de Física, podemos notar basicamente três representações utilizadas para lidar com os vetores: a representação geométrica, a representação algébrica trigonométrica, na qual é mencionada a possibilidade de representar o vetor com o módulo e direção (ângulo), por meio de coordenadas esféricas – e por fim, a representação em coordenadas da base ortogonal $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$. O conceito de vetor é desenvolvido fortemente apoiado na representação geométrica. Na sequência, são introduzidos conceitos trigonométricos importantes até chegar à representação em coordenadas. A representação que usa a base ortogonal $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ é privilegiada em alguns capítulos subsequentes, porém, as representações geométricas e trigonométricas não são abandonadas, sendo bastante utilizadas e privilegiadas em outros capítulos.

Exemplificando, o capítulo do livro 07 que trata dos conceitos de deslocamento, velocidade e aceleração nos movimentos em duas e três dimensões, conteúdos da Cinemática, tem praticamente toda a sua teoria desenvolvida com base em vetores representados pelas coordenadas da base ortogonal $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$, ou seja, representação RAV, veja quadro 85.

REVISÃO E RESUMO

Vetor Posição A localização de uma partícula em relação à origem de um sistema de coordenadas é dada por um *vetor posição* $\vec{r}$, que, em termos dos vetores unitários, assume a forma

$$\vec{r} = x\hat{\text{i}} + y\hat{\text{j}} + z\hat{\text{k}}. \tag{4-1}$$

onde $x\hat{\text{i}}$, $y\hat{\text{j}}$ e $z\hat{\text{k}}$ são as componentes vetoriais do vetor posição $\vec{r}$ e x, y e z são as componentes escalares (e também as coordenadas da partícula). Um vetor posição pode ser descrito por um módulo e um ou dois ângulos, pelas componentes vetoriais ou pelas componentes escalares.

Deslocamento Se uma partícula se move de tal forma que o vetor posição muda de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$, o *deslocamento* $\Delta\vec{r}$ da partícula é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{4-2}$$

O deslocamento também pode ser escrito na forma

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\text{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\text{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\text{k}} \tag{4-3}$$

$$= \Delta x\hat{\text{i}} + \Delta y\hat{\text{j}} + \Delta z\hat{\text{k}}. \tag{4-4}$$

Velocidade Média e Velocidade Instantânea Se uma partícula sofre um deslocamento $\Delta\vec{r}$ em um intervalo de tempo Δt, a velocidade média $\vec{v}_{\text{méd}}$ nesse intervalo de tempo é dada por

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{4-8}$$

Quando Δt na Eq. 4-8 tende a 0, $\vec{v}_{\text{méd}}$ tende para um limite $\vec{v}$ que é chamado de *velocidade instantânea* ou, simplesmente, *velocidade*:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{4-10}$$

Em termos dos vetores unitários, a velocidade instantânea assume a forma

$$\vec{v} = v_x\hat{\text{i}} + v_y\hat{\text{j}} + v_z\hat{\text{k}}, \tag{4-11}$$

onde $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ e $v_z = dz/dt$. A velocidade instantânea $\vec{v}$ de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula na posição da partícula.

Aceleração Média e Aceleração Instantânea Se a velocidade de uma partícula varia de $\vec{v}_1$ para $\vec{v}_2$ no intervalo de tempo Δt, a *aceleração média* durante o intervalo Δt é

$$\vec{a}_{\text{méd}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{4-15}$$

Quando Δt na Eq. 4-15 tende a zero, $\vec{a}_{\text{méd}}$ tende para um limite $\vec{a}$ que é chamado de *aceleração instantânea* ou, simplesmente, *aceleração*:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{4-16}$$

Na notação de vetores unitários,

$$\vec{a} = a_x\hat{\text{i}} + a_y\hat{\text{j}} + a_z\hat{\text{k}}, \tag{4-17}$$

onde $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$ e $a_z = dv_z/dt$.

Movimento de Projéteis *Movimento balístico* é o movimento de uma partícula lançada com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$. Durante o percurso, a aceleração horizontal da partícula é zero e a aceleração vertical é a aceleração de queda livre, $-g$. (O deslocamento para cima é escolhido como sentido positivo.) Se $\vec{v}_0$ é expressa através de um módulo (a velocidade escalar v_0) e um ângulo θ_0 (medido em relação à horizontal), as equações de movimento da partícula ao longo do eixo horizontal x e do eixo vertical y são

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t, \tag{4-21}$$

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \tag{4-22}$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt, \tag{4-23}$$

$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4-24}$$

A **trajetória** de uma partícula em movimento balístico tem a forma de uma parábola e é dada por

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2}, \tag{4-25}$$

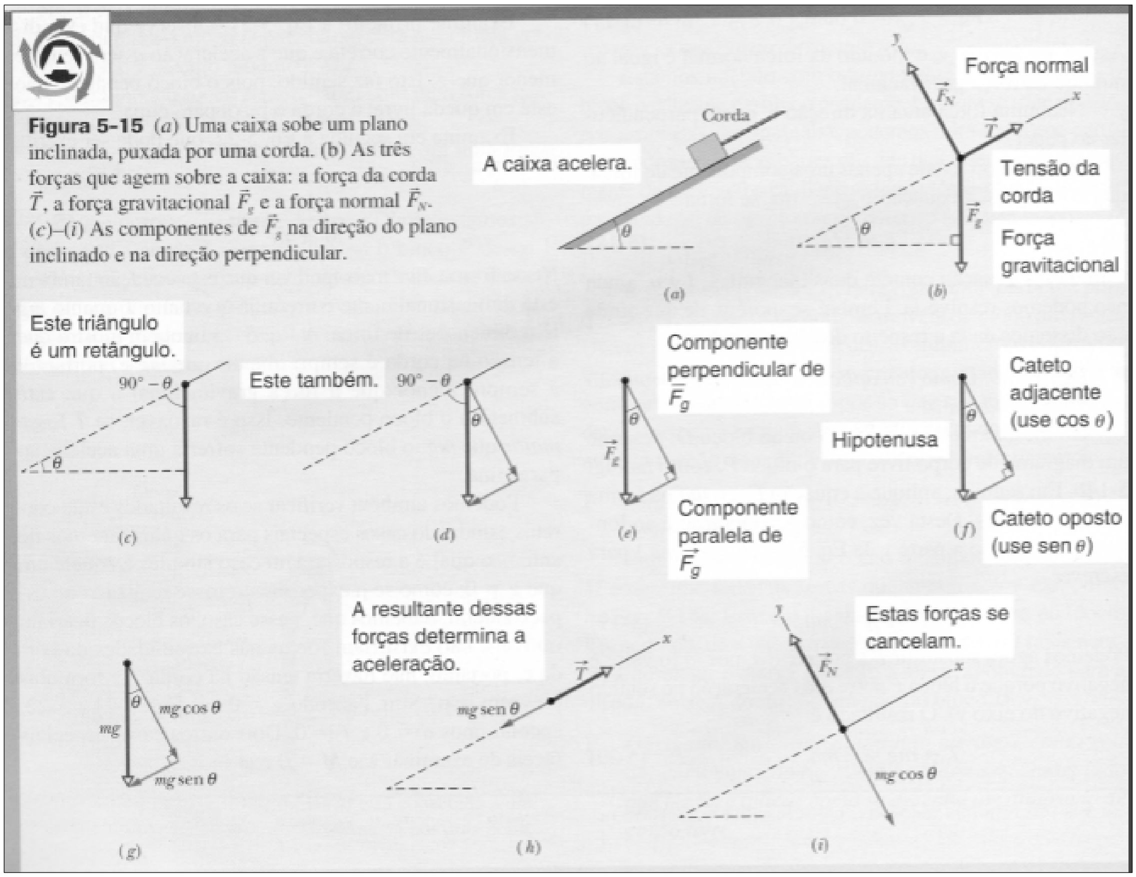
se x_0 e y_0 das Eqs. 4-21, 4-22, 4-23 e 4-24 forem nulos. O **alcance horizontal** R da partícula, que é a distância horizontal do ponto de lançamento ao ponto em que a partícula retorna à altura do ponto de lançamento, é dado por

$$R = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen} 2\theta_0. \tag{4-26}$$

Quadro 85: Posição, deslocamento, velocidade e aceleração em vetores da base ortogonal $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$.
Fonte: LIVRO 07, p.78.

Os capítulos que tratam de força e movimento, Dinâmica, privilegiam o uso da representação geométrica (RGE) e da algébrica trigonométrica (RAT), como podemos observar no quadro 86.

No livro 07, no capítulo inteiramente dedicado aos vetores são apresentados os três registros de representação de vetores que serão explorados e utilizados ao longo do livro. Observa-se claramente uma sequência de construção dos registros de representação, promovendo articulação entre eles, ou seja, há uma transformação de conversão entre os registros. Neste livro não há ênfase com o rigor do formalismo matemático, pois procura uma maneira mais prática e objetiva de lidar com o objeto vetor e, também, deve-se frisar que algumas notações divergem das adotadas em livros de Matemática, como a simbologia para versores e módulo de vetor já mencionada neste trabalho.



Quadro 86: Forças num plano inclinado com representação geométrica e trigonométrica.
Fonte: LIVRO 07, p.106.

No livro 08, de forma análoga ao que acontece no livro 07, vetores são tratados no capítulo 1 do livro, porém, de maneira mais sucinta, tratando das representações geométrica (RGE), trigonométrica (RAT) e da algébrica vetorial (RAV), abordando basicamente as operações de adição e de subtração, sendo menos abrangente quando comparado ao livro 07. O capítulo 1 do livro 08 não traz os produtos escalar e vetorial, ao contrário do livro 07. Guardadas as pequenas diferenças, ambos os livros dão tratamentos semelhantes a esse tema.

A representações RAV e RAT são muito utilizadas na Física e, também, na engenharia como ajudam a mostrar os quadros 85 e 86, no entanto, as representações geométricas RGE ou gráficas (RGR) estão sempre presentes nos enunciados das situações problemas de muitas disciplinas técnicas, sobretudo nos tópicos nos quais a força é o vetor considerado.

5.4.2 Livro 09

As operações de adição de vetores no Livro 09 também são iniciadas pelas regras geométricas de adição vetorial, tal como a regra do triângulo e a regra do paralelogramo, utilizada aqui para somar forças, como ilustrado na figura 44. O autor aplica a lei dos cossenos ou a lei dos senos para calcular a intensidade e o valor do ângulo que definem o vetor soma, como já foi apresentado no tópico 5.3.2 deste capítulo.

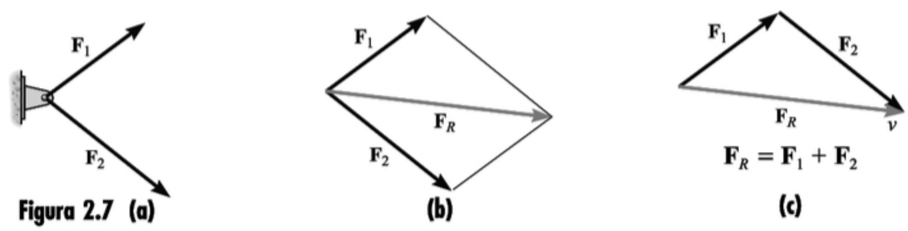


Figura 44: Adição geométrica de duas forças usando as regras do paralelogramo e do triângulo.
Fonte: LIVRO 09, p.13.

O autor define a subtração entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, o vetor $\vec{R} = \vec{A} + (-\vec{B})$, ou seja, ao vetor $\vec{A}$ somamos o oposto de $\vec{B}$, conforme mostrado na figura 45.

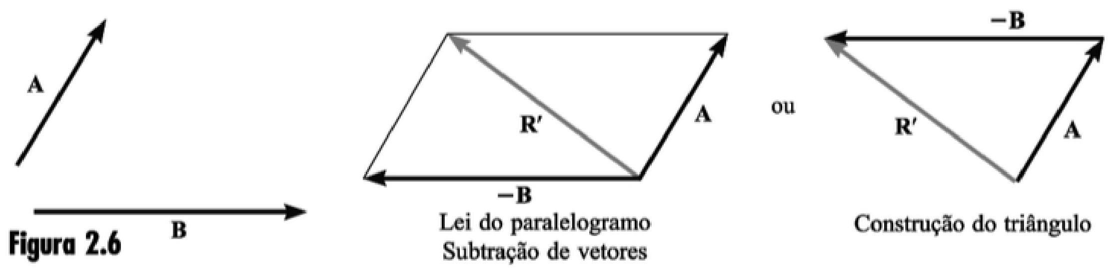


Figura 45: Subtração de vetores.
Fonte: LIVRO 9, p.13.

A adição de um sistema de forças coplanares pode ser realizada, segundo o autor, após a decomposição dos vetores força em suas componentes retangulares, ao longo dos eixos $\boldsymbol{O_x}$ e $\boldsymbol{O_y}$, a partir dos quais essas componentes são representadas. Uma vez definida a notação vetorial cartesiana (denominação do autor), busca-se a soma total em cada eixo coordenado, como podemos observar no quadro 87, no qual se trata do processo completo.

De forma análoga, a operação de adição anterior pode ser estendida a vetores no espaço, e nesta situação o autor privilegia a notação de vetor cartesiano, representando a soma de vetores com a seguinte equação:

$$\boldsymbol{F}_R = \sum \boldsymbol{F} = \sum F_x \boldsymbol{i} + \sum F_y \boldsymbol{j} + \sum F_z \boldsymbol{k}$$

Nesse caso, $\sum F_x$, $\sum F_y$ e $\sum F_z$ representam a soma algébrica das componentes vetoriais nos eixos coordenados $\boldsymbol{O_x}$, $\boldsymbol{O_y}$ e $\boldsymbol{O_z}$.

Resultante de forças coplanares

$$\mathbf{F}_1 = F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_2 = -F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_3 = F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j}$$

O vetor resultante é, portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3\\ &= F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j} - F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j}\\ &= (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x})\,\mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y})\,\mathbf{j}\\ &= (F_{Rx})\,\mathbf{i} + (F_{Ry})\,\mathbf{j}\end{aligned}$$

Se for usada a *notação escalar*, temos então,

$(\overset{+}{\rightarrow})$ $\quad F_{Rx} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}$

$(+\uparrow)$ $\quad F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$

Esses são os *mesmos* resultados das componentes $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ de $\mathbf{F}_R$ determinados anteriormente.

As componentes da força resultante de qualquer número de forças coplanares podem ser representadas simbolicamente pela soma algébrica das componentes x e y de todas as forças, ou seja,

$$\boxed{\begin{aligned}F_{Rx} &= \Sigma F_x\\ F_{Ry} &= \Sigma F_y\end{aligned}} \qquad (2.1)$$

Uma vez que estas componentes são determinadas, elas podem ser esquematizadas ao longo dos eixos x e y com seus sentidos de direção apropriados, e a força resultante pode ser determinada pela adição vetorial, como mostra a Figura 2.17. Pelo esquema, a intensidade de $\mathbf{F}_R$ é determinada pelo teorema de Pitágoras, ou seja,

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

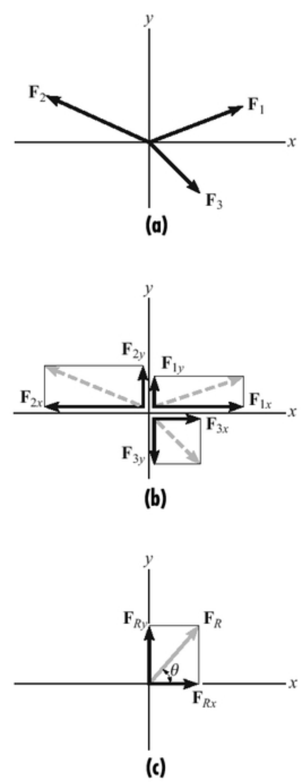
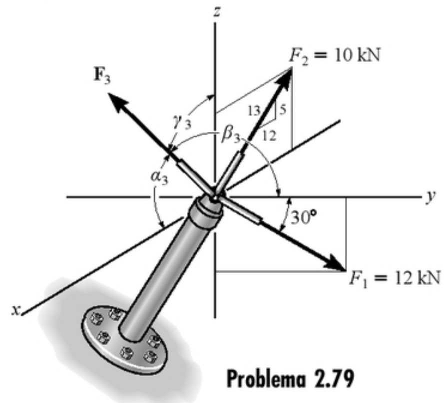


Figura 2.17

Quadro 87: Adição de vetores a partir das notações escalar e vetorial.
Fonte: LIVRO 09, p.23.

De maneira bastante objetiva e prática, o autor articula e transita entre as representações de vetor mostradas neste livro, embora mantenha sempre o mesmo sentido da operação de conversão, qual seja da representação geométrica para a algébrica trigonométrica (denominada, pelo autor, de notação escalar) e desta para a representação em coordenadas da base ortogonal $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ (denominada, pelo autor, de notação vetorial cartesiana).

2.79. Especifique a intensidade de $\mathbf{F}_3$ e seus ângulos de direção coordenados α_3, β_3, γ_3 de modo que a força resultante seja $\mathbf{F}_R = \{9\mathbf{j}\}$ kN.



Problema 2.79

Exemplo 2.14

A força na Figura 2.40*a* atua sobre o gancho. Expresse-a como um vetor cartesiano.

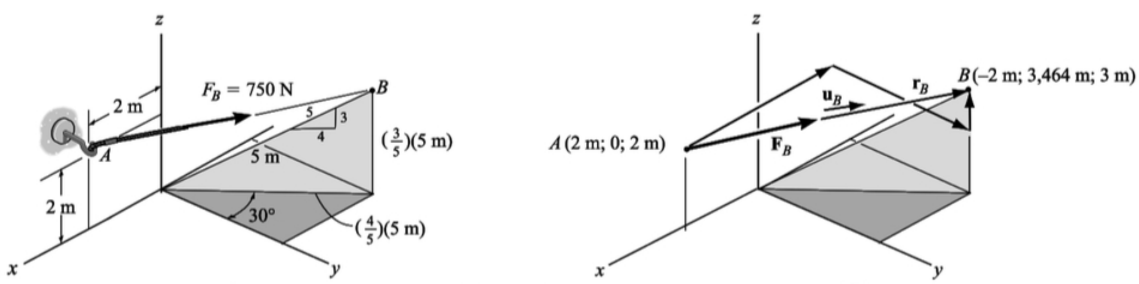


Figura 2.40

Quadro 88: Problemas envolvendo notação escalar e notação vetorial cartesianas.
Fonte: LIVRO 09, p.39–43.

A essas operações de transformação de conversão, acrescentam-se outras componentes de conhecimento matemático, tais como semelhança de triângulos, conceitos de vetor posição e coordenadas de ponto, por exemplo, conferindo às operações maior complexidade, sejam na conversão ou mesmo no tratamento das representações, que pode ser observada nos exercícios apresentados no quadro 88.

5.5 Análise dos exercícios propostos nos livros técnico-científicos

Neste subcapítulo iremos analisar os exercícios propostos nos livros 7 e 8 de Física e, nos livros técnicos 9, 10 e 11.

5.5.1 Análise dos exercícios propostos nos livros de Física

Nesta etapa, o objetivo é estabelecer uma visão geral quanto aos registros de representações utilizados e as operações semióticas explicitas ou implícitas nos exercícios propostos nos livros didáticos de Física selecionados (07 e 08). Para o desenvolvimento das análises, consideraremos as notações já estabelecidas no quadro 7 (p.93), no qual foram atribuídas siglas para as representações semióticas aqui consideradas.

5.5.1.1 Análise dos exercícios propostos no Livro 07

No Livro 07 analisaremos os seguintes capítulos: 3 – *Vetores*, 4 – *Movimento em duas e três dimensões* e 5 – *Força e movimento I*. Os dois primeiros capítulos que tratam de “Medição” e “Movimento retilíneo” não aplicam, ainda, a linguagem vetorial e por esse motivo os exercícios ali propostos não foram analisados. O capítulo 3 foi escolhido por tratar de vetores propriamente. Os capítulos 4 e 5 foram escolhidos por terem uma boa representatividade dentro do livro, com relação aos problemas propostos nos quais são utilizados os vetores como linguagem matemática. Os demais capítulos, não selecionados, apresentam menor número de problemas com aplicação de vetores.

A escolha dos capítulos mencionados justifica-se pelo fato já exposto e também, porque a escolha dos demais capítulos elevaria em muito a quantidade de problemas a serem analisados.

Na sequência, quantificaremos as representações encontradas nos problemas propostos nos capítulos selecionados dos livros didáticos de Física, identificando os tipos de representações e os tipos de operações semióticas implícitas ou explicitas. Ao final de cada livro didático compilaremos os resultados analisados, e ao término, uma compilação geral de todos os resultados dos livros 07 e 08.

Para ilustrar a análise selecionamos os exercícios 2 e 16 (LIVRO 07, p.56) nos quais identificaremos os tipos de representações e as operações semióticas presentes. No exercício 2 exibido no quadro 89, reconhecemos no enunciado a representação algébrica módulo-ângulo (RAM) e também uma representação gráfica (RGR) do vetor por meio da figura 3.26 introduzida pelos autores.

•2 Um vetor deslocamento $\vec{r}$ no plano xy tem 15 m de comprimento e faz um ângulo $\theta = 30°$ com o semieixo x positivo, como mostra a Fig. 3-26. Determine (a) a componente x e (b) a componente y do vetor.

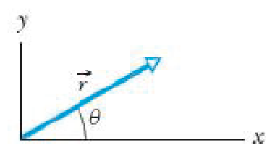


Figura 3-26 Problema 2.

Quadro 89: Exercício 2 para identificar o tipo de representação e a operação semiótica.
Fonte: LIVRO 07, p.56.

Para a resolução do exercício é necessária uma transformação da representação RAM para a representação algébrica trigonométrica (RAT), caracterizando uma conversão. Não levamos em conta na resolução a transformação da representação RGR para RAT, por considerarmos não ser essa, obrigatória para atingir a finalidade do exercício.

O quadro 90 mostra o exercício 16 a partir do qual observamos a presença do enunciado em representação algébrica vetorial (RAV), sendo que para a resolução do exercício foi solicitado que os resultados das operações de adição e subtração fossem apresentados na representação RAM, caracterizando uma conversão.

•16 Para os vetores $\vec{a} = (3{,}0\ \text{m})\hat{\text{i}} + (4{,}0\ \text{m})\hat{\text{j}}$ e $\vec{b} = (5{,}0\ \text{m})\hat{\text{i}} + (-2{,}0\ \text{m})\hat{\text{j}}$, determine $\vec{a} + \vec{b}$ (a) em termos de vetores unitários e em termos (b) do módulo e (c) do ângulo (em relação a $\hat{\text{i}}$). Determine $\vec{b} - \vec{a}$ (d) em termos de vetores unitários e em termos (e) do módulo e (f) do ângulo.

Quadro 90: Exercício 16 para identificar o tipo de representação e a operação semiótica.
Fonte: LIVRO 07, p.56.

No quadro 91 encontramos um exercício com enunciado em representação RLN e a resolução leva a duas representações distintas, uma representação RGR quando é solicitado que se desenhe um “diagrama vetorial” e outra RAM quando se pede o resultado em “módulo e ângulo” e, portanto, temos duas transformações de conversão.

•12 Um carro viaja 50 km para leste, 30 km para o norte e 25 km em uma direção 30º a leste do norte. Desenhe o diagrama vetorial e determine (a) o módulo e (b) o ângulo do deslocamento do carro em relação ao ponto de partida.

Quadro 91: Exercício com duas conversões.
Fonte: LIVRO 07, p.56.

O exercício proposto 9 no quadro 92 apresenta vetores na representação RAV. Para a solução não há necessidade de transformação da representação RAV, apenas devemos resolver as operações de adição e subtração solicitadas, permanecendo no mesmo registro. Nesse caso consideramos apenas a operação semiótica de tratamento.

•9 Dois vetores são dados por $\vec{a} = (4{,}0\text{ m})\hat{i} - (3{,}0\text{ m})\hat{j} + (1{,}0\text{ m})\hat{k}$

e $\vec{b} = (-1{,}0\text{ m})\hat{i} + (1{,}0\text{ m})\hat{j} + (4{,}0\text{ m})\hat{k}$.

Determine, em termos de vetores unitários, (a) $\vec{a}+\vec{b}$; (b) $\vec{a}-\vec{b}$; (c) um terceiro vetor, $\vec{c}$, tal que $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=0$.

Quadro 92: Representação de vetores em RAV no exercício 9.
Fonte: LIVRO 07, p.56.

Com os exemplos dados nos quadros 89, 90, 91 e 92 e critérios de análise já explicitados, exporemos os resultados referentes aos capítulos 3, 4 e 5 do Livro 07 no quadro a seguir.

Capítulo/subcapítulo	**Exercícios propostos**	**Representações nos enunciados**	**Operações Semióticas**	**Sentido da conversão**
3. Vetores	64	6 RGR, 7 RAC, 15 RLN, 19 RAM e 20 RAV	27 TR e 39 CV	1 RAM para RGR 1 RAC para RAV 2 RLN para RGR 2 RLN para RAV 4 RAC para RAM 5 RAV para RAM 5 RGR para RAM 5 RAM para RAV 6 RAM para RAT

				8 RLN para RAM
4. Movimento em duas e três dimensões	94	2 RGE, 3 RAC, 26 RAV, 30 RLN e 33 RAM	54 TR e 40 CV	1 RAV para RGR 1 RAC para RAM 1 RLN para RAV 1 RAM para RAV 2 RAV para RAC 2 RAC para RAV 2 RAM para RAC 2 RGE para RAT 4 RAV para RAM 7 RAM para RAT 17 RLN para RAM
5. Força e movimento I	47	1 RGR, 6 RAV, 20 RAM e 21 RLN	23 TR e 24 CV	1 RAV para RAM 2 RAM para RAT 2 RLN para RAV 4 RLN para RAM 5 RAM para RAV 10 RLN para RAT
Total	205	2 RGE, 7 RGR, 10 RAC, 52 RAV, 66 RLN e 72 RAM	104 TR e 103 CV	1 RAM para RGR 1 RAV para RGR 2 RLN para RGR 2 RAV para RAC 2 RAM para RAC 2 RGE para RAT 3 RAC para RAV 5 RLN para RAV 5 RAC para RAM 5 RGR para RAM 10 RAV para RAM 10 RLN para RAT 11 RAM para RAV 15 RAM para RAT 29 RLN para RAM

Quadro 93: Representações nos exercícios propostos do Livro 07 e operações semióticas.
Fonte: Acervo pessoal.

O capítulo 03 do Livro 07 possui 65 problemas, porém, o número 4 não foi analisado, pois não trata de vetores, somente sobre conversão entre medidas de ângulos. A maior parte dos problemas do capítulo 03 remete às operações de conversão, 39 CV e 27 TR. O capítulo 04 possui total de 119 problemas, dos quais 25 não serão computados para análise por não terem em seus enunciados o objeto vetor, nem tão pouco suas resoluções necessitem do uso da linguagem vetorial, bastando para tal as equações do movimento. Os problemas que não entraram para o cômputo das análises são: 21 a 25, 29, 56 a 59, 61, 62, 71, 92, 101, 102, 104, 108 a 111, 115 a 118. O capítulo 05 contém 96 problemas dos quais 49 não entraram para análise, pois seus enunciados e possíveis resoluções não contemplam o uso da linguagem vetorial, apenas equações oriundas das leis de Newton. Os problemas que não entraram na contagem da análise são: 13, 15, 16, 19, 20, 22, 25 a 30, 33, 37, 41, 43 a 46, 48, 50 a 56, 58, 59, 61, 63, 65, 67, 70, 76, 79 a 81, 83, 85 a 90, 92, 93, 95 e 96.

O total de problemas avaliados nos três capítulos do livro 07 é de 280, no entanto, como já explicitado, somente 205 entraram para análise. Dois dados importantes chamam atenção no quadro 93: primeiro, praticamente metade das operações semióticas envolvidas são de conversão, segundo, as representações são bastante variadas e as conversões, também, muito diversificadas, ou seja, observamos 15 conversões distintas, exigindo conhecimento mais amplo, pois necessita conhecer mais de um tipo de representação e como transitar entre elas. As representações RAC, RAV e RAM compõem a maioria das conversões envolvendo tais representações e também encontramos a RAT, que abrange conceitos trigonométricos importantes para a solução dos problemas.

Ainda no quadro 93, podemos observar as representações mais frequentes nos enunciados dos problemas: 52 representações RAV, 66 RLN e 72 RAM. Dos 52 enunciados com representações RAV, 10 exigem a conversão para representação RAM, dos 66 enunciados com representações RLN temos 10 conversões para RAT e 29 para RAM e, por fim, dos 72 enunciados com representação RAM, 11 pedem conversões para RAV e 15 para RAT. Nota-se nessas conversões a necessidade premente de conhecimento de trigonometria básica como condição para se efetuar essas operações semióticas, denotando seu uso expressivo na Física.

5.5.1.2 Análise dos exercícios propostos no Livro 08

O próximo passo é analisar os problemas propostos no Livro 08, nos capítulos 1- *Medida e vetores*, 3- *Movimento em duas e três dimensões* e 4- *Leis de Newton*. O capítulo 2- *Movimento em uma dimensão* não apresenta problemas com utilização da linguagem vetorial, apenas as equações cinemáticas para o estudo do movimento em uma dimensão, com 122 problemas propostos. A escolha dos demais capítulos segue a mesma lógica apontada para o livro 07, portanto, não entraremos em mais detalhes.

Assim como o fizemos para o livro 07, selecionaremos alguns exemplos para ilustrar as análises feitas a partir do livro 08, com posterior apresentação dos dados coletados no quadro 98.

O quadro 94 mostra um problema do livro 08 que será o primeiro exemplo de análise para identificar a representação no enunciado e a operação semiótica relacionada para a solução. Temos nesse caso um enunciado na representação RAM, pois o vetor é descrito por seu módulo e ângulo e para a solução será necessário transformar para a representação RAC, porque o problema pede que se determinem as coordenadas no plano. Essa operação é caracterizada por uma conversão de RAM para RAC.

> **53** • Determine as componentes x e y dos seguintes três vetores do plano xy. (*a*) Um vetor deslocamento de 10 m que forma um ângulo de 30° no sentido horário a partir do eixo $+y$. (*b*) Um vetor velocidade de 25 m/s que forma um ângulo de 40° no sentido anti-horário com o eixo $-x$. (*c*) Uma força de 40 lb que forma um ângulo de 120° no sentido anti-horário com o eixo $-y$.

Quadro 94: Problema selecionado para identificar representação e operação semiótica.
Fonte: LIVRO 08, p.24.

No quadro 95 observamos que o enunciado do problema está em representação RAC, visto que estão sendo fornecidas as coordenadas no plano cartesiano; a solução deve ser executada na representação RAM como está sendo determinado no enunciado. Isso caracteriza uma conversão de RAC para RAM.

> **54** • Reescreva os seguintes vetores em termos da magnitude e do ângulo (medido no sentido anti-horário a partir do eixo $+x$). (*a*) Um vetor deslocamento com uma componente x de +8,5 m e uma componente y de −5,5 m. (*b*) Um vetor velocidade com uma componente x de −75 m/s e uma componente y de +35 m/s. (*c*) Um vetor força com uma magnitude de 50 lb que está no terceiro quadrante e tem uma componente x cuja magnitude vale 40 lb.

Quadro 95: Problema selecionado para identificar representação e operação semiótica.
Fonte: LIVRO 08, p.24.

O problema do quadro 96 tem seu enunciado em representação RLN e a solução está em representação RAV, pois é pedido que os vetores sejam representados em termos de vetores unitários. Temos nesse caso duas conversões: de RLN para RGR e de RGR para RAV.

38 • O ponteiro dos minutos de um relógio de parede tem um comprimento de 0,50 m e o ponteiro das horas tem o comprimento de 0,25 m. Tome o centro do relógio como origem e use um sistema de coordenadas cartesianas com o eixo x positivo apontando para as 3 horas e o eixo y positivo apontando para as 12 horas. Usando os vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$, expresse os vetores posição da ponta do ponteiro das horas ($\vec{A}$) e da ponta do ponteiro dos minutos ($\vec{B}$) quando o relógio marca (*a*) 12:00, (*b*) 3:00, (*c*) 6:00, (*d*) 9:00.

Quadro 96: Problema selecionado para identificar representação e operação semiótica.
Fonte: LIVRO 08, p.24.

O problema 26 do quadro 97 apresenta vetores velocidade na representação RGE. A solução para a aceleração solicitada é obtida exclusivamente com a soma geométrica dos vetores, portanto, esta operação envolve apenas representações RGE num mesmo sistema semiótico; consideramos então, um tratamento.

26 • As velocidades inicial e final de uma partícula são como as mostradas na Figura 3-30. Encontre a orientação da aceleração média.

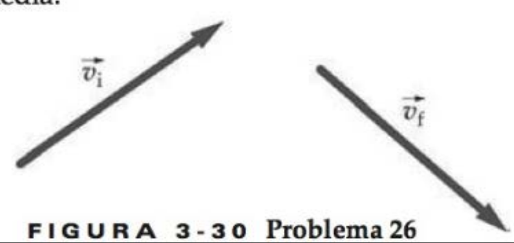


FIGURA 3-30 Problema 26

Quadro 97: Problema 26 com vetores em representação RGE.
Fonte: LIVRO 8, p.84.

Com os exemplos de análises já expostos, apresentaremos no quadro 98 o resumo dos resultados para os problemas dos capítulos selecionados.

No capítulo 1, *Medida e vetores*, temos 78 problemas propostos, dos quais apenas 12 (52 a 60, 74, 77 e 78) são relacionados aos vetores, os demais tratam de conversões de unidades, algarismos significativos e análise dimensional, que não fazem parte desse trabalho. Nos enunciados dos problemas desse capítulo nota-se a predominância das representações RAM e RLN e, as operações semióticas de conversão são também predominantes, distribuídas em sete combinações diferentes. A maioria das conversões, neste capítulo, envolvem as representações RLN, RAM, RAV e RAC e são necessários conhecimentos de trigonometria para realizar essas operações semióticas.

Capítulo/subcapítulo	Exercícios propostos	Representações nos enunciados	Operações Semióticas	Sentido da conversão
1. Medida e vetores	12	1 RAV, 1 RAC, 4 RAM e 6 RLN	2 TR e 14 CV	1 RAC para RAM 1 RAV para RAM 1 RGR para RAV 3 RLN para RGR 2 RLN para RAM 3 RAM para RAV 3 RAM para RAC
3. Movimento em duas e três dimensões	73	1 RAC, 2 RGE, 4 RAV, 25 RAM, 41 RLN	39 TR e 35 CV	1 RLN para RAC 1 RAM para RAV 1 RAV para RAM 3 RLN para RAV 10 RLN para RGE 19 RLN para RAM
4. Leis de Newton	60	2 RAM, 2 RAV, 4 RGE, 52 RLN	3 TR e 83 CV	6 RGE para RAM 8 RAM para RAT 9 RLN para RAM 16 RGE para RAT 44 RLN para RGE
Total	145	2 RAC, 6 RGE, 7 RAV, 31 RAM, 99 RLN	44 TR e 132 CV	1 RAC para RAM 1 RLN para RAC 2 RAV para RAM 3 RLN para RGR 3 RAM para RAC 4 RLN para RAV 4 RAM para RAV 6 RGE para RAM 8 RAM para RAT 16 RGE para RAT 30 RLN para RAM 54 RLN para RGE

Quadro 98: Representações nos exercícios propostos do Livro 08 e operações semióticas.
Fonte: Acervo pessoal.

O capítulo 3, *Movimento em duas e três dimensões*, possui 122 problemas propostos, dos quais 49 não utilizam linguagem vetorial, nem para o enunciado, nem para a solução; portanto, não entram para o quadro 98 os seguintes problemas: 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 19, 24, 25, 28, 29, 31, 35, 37, 58, 62, 65, 66, 68 a 73, 75, 78 a 80, 82, 90, 91, 94, 95, 97 a 99, 103, 105, 107, 109, 112, 113, 117 a 119 e 121. Os problemas predominantemente apresentam os enunciados mobilizando representações RAM e RLN e, as operações semióticas ficam com 39 TR e 35 CV. As conversões estão distribuídas em 6 combinações diferentes de representações e a maioria envolve as representações RLN, RGE e RAM, que exigem conhecimentos trigonométricos.

No capítulo 4, *Leis de Newton*, encontramos 99 problemas propostos, dos quais 39 não utilizam linguagem vetorial em seus enunciados, nem nas soluções; são os seguintes problemas: 1 a 12, 15, 18, 20, 25 a 29, 31 a 33, 36, 39, 42 a 45, 55, 62, 71, 78, 84, 89, 91, 96, 97 e 99. A maioria dos enunciados se utilizam da representação RLN, 52 de um total de 60, pois são descritas as situações em linguagem natural a partir da qual são escolhidas as representações mais adequadas para a solução do problema. As conversões são a imensa maioria, 83 CV e 3 TR e, estão distribuídas em cinco combinações diferentes de representações, com a maior parte envolvendo as representações RLN, RAM, RAT e RGE.

Foram avaliados 421 problemas em quatro capítulos do livro 08, sendo que entraram para as análises apenas 145, conforme motivos já explicitados. A partir do quadro 98, destacamos a presença majoritária de operações de conversão, 132 CV e 44 TR, que estão distribuídas em 12 combinações diferentes de representações, a maior parte envolvendo as representações RAM, RAT, RLN e RGE. A diversidade de conversões encontrada exige conhecimento mais amplo para que seja possível transitar entre as várias representações disponíveis, dentre os requisitos, são necessários principalmente conhecimentos trigonométricos.

O quadro 99 reúne os dados extraídos dos dois livros de Física selecionados, num total de 350 exercícios analisados, e mostra os números totais das representações e das operações semióticas encontradas nesses livros. O quadro mostra a predominância das seguintes representações nos enunciados: 59 RAV, 103 RAM e 165 RLN. A maioria das operações semióticas é de conversão, 235 num total de 383, e dentre as conversões temos 19 combinações distintas, que estão todas descritas no quadro 99, sendo que a maioria envolve as representações RLN, RAV, RAT, RGE e RAM.

Representações nos enunciados	Quant.		Operação semiótica	Quant.		Sentido da conversão	Quant.
RLN	165		Tratamento (TR)	148		RAC para RAM	1
RGE	8		Conversão (CV)	235		RAM para RGR	1
RGR	7		-	-		RLN para RAC	1
RAV	59		-	-		RAV para RGR	1
RAC	12		-	-		RGR para RAV	1
RAT	0		-	-		RAV para RAC	2
RAM	103		-	-		RAC para RAV	3
-	-		-	-		RLN para RGR	5
-	-		-	-		RAM para RAC	5
-	-		-	-		RAC para RAM	5
-	-		-	-		RGR para RAM	5
-	-		-	-		RGE para RAM	6
						RLN para RAV	9
						RLN para RAT	10
						RAV para RAM	12
						RAM para RAV	15
						RGE para RAT	18
						RAM para RAT	23
						RLN para RGE	53
						RLN para RAM	59
Total	354		Total	383		Total	235

Quadro 99: Resumo das representações e operações semióticas dos problemas dos livros 07 e 08.
Fonte: Acervo pessoal.

O quadro 99 mostra uma diversidade muito grande de representações semióticas que são utilizadas em várias situações da Física e, também, um número expressivo de combinações dessas representações, como já visto, 19 no total, que culminam com as transformações de conversão. A multiplicidade de representações, presentes nos enunciados e em suas soluções, mobilizam uma gama muito rica de conhecimentos matemáticos, sobretudo trigonométricos que, em boa parte, são necessários às transformações semióticas.

5.5.2 Análise dos exercícios propostos nos livros técnicos

Neste subcapítulo, estabeleceremos o quadro geral quanto aos registros de representações utilizados e as operações semióticas explicitas ou implícitas nos exercícios propostos nos livros técnicos selecionados (09, 10 e 11).

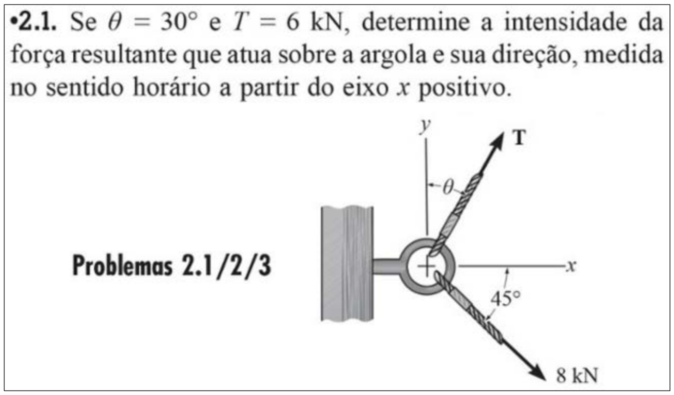
5.5.2.1 Análise dos exercícios propostos no livro 09

Os capítulos 02 – *Vetores de força*, 03 – *Equilíbrio de uma partícula*, 04 – *Resultantes de um sistema de forças*, 05 – *Equilíbrio de um corpo rígido*, 09 – *Centro de gravidade e centroide* e 10 – *Momentos de inércia* compõem o plano de ensino das Engenharias de Produção e Mecânica para a disciplina “Mecânica geral”, na Anhanguera e atende a grande parte dos PEA´s das instituições aqui selecionadas.

O capítulo 09 – *Centro de gravidade e centroide*, mostra como determinar a localização do centro de gravidade, do centro de massa e do centroide, ou seja, suas coordenadas e, também, distribuição do carregamento oriundo de pressão gerada por fluidos. Para esses tópicos não são usados vetores com muita frequência, apenas conceitos de massa, distância, área e volume, portanto, não serão analisados os problemas propostos nesse capítulo.

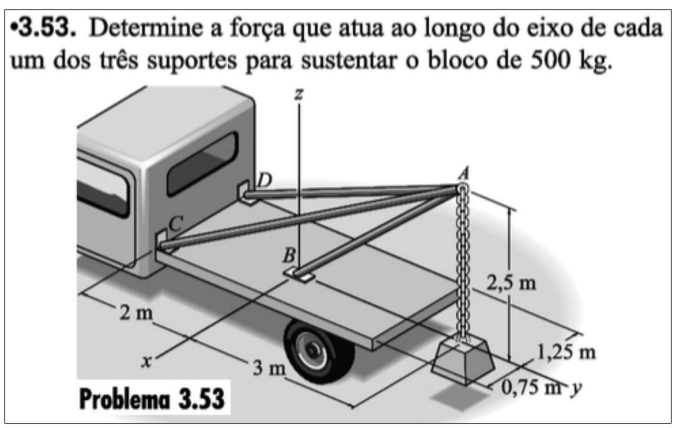
O capítulo 10 – *Momentos de inércia*, também não utilizam vetores como linguagem matemática, apenas os conceitos de área e massa para determinar os momentos de inércia, portanto, não analisaremos os problemas propostos. Para os demais capítulos apresentaremos alguns exemplos para as análises realizadas.

O quadro 100 apresenta um problema no qual podemos identificar no enunciado e figura as representações RAM e RGR e, para uma possível solução a representação RAT, pois as forças podem ser decompostas para se calcular intensidade da força resultante. Temos a possibilidade de duas conversões: da representação RAM para RAT, ou da representação RGR para RAT. Em qualquer uma, o uso da trigonometria é necessário.



Quadro 100: Problema para análise das representações envolvidas.
Fonte: LIVRO 09, p.19.

No quadro 101 o problema proposto apresenta o enunciado em representação RLN, a partir do qual, para a solução, traçamos o diagrama de corpo livre, no qual as forças envolvidas são representadas em RGR. A força peso é determinada com seu módulo e ângulo (RAM) a partir da informação "500kg", as componentes nos eixos são calculadas com trigonometria (RAT) e, finalmente, os vetores são escritos na representação RAV com a qual se conclui a solução.

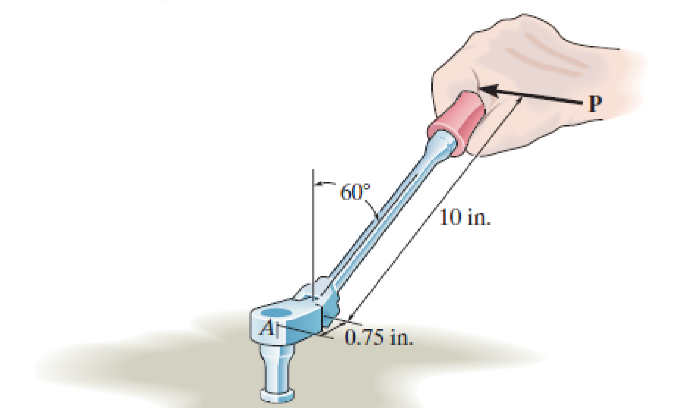


Quadro 101: Problema para análise das representações envolvidas.
Fonte: LIVRO 09, p.80.

A solução do problema do quadro 101 é bastante complexa e envolve muitos conhecimentos matemáticos e físicos, temos 4 representações semióticas mobilizadas, RGR, RAM, RAT e RAV. Para a solução completa verificamos algumas conversões, de RGR para RAM, de RAM para RAT e, por fim, de RAT para RAV, num total de três conversões possíveis.

O problema proposto 4.66 apresentado no quadro 102, mostra o vetor força em duas representações, a primeira em RLN com o texto *“uma força de* $P = 80N$*, aplicada perpendicularmente”*, a segunda em RGE com o vetor representado na ilustração. Para a solução do problema, no entanto, a transformação de representação ocorre no mesmo sistema semiótico; basta o cálculo do valor da distância de aplicação da força até o ponto $\boldsymbol{A}$ considerado, e aplicar a *fórmula do momento de uma força*. Consideramos, então, apenas uma transformação de tratamento.

4.66. A chave de boca articulável está sujeita a uma força de $P = 80$ N, aplicada perpendicularmente ao cabo, como mostra a figura. Determine o momento ou torque que isso impõe ao longo do eixo vertical do parafuso em A.



Quadro 102: Representações RLN e RGE no problema 4.66.
Fonte: LIVRO 09, p.107.

O quadro 103 mostra um problema resolvido, a partir do qual podemos tornar mais clara as análises efetuadas para estabelecer as representações presentes no enunciado, e as possíveis representações nas operações semióticas mobilizadas para a solução do problema. O enunciado apresenta a situação em representação da língua natural (RLN), a partir do qual se pode determinar o vetor força em representação RAM, pois é fornecido o peso de $40\boldsymbol{kN}$. O próximo passo é construir o diagrama de corpo livre, que consiste basicamente em representar as forças (vetores) conhecidas e desconhecidas com auxílio dos eixos coordenados, necessitando então, da representação RGR.

Exemplo 3.7

Determine a força desenvolvida em cada cabo usado para suportar a caixa de 40 kN (≈ 4000 kg) mostrada na Figura 3.12*a*.

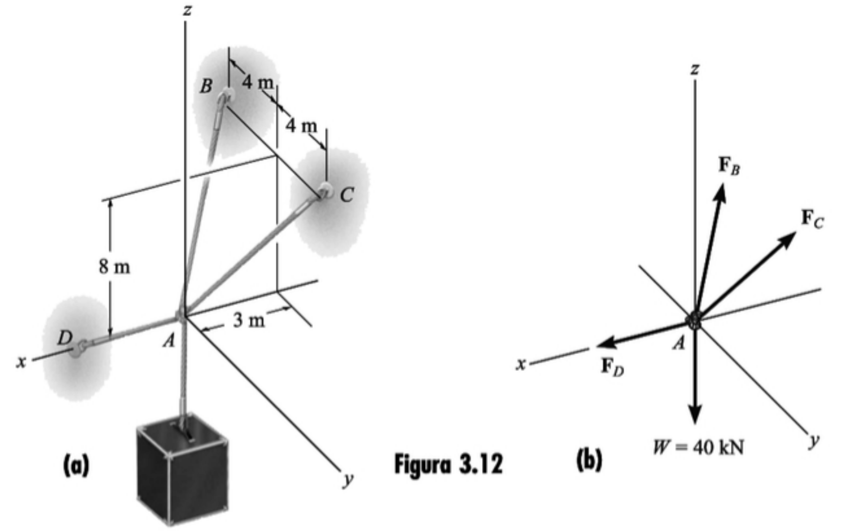


Figura 3.12

SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre

Como mostra a Figura 3.12*b*, o diagrama de corpo livre do ponto *A* é considerado para 'expor' as três forças desconhecidas nos cabos.

Equação de equilíbrio

Primeiro, vamos expressar cada força na forma vetorial cartesiana. Como as coordenadas dos pontos *B* e *C* são *B* (–3 m; –4 m; 8 m) e *C* (–3 m; 4 m; 8 m), temos:

$$\mathbf{F}_B = F_B\left[\frac{-3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+(8)^2}}\right]$$
$$= -0{,}318F_B\mathbf{i} - 0{,}424F_B\mathbf{j} + 0{,}848F_B\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_C = F_C\left[\frac{-3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2+(4)^2+(8)^2}}\right]$$
$$= -0{,}318F_C\mathbf{i} + 0{,}424F_C\mathbf{j} + 0{,}848F_C\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_D = F_D\mathbf{i}$$
$$\mathbf{W} = \{-40\mathbf{k}\}\ \text{kN}$$

O equilíbrio requer:

$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0};$ $$\mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

$$-0{,}318F_B\mathbf{i} - 0{,}424F_B\mathbf{j} + 0{,}848F_B\mathbf{k} -$$
$$0{,}318F_C\mathbf{i} + 0{,}424F_C\mathbf{j} + 0{,}848F_C\mathbf{k} + F_D\mathbf{i} - 40\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Igualando a zero as respectivas componentes **i**, **j**, **k**, temos:

$\Sigma F_x = 0;$ $$-0{,}318\,F_B - 0{,}318F_C + F_D = 0 \quad (1)$$

$\Sigma F_y = 0;$ $$-0{,}424\,F_B + 0{,}424F_C = 0 \quad (2)$$

$\Sigma F_z = 0;$ $$0{,}848F_B + 0{,}848F_C - 40 = 0 \quad (3)$$

A Equação 2 estabelece que $F_B = F_C$. Logo, resolvendo a Equação 3 para F_B e F_C e substituindo o resultado na Equação 1 para obter F_D, temos:

$$F_B = F_C = 23{,}6\ \text{kN} \qquad F_D = 15{,}0\ \text{kN}$$

Quadro 103: Problema com as representações RLN, RAM, RGR, RAC e RAV.
Fonte: LIVRO 09, p.77.

A partir da representação RGR, e dos vetores-posição em representação RAC (determinados pelo autor com o uso de coordenadas de pontos, fornecidos por meio de medidas cotadas na ilustração da estrutura), expressa-se cada força em sua representação RAV, com a qual, finalmente, chega-se a solução do problema. Para a solução desse problema, podemos considerar as seguintes conversões: RLN para RAM, RAM para RGR, RGR para RAC e RAC para RAV.

O quadro 104 resume os resultados para as análises dos enunciados e soluções para os problemas propostos nos capítulos 02, 03, 04 e 05.

Capítulo/subcapítulo	**Exercícios propostos**	**Representações nos enunciados**	**Operações Semióticas**	**Sentido da conversão**
2. Vetores de força	110	9 RAV, 14 RGE, 56 RAM, 57 RLN, 95 RGR	0 TR e 292 CV	1 RGR para RAV 3 RLN para RGE 5 RAC para RAV 6 RGE para RAC 7 RAT para RAC 9 RGE para RAT 10 RAC para RAM 13 RGR para RAC 13 RGE para RAM 20 RAV para RAM 24 RAT para RAV 53 RGR para RAT 54 RAT para RAM 74 RAM para RAT
3. Equilíbrio de uma partícula	79	9 RAM, 13 RGR, 16 RGE e 69 RLN	0 TR e 208 CV	2 RAT para RAV 15 RGE para RGR 18 RAT para RAM 20 RAC para RAV 22 RAM para RGR 23 RGR para RAC 25 RLN para RAM 29 RLN para RGR 54 RGR para RAT
4. Resultantes de um sistema de forças	173	23 RAV, 58 RAM, 68 RGR, 77 RLN e 102 RGE	34 TR e 335 CV	1 RLN para RGE 1 RAV para RAC 1 RAM para RAC 2 RGE para RAV 2 RLN para RGR 4 RAM para RAV 9 RGR para RAV 12 RAV para RAM 12 RGR para RAT 30 RAT para RAM 33 RGR para RAC 35 RGE para RAC 35 RAM para RAT 40 RAT para RAV 49 RGE para RAT

				69 RAC para RAV
5. Equilíbrio de um corpo rígido	96	2 RAV, 17 RGR, 30 RAM, 40 RGE e 41 RLN	5 TR e 197 CV	2 RAT para RAM 4 RAM para RAT 6 RAT para RAV 7 RGE para RAT 7 RGR para RAV 8 RLN para RGR 15 RAM para RGR 17 RLN para RAM 18 RAC para RAV 19 RGR para RAC 21 RAM para RGR 25 RGE para RGR 48 RGR para RAT
Total	458	34 RAV, 153 RAM, 172 RGE, 193 RGR e 244 RLN	39 TR e 1032 CV	1 RAV para RAC 1 RAM para RAC 2 RGE para RAV 4 RAM para RAV 4 RLN para RGE 7 RAT para RAC 10 RAC para RAM 13 RGE para RAM 17 RGR para RAV 32 RAV para RAM 39 RLN para RGR 40 RGE para RGR 41 RGE para RAC 42 RLN para RAM 58 RAM para RGR 65 RGE para RAT 72 RAT para RAV 88 RGR para RAC 104 RAT para RAM 112 RAC para RAV 113 RAM para RAT 167 RGR para RAT

Quadro 104: Representações nos exercícios propostos do Livro 09 e operações semióticas.
Fonte: Acervo pessoal.

O quadro 104 apresenta um resumo das análises dos exercícios propostos em quatro capítulos selecionados do livro 09. A quase totalidade dos exercícios propostos apresenta, juntamente com o enunciado, uma ilustração da situação problema, muitas vezes com os eixos coordenados $\boldsymbol{Ox}$, $\boldsymbol{Oy}$ e $\boldsymbol{Oz}$ representados, com ou sem forças em suas representações geométricas, exceção feita aos problemas 4.1, 4.2 e 4.3 do capítulo 4, que são exercícios nos quais é solicitado algum tipo de prova para propriedades vetoriais.

Para os problemas propostos pelo autor é necessária a construção de um *diagrama de corpo livre*. Nesse diagrama traçamos os eixos coordenados (situações do plano ou do espaço), caso não tenham sido fornecidos com a ilustração. Algumas forças podem ser fornecidas na ilustração (RGE), ou são informadas no enunciado (RLN) e, nesse caso, precisamos representá-las no diagrama (RGR), isso explica a predominância das representações RLN, RGE e RGR no quadro 104 e, claro, sua presença majoritária nas conversões. Para a solução dos problemas é quase sempre necessário construir esse diagrama.

O quadro 104 aponta para 22 tipos de conversões presentes nos quatro capítulos analisados, dos quais 11 tipos de conversões têm como partida ou chegada, representações geométricas (RGE) ou gráficas (RGR), que por sua vez mobilizam conhecimentos trigonométricos e geométricos. Para tais conhecimentos, podemos atestar, a partir da observação do quadro, a presença de 528 conversões envolvendo a representação RAT, tanto nas representações de partida como nas de chegada.

As operações de conversão estão presentes na maior parte dos problemas, em números, 1032 CV e 39 TR, que totalizam os resultados para os quatro capítulos. A presença majoritária das operações semióticas de conversão pode ser explicada pela multiplicidade das representações envolvidas, tanto nos enunciados como nas soluções possíveis para os problemas. A complexidade dos problemas mobiliza conhecimentos matemáticos diversos, tais como geométricos e trigonométricos, necessários e muitas vezes obrigatórios para a realização das conversões. Observamos 22 tipos distintos de conversão e, conforme já mencionado, em muitos problemas é comum a necessidade de três a quatro conversões distintas para se chegar à solução.

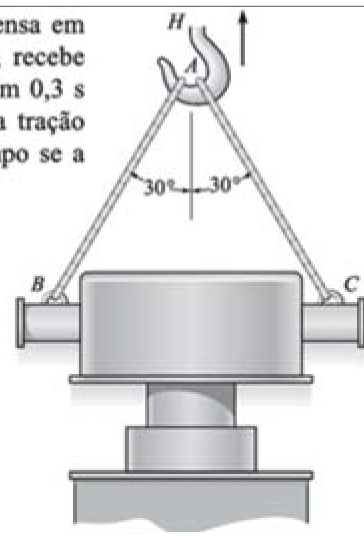
A quantidade e diversidade de representações e conversões que são mostradas no quadro 104 e necessárias às soluções, denotam a riqueza de conhecimentos a serem mobilizados e que tornam os processos de ensino e de aprendizagem muito mais complexos.

5.5.2.2 Análise dos exercícios propostos no livro 10

Apresentaremos a seguir alguns exemplos nos quais são utilizados vetores para a solução de problemas do livro 10, *Dinâmica*. Os capítulos 13 – *Cinética de uma partícula*: *força e aceleração*, 14 – *Cinética de uma partícula: trabalho e energia*, 16 – *Cinemática do movimento plano de um corpo rígido* e 20 – *Cinemática tridimensional de um corpo rígido* compõem o plano de ensino das Engenharias de Produção e Mecânica para a disciplina “Mecânica Aplicada”, na Universidade Anhanguera e atendem satisfatoriamente aos PEA´s das demais instituições aqui selecionadas.

O quadro 105 apresenta um problema proposto pelo autor e exemplifica o tipo de análise realizada para identificar as representações nos enunciados e as possíveis operações semióticas necessárias para a solução.

•**13.1.** A peça fundida tem massa de 3 Mg. Suspensa em uma posição vertical e inicialmente em repouso, recebe uma velocidade escalar para cima de 200 mm/s em 0,3 s utilizando o gancho H do guindaste. Determine a tração nos cabos AC e AB durante este intervalo de tempo se a aceleração for constante.



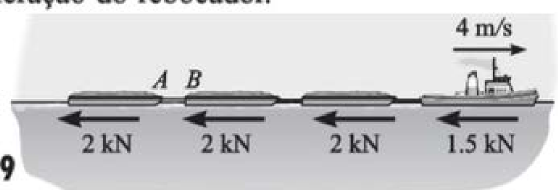
Problema 13.1

Quadro 105: Representações de vetores para problemas de Dinâmica.
Fonte: LIVRO 10, p.96

Identificamos no enunciado do problema 13.1, proposto pelo autor, a representação em língua natural (RLN) na informação *“massa de 3 Mg”*, a partir da qual chega-se a um vetor força $(peso = 3000kg\ x\ 9{,}81m/s^2 = 29430N)$ cujo módulo e ângulo são facilmente obtidos (RAM). Com essa informação se constrói o *diagrama de corpo livre* (RGR) e na sequência, com a decomposição dos vetores por meio de trigonometria (RAT), chega-se a solução. As operações semióticas de conversão utilizadas são: RLN para RAM, de RAM para RGR e RGR para RAT.

O problema proposto 13.9 apresentado no quadro 106, mostra os vetores força representados em RGE. Para o cálculo da aceleração pedida basta completar a ilustração com o vetor aceleração (RGE), com direção e sentido corretos, e aplicar a *equação fundamental da dinâmica* para chegar à solução final. A solução vetorial desse problema permanece no interior do mesmo registro, ou seja, registro figural, não sendo necessária, portanto, mudança da representação RGE. Para esse caso consideramos, então, uma operação de tratamento.

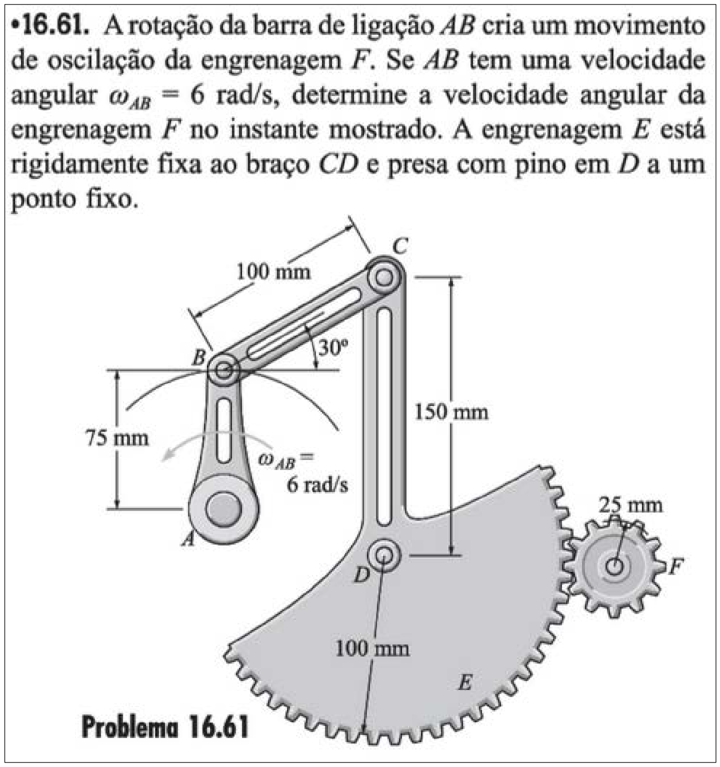
•13.9. Cada uma das três chatas têm massa de 30 Mg, ao passo que o rebocador tem massa de 12 Mg. À medida que as chatas estão sendo puxadas para a frente com uma velocidade constante de 4 m/s, o rebocador deve superar a resistência do atrito da água, que é de 2 kN para cada chata e 1,5 kN para o rebocador. Se o cabo entre *A* e *B* se rompe, determine a aceleração do rebocador.



Problema 13.9

Quadro 106: Representações de vetores no problema 13.9, em Dinâmica.
Fonte: LIVRO 10, p.97.

No problema proposto do quadro 107 foram identificadas as seguintes situações: enunciado com representação RLN, pois com a informação da velocidade angular pode-se obter os vetores velocidade dos pontos $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$, com os quais se completa o *diagrama de corpo livre* (RGR) para a solução do problema. Com o diagrama completo decompõem-se os vetores por meio de trigonometria (RAT) e, em seguida, os vetores são reescritos em representação RAV, que são utilizados na equação da velocidade para a solução final.



•**16.61.** A rotação da barra de ligação *AB* cria um movimento de oscilação da engrenagem *F*. Se *AB* tem uma velocidade angular $\omega_{AB} = 6$ rad/s, determine a velocidade angular da engrenagem *F* no instante mostrado. A engrenagem *E* está rigidamente fixa ao braço *CD* e presa com pino em *D* a um ponto fixo.

Problema 16.61

Quadro 107: Representações de vetores para problemas de Dinâmica.
Fonte: LIVRO 10, p.277.

Estes foram os exemplos de análises que serão empregadas para os problemas propostos dos capítulos selecionados do livro 10. O quadro 108 apresentará os resultados das análises para os problemas propostos.

Capítulo/subcapítulo	Exercícios propostos	Representações nos enunciados	Operações Semióticas	Sentido da conversão
13. Cinética de uma partícula: força e aceleração.	137	11 RAM, 18 RGE e 88 RLN	2 TR e 217 CV	1 RAT para RAM 6 RGE para RGR 43 RLN para RAM 46 RLN para RGR 51 RAM para RGR 70 RGR para RAT
14. Cinética de uma partícula: trabalho e energia.	106	2 RAM, 7 RGE e 72 RLN	0 TR e 131 CV	7 RGE para RGR 21 RLN para RAM 23 RAM para RGR 29 RGR para RAT 51 RLN para RGR
16. Cinemática do movimento plano de um corpo rígido.	160	2 RAV, 3 RAC, 38 RGE, 38 RAM, 82 RLN	0 TR e 319 CV	5 RAC para RAV 7 RAC para RAT 9 RLN para RAC 35 RGE para RGR 39 RAM para RGR 39 RGR para RAV 42 RAT para RAV

				69 RGR para RAT 74 RLN para RGR
20. Cinemática tridimensional de um corpo rígido.	55	1 RGE, 2 RLN, 11 RAC, 12 RAV, 45 RAM, 58 RGR	0 TR e 133 CV	1 RLN para RGR 1 RAM para RAT 8 RAM para RGR 11 RAC para RAV 18 RGR para RAT 21 RAT para RAV 33 RAM para RAV 40 RGR para RAV
Total	458	14 RAC, 14 RAV, 58 RGR, 64 RGE, 96 RAM, 244 RLN	2 TR e 800 CV	1 RAT para RAM 1 RAM para RAT 7 RAC para RAT 9 RLN para RAC 16 RAC para RAV 33 RAM para RAV 48 RGE para RGR 63 RAT para RAV 64 RLN para RAM 79 RGR para RAV 121 RAM para RGR 172 RLN para RGR 186 RGR para RAT

Quadro 108: Representações nos exercícios propostos do Livro 10 e operações semióticas.
Fonte: Acervo pessoal.

O capítulo 13 - *Cinética de uma partícula: força e aceleração* - possui um total 137 problemas propostos, dos quais 30 problemas não foram analisados, pois são problemas que envolvem apenas o uso das equações cinemáticas para o estudo do movimento, não abordando a linguagem vetorial para essa finalidade. São eles: 13.34, 13.47, 13.52, 13.58, 13.66, 13.67, 13.84, 13.85, 13.116 a 13.137.

O capítulo 14 - *Cinética de uma partícula: trabalho e energia* - contém um total de 106 problemas propostos, dos quais 30 problemas não foram analisados, pois abordam energia cinética e trabalho, conservação da energia e potência e eficiência, utilizando para isso equações escalares, sem o auxílio da linguagem vetorial. São eles: 14.2, 14.4, 14.8, 14.12, 14.16, 14.17, 14.28, 14.31, 14.32, 14.43, 14.44, 14.45, 14.50, 14.60, 14.72 a 14.78, 14.81, 14.85, 14.97 a 14.99, 14.101, 14.104, 14.105 e 14.106.

No capítulo 16 - *Cinemática do movimento plano de um corpo rígido* - temos um total de 160 problemas propostos, dos quais 36 problemas não receberam análise, pois são problemas que envolvem apenas as equações cinemáticas do movimento circular, sem auxílio da linguagem vetorial. São eles: 16.1 a 16.33, 16.36, 16.40 e 16.42.

O capítulo 20 - *Cinemática tridimensional de um corpo rígido* - apresenta um total de 55 problemas, todos utilizando linguagem vetorial para a descrição da situação problema, bem como para as soluções.

No quadro 108 podemos ver o resultado das análises feitas em 458 problemas propostos e destacar inicialmente a quase totalidade de operações semióticas de conversão, 800 CV e apenas 2 TR, isso denota a necessidade de se saber transitar entre as diversas representações possíveis.

As representações RGE, RGR, RAM e RLN são muito utilizadas, como podemos facilmente observar a partir da totalização do quadro 108, e isso pode ser explicado pelos tipos de problemas propostos, nos quais temos quase sempre a presença de ilustrações a partir das quais obtemos informações sobre os vetores força ou velocidade, em suas representações RGE e RGR. Das descrições das situações problema podemos identificar os vetores a partir de suas representações em língua natural (RLN), ou também, com as informações de intensidade e ângulo de forças, caracterizar os vetores em suas representações RAM.

A multiplicidade de representações e consequentes transformações de conversão, mobilizam muitos conhecimentos matemáticos para as soluções dos problemas. Observamos no quadro 108, 13 tipos distintos de conversões anotadas, nas quais há predominância de representações RGE e RGR, cerca de 606 conversões envolvendo essas representações, seja no registro de partida ou no de chegada. Muitas dessas conversões, por exemplo, de RGR para RAT, necessitam de mobilização de conhecimentos trigonométricos para a solução dos problemas, ou de conhecimentos geométricos, por exemplo, nas conversões de RGR para RAV.

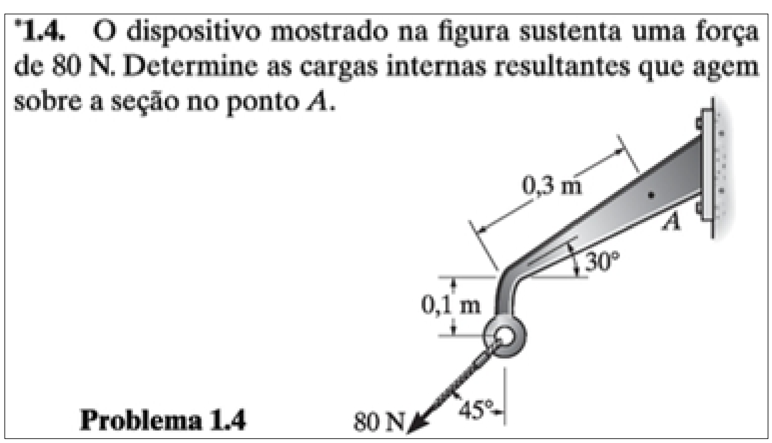
Pelos tipos de conversões realizadas para a solução dos problemas, notamos a presença, em grande parte delas, do uso da trigonometria para transitar entre as representações e assim chegar a solução do problema. Essa necessidade também reforça a importância da representação trigonométrica em situações problema da engenharia. A mobilização de diferentes representações é um indicativo de quão complexas tornam-se as soluções para os problemas propostos e, por conseguinte, os processos de ensino e de aprendizagem, por demandarem muitos conhecimentos.

5.5.2.3 Análise dos exercícios propostos no livro 11

Os capítulos *1 – Tensão*, *3 – Propriedades mecânicas dos materiais*, *5 – Torção*, *6 – Flexão* e *7 – Cisalhamento transversal* compõem o plano de ensino das Engenharias de Produção e Mecânica para a disciplina “Resistência dos materiais I”, na Universidade Anhanguera e atendem satisfatoriamente aos PEA´s das demais instituições aqui selecionadas.

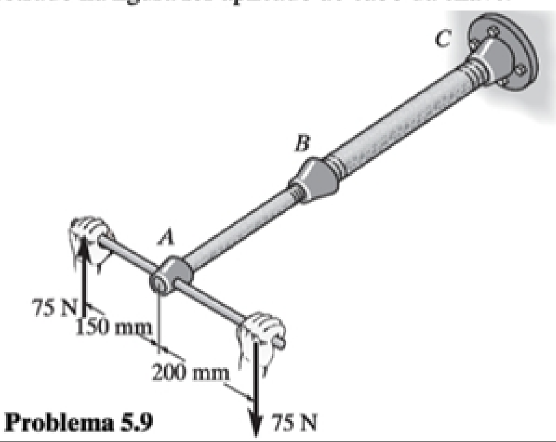
A seguir, destacaremos exercícios propostos no livro 11 e apresentaremos exemplos de análise para determinar quais representações de vetores foram utilizadas nos enunciados e, também, para as possíveis soluções. O quadro 109 mostra o primeiro exemplo de análise de um problema proposto.

O problema proposto 1.4, quadro 109, apresenta em seu enunciado a representação RGE. Para a solução é necessário traçar o *diagrama de corpo livre* a partir do qual representamos as demais forças agindo na estrutura (RGR). Em seguida, obtemos por meio da trigonometria (RAT) as componentes horizontal e vertical para resolver as equações de equilíbrio e chegar à solução final. Para esse problema, com as representações listadas, teremos duas operações semióticas de conversão: de RGE para RGR e de RGR para RAT.


•1.4. **O dispositivo mostrado na figura sustenta uma força de 80 N. Determine as cargas internas resultantes que agem sobre a seção no ponto *A*.**

Quadro 109: Representação de vetores no problema 1.4, em Resistência dos materiais.
Fonte: LIVRO 11, p.9.

5.9. O conjunto é composto por duas seções de tubo de aço galvanizado interligadas por uma redução em B. O tubo menor tem diâmetro externo de 18,75 mm e diâmetro interno de 17 mm, enquanto o tubo maior tem diâmetro externo de 25 mm e diâmetro interno de 21,5 mm. Se o tubo estiver firmemente preso à parede em C, determine a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida em cada seção do tubo quando o conjugado mostrado na figura for aplicado ao cabo da chave.



Problema 5.9

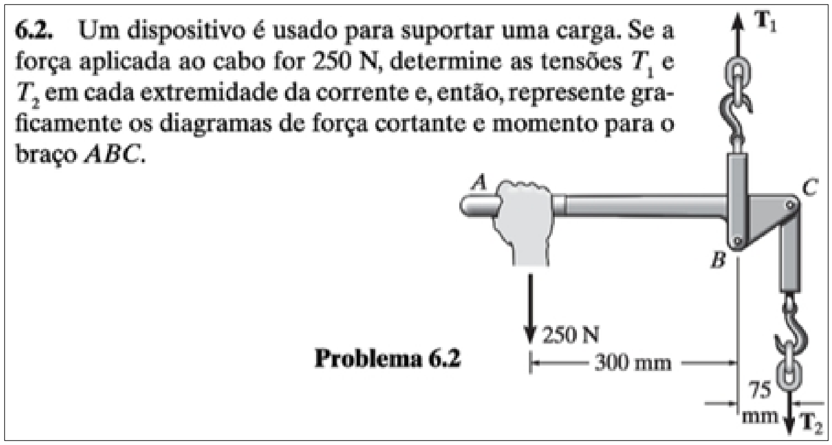
Quadro 110: Representação de vetores no problema 5.9, em Resistência dos materiais.
Fonte: LIVRO 11, p.135.

O problema 5.9 apresentado no quadro 110 novamente traz em seu enunciado a representação RGE. Para a solução será suficiente completar o diagrama de corpo livre e passar para a representação RGR e, com as equações de equilíbrio obter a solução final para o problema.

Temos então, uma simples conversão da representação RGE para RGR, a partir da qual completam-se as equações.

O exemplo apresentado no quadro 111, problema proposto 6.2, apresenta uma situação na qual a representação utilizada no enunciado é a RGE. Para a solução basta completar o *diagrama de corpo livre* e passar para a representação RGR e, então, chegar à solução final por intermédio das equações de equilíbrio. Para isso é suficiente uma simples conversão, de RGE para RGR.

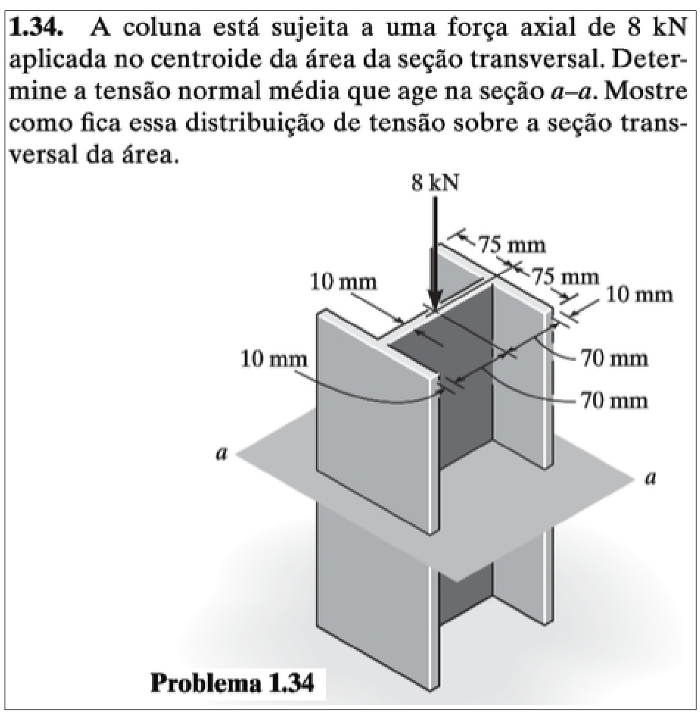
Para o problema 6.2, cabe uma pequena observação; o enunciado traz a informação da intensidade "*força aplicada de 250N*", porém, não informa o ângulo de aplicação e por isso incompleta para considerarmos como sendo uma representação RAM e, então, consideramos a representação RGE que está completa, conforme pode ser observado na ilustração.



6.2. Um dispositivo é usado para suportar uma carga. Se a força aplicada ao cabo for 250 N, determine as tensões T_1 e T_2 em cada extremidade da corrente e, então, represente graficamente os diagramas de força cortante e momento para o braço *ABC*.

Quadro 111: Representação de vetores no problema 6.2, em *Resistência dos materiais.*
Fonte: LIVRO 11, p.195.

O exemplo do quadro 112, problema proposto 1.34, traz no enunciado e ilustração a representação de vetor em RGE. Para este caso não é necessária a conversão da representação para se chegar a solução, basta o valor da intensidade do vetor força e o valor da área para o cálculo da tensão solicitada. Portanto, consideramos nesse exemplo apenas uma operação de tratamento.



1.34. A coluna está sujeita a uma força axial de 8 kN aplicada no centroide da área da seção transversal. Determine a tensão normal média que age na seção *a–a*. Mostre como fica essa distribuição de tensão sobre a seção transversal da área.

Quadro 112: Representação de vetores no problema 1.34, em *Resistência dos materiais.*
Fonte: LIVRO 11, p.25.

Os quatro exemplos dados até aqui representam bem a situação que ocorre em grande parte dos problemas apresentados na disciplina Resistência dos Materiais. As estruturas e dispositivos mecânicos, de uma forma geral, são dispostos de tal forma que as forças atuantes estão normalmente distribuídas em eixos verticais e horizontais, assim as representações RGE e RGR são muito comuns e muitas vezes suficientes para a solução dos problemas. Situações em que as forças não sejam paralelas a tais eixos, cabe a decomposição por meio da Trigonometria, assim recaindo na representação RAT.

O quadro 113, a seguir, resume as análises dos exercícios propostos e mostrará os resultados mediante o método de análise já exemplificado.

No capítulo *1-Tensão*, apenas 4 problemas de um total de 119 não foram analisados, pois não tinham a linguagem vetorial em seu escopo. São eles: 1.60, 1.84, 1.85 e 1.116.

Capítulo/subcapítulo	**Exercícios propostos**	**Representações nos enunciados**	**Operações Semióticas**	**Sentido da conversão**
1. Tensão	119	8 RLN, 24 RAM e 103 RGE	15 TR e 151 CV	8 RLN para RAM 17 RAM para RGR 41 RGR para RAT 85 RGE para RGR
3. Propriedades mecânicas dos materiais	44	1 RLN e 9 RGE	0 TR e 16 CV	1 RAM para RGR 1 RLN para RAM 5 RGR para RAT 9 RGE para RGR
5. Torção	143	7 RAM e 13 RGE	0 TR e 20 CV	7 RAM para RGR 13 RGE para RGR
6. Flexão	181	4 RLN, 13 RAM e 91 RGE	3 TR e 104 CV	4 RLN para RGR 5 RGR para RAT 8 RAM para RGR 87 RGE para RGR
7.Cisalhamento transversal	83	5 RAM e 27 RGE	0 TR e 28 CV	5 RAM para RGR 23 RGE para RGR
Total:	570	13 RLN, 49 RAM e 243 RGE	18 TR e 319 CV	4 RLN para RGR 9 RLN para RAM 38 RAM para RGR 51 RGR para RAT 217 RGE para RGR

Quadro 113: Representações nos exercícios propostos do Livro 11 e operações semióticas.
Fonte: Acervo pessoal.

No capítulo *3-Propriedades mecânicas dos materiais*, apenas 10 problemas de um total de 44 fizeram uso de linguagem vetorial, 34 não foram analisados, pois referiam-se a questões que envolviam Lei de Hooke, tensão e diagramas de tensão versus deformação. São eles: 3.1 a 3.15, 3.17, 3.25 a 3.37, 3.40, 3.41 a 3.44.

No capítulo *5-Torção*, de um total de 143 problemas propostos, apenas 20 utilizaram a linguagem vetorial e assim receberam análise. Os outros 123 problemas tratam de questões envolvendo momento de inércia, Lei de Hooke e fórmula para cálculo de torção e, portanto, não utilizam necessariamente da linguagem vetorial. São eles: 5.1 a 5.8, 5.11 a 5.15, 5.18 a 5.23, 5.26 a 5.42, 5.44 a 5.51, 5.53 a 5.56, 5.60, 5.62 a 5.73, 5.76, 5.78, 5.79, 5.83 a 5.90, 5.93 a 5.143.

No capítulo *6-Flexão*, de um total de 181 problemas propostos, 97 problemas foram analisados, os demais 84 problemas não foram analisados, pois tratam de questões envolvendo momento de inércia e cálculo de tensão. São eles: 6.43 a 6.47, 6.49 a 6.57, 6.59, 6.71, 6.78, 6.84, 6.85, 6.100 a 6.107, 6.110, 6.111, 6.114 a 6.127, 6.129 a 6.134, 6.138, 6.139, 6.141 a 6.149, 6.151 a 6.154, 6.157 a 6.171, 6.176 a 6.181.

No capítulo *7-Cisalhamento transversal*, de um total de 83 problemas propostos, 54 problemas não foram analisados, pois não utilizam necessariamente a linguagem vetorial e tratam apenas do cálculo de tensão de cisalhamento e diagramas para determinadas seções especiais. São eles: 7.1 a 7.15, 7.19, 7.31, 7.32, 7.36 a 7.42, 7.46 a 7.48, 7.56 a 7.79, 7.82 e 7.83.

Observamos no quadro 113 os resultados das análises dos 570 problemas propostos e, destacamos a representação RGE, que está presente em maior parte dos problemas propostos, sendo utilizada 243 vezes, seguida da representação RAM, 49 vezes. As 319 operações de conversão não são tão diversificadas como mostrado nos livros 9 e 10, e majoritariamente concentram-se em representações envolvendo RGE e RGR, seja no registro de partida ou no de chegada e, são um total 310 conversões. Nota-se, também, que em muitos casos há necessidade da representação RAT, ou seja, mobilização de conhecimentos trigonométricos.

Mais uma vez constata-se um número muito maior de conversões, 319 CV e 18 TR, tornando mais complexa a solução dos problemas, embora para a maioria desses problemas, foi necessária uma ou duas conversões para se chegar à solução.

O quadro 114, a seguir, resume os resultados das análises para os livros 9, 10 e 11.

O quadro 114 mostra um resumo geral das análises dos problemas propostos nos três livros técnico-científicos selecionados, totalizando um número expressivo de 1486 problemas. As representações dominantes nos enunciados, apresentadas no quadro são: 251 RGR, 298 RAM, 479 RGE e 501 RLN. A grande maioria das operações semióticas são de conversão, 2151 CV e apenas 59 TR, e dentre as conversões consideradas nas soluções dos problemas temos 24 combinações diferentes descritas no quadro. Mais da metade das conversões realizadas, ou seja, 1141 CV envolvem as seguintes representações: RLN, RAM, RGE, RGR e RAT.

Representações nos enunciados	**Quant.**		**Operação semiótica**	**Quant.**		**Sentido da conversão**	**Quant.**
RLN	501		Tratamento (TR)	59		RAV para RAC	1
RGE	479		Conversão (CV)	2151		RAM para RAC	1
RGR	251		-	-		RGE para RAV	2
RAV	48		-	-		RLN para RGE	4
RAC	14		-	-		RAT para RAC	7
RAT	0		-	-		RAC para RAT	7
RAM	298		-	-		RLN para RAC	9
-	-		-	-		RAC para RAM	10
-	-		-	-		RGE para RAM	13
-	-		-	-		RAV para RAM	32
-	-		-	-		RAM para RAV	37
-	-		-	-		RGE para RAC	41
-	-		-	-		RGE para RAT	65
-	-		-	-		RGR para RAC	88
-	-		-	-		RGR para RAV	96
-	-		-	-		RAT para RAM	105
-	-		-	-		RAM para RAT	114
-	-		-	-		RLN para RAM	115
-	-		-	-		RAC para RAV	128
-	-		-	-		RAT para RAV	135
-	-		-	-		RLN para RGR	215

-	-		-	-		RAM para RGR	217
-	-		-	-		RGE para RGR	305
-	-		-	-		RGR para RAT	404
Total	1591		Total	2210		Total	2151

Quadro 114: Resumo das representações e operações semióticas dos problemas dos livros 09, 10 e 11.
Fonte: Acervo pessoal.

O quadro 114 mostra uma diversidade de representações semióticas que são utilizadas em problemas de disciplinas técnicas da Engenharia e as várias combinações dessas representações convergindo para 24 distintas conversões, como já mencionado. Também, como observado na Física, essa pluralidade oriunda dos enunciados e soluções dos problemas propostos, mobilizam múltiplos conhecimentos matemáticos, sobretudo trigonométricos, necessários às transformações semióticas propostas ou realizadas.

Considerações finais

No desenvolvimento de nossa dissertação traçamos um breve histórico sobre a origem do conceito de vetor, que segundo Katz (1995) teve início na Física, por volta do século IV a.C. Dos primeiros estudos do movimento realizados por Aristóteles (séc. IV a.C.) em seu tratado de “Mecânica”, entremeando os trabalhos de Heron de Alexandria e Galileu, até as leis de Newton para o movimento, os primeiros conceitos de vetor nasceram basicamente da ideia do paralelogramo de forças, com o qual se combinavam as forças por meio do uso das diagonais de um paralelogramo. Nossa ideia, com essa abordagem, era de enfatizar que elementos e materiais históricos poderiam ajudar no estudo e compreensão de vetores, dando mais sentido ao aprendizado, apoiado pela exposição de situações de problemas enfrentados por cientistas da época e de como teriam solucionado tais problemas. Seria um despertar da curiosidade e um convite ao estudo. Acreditamos que tais elementos históricos, a partir dos primeiros conceitos de vetores, poderiam auxiliar no entendimento da produção das primeiras formas de representação semiótica desse objeto matemático, como as representações geométricas e gráficas, com posterior passagem para as representações algébricas.

Dos onze livros aqui selecionados e analisados, praticamente só o livro 02 traz algumas referências históricas que são importantes para enriquecer os processos de ensino e de aprendizagem do objeto matemático vetor. Essa, portanto, parece uma questão que passa despercebida pelos autores de livros didáticos e que poderia contribuir, como já observado, para a compreensão da produção das representações de vetores, inclusive facilitando sua assimilação.

No estudo de Nascimento (2005) os aspectos relacionados aos conceitos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente são explorados com a construção de uma tabela trigonométrica, ancorada em levantamentos históricos de trabalhos de Ptolomeu e outros matemáticos da Grécia Antiga. A autora reforça a importância dos aspectos históricos na compreensão dos conceitos de objetos matemáticos e da produção de suas representações, nesse caso, em particular, a representação algébrica trigonométrica.

Nossa primeira questão de pesquisa é:

"Como é abordado o conceito de vetor nos livros didáticos das diversas disciplinas científicas de Engenharia? "

A resposta parcial a essa questão, certamente passa pelos conceitos históricos acerca do objeto vetor e, como já discutido, não tem espaço nem destaque nos livros didáticos selecionados.

Devemos lembrar que a primeira abordagem de vetores para os estudantes acontece no EM, exclusivamente por meio das aulas de Física e sob um único ponto de vista, o geométrico, pois de acordo com os PCNEM (1998), vetores não fazem parte do conteúdo de Matemática. Não temos, nesse caso, o ponto de vista da Matemática.

A abordagem geométrica para conceituar vetor é claramente o início dessa discussão em praticamente todos os livros e, portanto, muito importante. Nos livros de Matemática essa conceituação geométrica encontra-se apenas como elemento introdutório e, em seguida é abandonada. Ao contrário, nos livros das disciplinas técnico-científicas essa forma de conceituar vetor é aplicada ao longo dos tópicos desenvolvidos nos livros, e pode ser verificada com a presença frequente das representações geométricas apontadas nos quadros sobre os resultados para os problemas propostos nos livros. O quadro 64 apresenta o resumo das análises dos livros de Matemática (1 a 6), e a representação RAC é a que tem maior frequência. As representações RGR e RGE são as que se apresentam em menor número entre as representações identificadas nos enunciados, demonstrando a baixa utilização das representações geométricas e gráficas nesses livros, com predominância das representações algébricas. Mesmo quando consideramos as representações RGR e RGE aplicadas nas resoluções, e também, que estejam presentes na maior parte das operações de conversões identificadas, ainda assim sua utilização é baixa, pois as operações de conversão respondem a um pouco mais do que 10% do total registrado.

Nos livros de Física, embora os enunciados dos problemas apresentem poucas representações geométricas (RGE) ou gráficas (RGR), as resoluções mostram muitas conversões nas quais as representações de chegada são a RGE ou a RGR, confirmando a presença desses tipos de representações, que é facilmente verificado no quadro 99.

O quadro 114 resume as análises dos livros 9, 10 e 11 das disciplinas técnico-científicas e as representações mais frequentes são a RLN, RAM, RGE e RGR, identificadas nos enunciados e também nas operações de conversão nas resoluções dos problemas propostos, demonstrando a forte presença das representações geométricas e gráficas nesses livros.

No artigo de Poynter e Tall (2005), os autores consideram o desenvolvimento do conceito de vetor de forma particular pela Física, por meio do paralelogramo de forças, enquanto que a Matemática o relaciona à ideia de translação. Segundo os autores uma boa estratégia para enfrentar as dificuldades apresentadas pelos alunos, com relação ao conceito de vetor, passa pelo conceito de “vetor livre” e, uma maneira mais eficiente de se abordar esse conceito tem a ver com a noção sobre o efeito produzido por uma ação física, ficando mais próxima do mundo real do estudante.

No artigo de Watson, Spirou e Tall (2003), eles reforçam a ideia de que o efeito de uma ação física é mais eficiente para se apresentar o conceito de vetor e, segundo a perspectiva dos autores, a união de duas comunidades, a dos físicos, com os conceitos corporificados das ações físicas e a dos matemáticos com o formalismo e provas formais, possa dar aos estudantes a possibilidade de se beneficiarem de ambos os lados.

Ante a esses pontos de vista, observamos que tanto os autores dos livros de Matemática como os dos livros de Física e Técnico-científicos, desenvolvem os conceitos de vetores e as produções de suas representações de forma bastante independentes. Falta um alinhamento entre as necessidades da própria Matemática e as necessidades das demais áreas técnicas. Nesse sentido, podemos dizer em relação as representações utilizadas e também aos símbolos e linguagens empregadas por ambos, que não há uma padronização desses elementos, que por sua vez poderá vir a criar dificuldades para os estudantes, com relação a aprendizagem de vetores.

O benefício de ampliar o entendimento sobre vetor, que poderia vir do conceito dado por ambas as comunidades, uma com o conceito de vetor apoiado nos experimentos físicos e a outra baseada no formalismo matemático, como ressaltam os autores, na verdade não é aproveitado, ou é pouco explorado, ao considerar os aspectos advindos de pontos de vista diferentes.

Cabe salientar outros aspectos de abordagem de vetores que são distintos em livros de Matemática, em livros de Física e em Técnico-científicos. Nos livros de Matemática não são identificadas representações que envolvam a Trigonometria, ou seja, representações RAM e RAT, sejam nos enunciados ou nas resoluções dos problemas propostos. A trigonometria não é utilizada para tratar de vetores, simplesmente não é considerada.

No artigo de Lima, Sauer e Sartor (2011), discutido em nossa revisão de literatura, as autoras reforçam a importância da Trigonometria para diversas áreas da Engenharia e, citam exemplos de situações de cálculos nas quais temos força e pressão envolvidas, sendo utilizados para isso vetores.

Nascimento (2005) desenvolveu atividades com o objetivo do estudante poder construir conhecimentos mais sólidos sobre Trigonometria e expandi-los para outras áreas relacionadas aos fundamentos básicos das razões seno, cosseno e tangente, podendo, por exemplo, serem aplicados aos vetores em suas representações RAM e RAT.

Embora vejamos nesses dois trechos a importância destacada pelas autoras para os conhecimentos trigonométricos e suas aplicações, não é o que encontramos nos livros de Matemática (1 a 6) utilizados nos cursos de Engenharia, acerca de vetores. Aos autores de tais livros, passou despercebida a necessidade da introdução dos elementos trigonométricos na conceituação de vetor, mais especificamente em sua representação trigonométrica, bastante utilizada pelas áreas técnicas.

No quadro 99, nos Livros 7 e 8 de Física verificamos a predominância das representações RLN e RAM identificadas nos enunciados e nenhuma representação RAT. No entanto, a representação RAT aparece significativamente nas operações de conversões apontadas, cerca de um quarto dessas operações, sendo observada no registro de chegada. Já nos livros de disciplinas técnico-científicas, verificamos, no quadro 114, a forte presença nos enunciados da representação RAM e nenhuma representação RAT identificada, embora esta última tenha uma frequência expressiva em operações de conversão nas resoluções dos problemas, cerca de mais de um terço das conversões realizadas, ora no registro de chegada, ora no registro de partida, caracterizando sua grande utilidade.

De forma geral observamos uma divergência de abordagens de vetores nos livros didáticos. De um lado, os autores dos livros de Matemática (1 a 6) privilegiam o uso de representações algébricas, sobretudo em coordenadas (RAC), não havendo representações RAM ou RAT, nem nos enunciados, nem nas resoluções. Por outro lado, os autores dos livros de Física e, também, dos livros técnico-científicos diversificam mais as representações, com presença expressiva das representações RAM, RAT, RGE e RGR, sejam aplicadas nos enunciados ou nas resoluções dos problemas propostos. A representação RAT também não aparece nos enunciados destes livros, porém, são largamente utilizadas nos processos de resoluções dos problemas, ou seja, nas operações de conversão.

Ressalta-se o fato de que as representações em língua natural (RLN) são praticamente um terço de todas as representações identificadas nos enunciados dos livros em geral, com maior presença nos livros de Física, pela própria característica dos problemas, que é de descrição dos fenômenos envolvidos, necessitando análise e interpretação do texto, a partir do qual se extrai as informações iniciais, em nosso caso específico, sobre vetores.

Nossa segunda questão de pesquisa tem por objetivo investigar como os vetores são aplicados, em termo de suas representações, nos diversos problemas propostos, como descrevemos abaixo:

“Como os vetores são utilizados nas diversas disciplinas para a resolução de problemas? “

Começamos pelos livros de Matemática (1 a 6), em que as primeiras operações de adição e subtração de vetores são apresentadas com as representações geométricas, por meio das regras do triângulo e do paralelogramo.

Posteriormente, essas operações são aplicadas com as representações algébricas, praticamente sempre em situações exclusivas do ambiente matemático, seja nas representações algébricas ou geométricas. As representações geométricas e gráficas, nesses livros, são aplicadas aos problemas dos capítulos iniciais, restritos a questões puramente matemáticas. Nos capítulos seguintes, os vetores passam a ser empregados nas resoluções com suas representações em coordenadas, ou em suas representações na forma de combinações lineares, também, exclusivamente em situações do ambiente matemático e, assim se estende pelos demais capítulos.

Levando em conta o artigo de Watson, Spirou e Tall (2003), no qual abordam a convergência dos fenômenos físicos e do simbolismo matemático, e a partir dos quais consideram que o processo de aprendizagem de vetores deva ocorrer numa região de interseção entre as duas áreas, pode-se concluir que não se deve limitar tal processo exclusivamente a um único ambiente. Assim sendo, tanto a conceituação como as aplicações de vetores devem considerar os aspectos relativos às duas áreas: da Física e da Matemática.

Um dos problemas que emerge das atividades realizadas por Poynter e Tall (2005) é o fato de que os alunos não sabem diferenciar um vetor de outro, pois na concepção deles basta um vetor ter origem em pontos distintos para considerá-lo diferente. O mesmo problema foi levantado por Patrício (2011), que apontou dificuldades dos alunos em identificar vetores iguais, em certas atividades propostas, nas quais o aluno deveria escolher um representante de vetor que fosse mais favorável às operações solicitadas.

Tais problemas, pontuados por Poynter e Tall (2005) e Patrício (2011), podem se refletir em dificuldades ao se trabalhar com operações gráficas ou geométricas envolvidas nas regras do triângulo e do paralelogramo, nas quais os conceitos de “vetor livre” e, por conseguinte, o conceito de equipolência, são importantes para o entendimento dessas regras. Esses problemas, além das dificuldades geradas nas operações de tratamento em resoluções dos problemas, podem implicar em dificuldades, principalmente nas operações de conversões, em que representações em registros gráficos e algébricos estão envolvidos, alternando-se em registros de chegada e de partida.

Essa dificuldade é exposta por Patrício (2011) que diz que as conversões envolvendo representações do registro gráfico são as que mais geraram dificuldades em suas atividades. Igualmente, Castro (2001) aponta que as conversões envolvendo os registros gráficos foram as que trouxeram maiores dificuldades aos alunos, nas atividades desenvolvidas.

Verificamos, então, que as dificuldades já são enfrentadas no âmbito da própria Matemática, quando se lida com as conversões das representações gráficas. Nos livros de Física e também nos livros técnico-científicos analisados, as representações RGR e RGE são muita utilizadas nas resoluções de problemas. Em contrapartida, as representações RGE e RGR são pouco exploradas nos livros de Matemática aqui selecionados, o que pode ser verificado no quadro 64.

Nos livros de Física, 7 e 8, os vetores representam basicamente forças, velocidades e acelerações em contextos da cinemática e da dinâmica e, a abordagem inicial se utiliza da representação geométrica, com posterior produção da representação gráfica, a partir da qual são introduzidos os elementos de trigonometria para a obtenção das componentes vetoriais, ou seja, temos a produção da representação algébrica trigonométrica.

Nos livros de Física e nos livros técnico-científicos os vetores são empregados como ferramentas de cálculos, diferentemente de como são tratados nos livros de Matemática, ou seja, como objetos matemáticos propriamente ditos. As representações RAT e RAM, assim como as representações RGE e RGR já mencionadas, são bastante empregadas nas resoluções dos problemas de Física, como mostra o quadro 99, em que se observa cerca de dois terços das operações de conversões envolvendo as representações RAT e RAM. Nos livros técnico-científicos temos cerca de dois terços das resoluções dos problemas envolvendo as representações RAM e RAT, embora a representação RAT não esteja presente nos enunciados, mas confirma uma forte presença dessas representações nas resoluções dos problemas. As representações RGE e RGR também são muito utilizadas nesses livros, tanto nos enunciados com nas resoluções, lembrando que todos esses dados podem ser conferidos a partir do quadro 114.

A terceira e a quarta questões de pesquisa levantadas estão interligadas, pois tratam do olhar sobre as operações semióticas de conversão abordadas no desenvolvimento da teoria e nas possíveis resoluções dos problemas propostos, como podemos ver a seguir:

“ As conversões das representações semióticas de vetores estão presentes nas partes teóricas dos livros didáticos? “

“ Os exercícios propostos nos livros didáticos exploram as operações semióticas de conversão para as possíveis resoluções? “

As questões impostas baseiam-se na premissa da “Teoria dos registros de representações semióticas” de Duval (2011a), que em linhas gerais diz que, para a apreensão de um conceito matemático cabe ao estudante saber transitar por ao menos duas representações semióticas distintas de um mesmo objeto, em nosso caso, um vetor. De acordo com esse argumento, demos mais ênfase às operações de conversão, relacionadas aos problemas propostos.

Analisando os dados dos quadros 64, 99 e 114 para os exercícios propostos, podemos fazer as seguintes observações e conclusões:

- Nos livros de Matemática (1 a 6) foram apontadas 600 operações semióticas, entre os problemas propostos, das quais 529 são operações de tratamento e apenas 71 são de conversão. A maior parte dessas conversões se concentra nas representações RGE, RGR e RLN. De acordo com os dados levantados e com o referencial teórico, o aprendizado pode ser prejudicado ou não é, ao menos, favorecido pelos conhecimentos mobilizados nas transformações de conversão. Os números mostram que as conversões são pouco exploradas nesses livros, muitas vezes justificado pelos tipos de problemas propostos, que abarcam apenas os conhecimentos envolvidos naquela representação, sem mobilizar conhecimentos presentes em outras representações distintas, bastando para tal, apenas as transformações de tratamento, que são predominantes.

  Com relação a parte teórica identificamos, na maior parte dos livros, exceção feita ao livro 1, uma forma de ligação realizada entre os elementos geométricos e gráficos de um vetor e os correspondentes elementos algébricos, embora isso se restrinja aos exemplos teóricos e não aos problemas numéricos resolvidos. Essa ligação feita entre os distintos elementos consideramos uma transformação de conversão, por exemplo de RGR para RAC, contudo não se percebe que seja esse o objetivo, trata-se apenas de uma mudança de tópicos. Isso pode ser confirmado pela baixa frequência de conversões nos problemas propostos, segundo apontado no quadro 64.

Complementando a resposta às questões de pesquisa, com relação aos livros de Matemática, é de que a conversão das representações não é em si uma finalidade. Os números demonstram isso, os exemplos teóricos também, havendo poucas oportunidades para a exploração dessas operações semióticas, que poderiam contribuir de forma positiva aos processos de ensino e de aprendizagem de vetores, criando oportunidades para que se compreendam as diversas formas de se representar um vetor e que isso possa facilitar a separação do que é o objeto matemático e as respectivas representações que permitem acessá-lo.

- Nos livros de Física (7 e 8) foram apontadas 381 operações semióticas, conforme quadro 99, distribuídas em 148 tratamentos e 233 conversões. As conversões nestes livros são bastante diversificadas, apresentando 19 combinações diferentes de conversões, nas quais as representações RAM, RAT, RAV, RGE e RLN estão presentes em bem mais que a metade do total de conversões existentes, em registros de chegada ou de partida. De um lado, a predominância das conversões, segundo Duval (2011a), favorecem a mobilização de diversos conhecimentos, cada qual associado e particular a um tipo de representação, o que deve contribuir favoravelmente aos processos de ensino e de aprendizagem de vetores. Por outro lado, poderia se pensar que uma gama muito grande de conhecimentos mobilizados poderia gerar maior dificuldade ao entendimento desse objeto, pois se tornaria a princípio, num processo mais complexo, devido aos vários conhecimentos com que se deve lidar, no entanto, esses conhecimentos poderiam ser tratados separadamente e aplicados aos vetores.

Os problemas propostos nos livros de Física apresentam um bom número de conversões das representações utilizadas, exigindo maior conhecimento matemático por parte do estudante, no entanto, dando-lhe mais ferramentas para resolver problemas e enriquecendo seu aprendizado, requisitos desejáveis para enfrentar situações problema da Física ou da Engenharia.

Na parte teórica dos livros de Física observa-se com clareza, o cuidado em mostrar como se transita de uma representação gráfica ou de uma representação com módulo e ângulo de um vetor para a sua representação algébrica trigonométrica (RAT), ou seja, o processo de cálculo das componentes vetoriais por meio da aplicação das razões trigonométricas e, também, partindo dessa última representação para a representação algébrica vetorial (RAV). Nessas operações fica bastante explícito o objetivo em se saber transitar por essas representações, portanto, há a necessária operação de conversão.

- Nos livros técnico-científicos (9, 10 e 11) a imensa maioria das operações semióticas identificadas são de conversão, ou seja 2151 e apenas 59 tratamentos. Assim como na disciplina de Física, nas disciplinas técnico-científicas é enfático e ajuda a explicar esses números, o fato de que a finalidade não são os vetores como objetos matemáticos simplesmente, mas sim como ferramenta para se chegar a solução de problemas específicos das áreas técnicas. Com isso entende-se a necessidade de trabalhar vários conhecimentos matemáticos aplicados aos vetores, pois as situações problema das engenharias demandam.

  As conversões são bastante diversificadas e se distribuem em 24 combinações distintas, com a maior parte se concentrando em conversões entre as representações RLN, RGE, RGR, RAM e RAT, considerando-se os registros de partida e de chegada.

A última questão de nossa pesquisa refere-se ao uso da Trigonometria e sua importância em aplicações da área técnica, além de outros conceitos matemáticos envolvidos na produção, tratamento e conversão de representações de vetores e, está assim formulada:

“Como a Trigonometria e outros conceitos matemáticos estão relacionados às representações dos vetores em tais livros? “

Primeiramente vamos responder a essa questão, resgatando algumas das conclusões de Nascimento (2005) sobre atividades de Geometria realizadas com alunos do 1º ano do EM. Segundo a autora, os alunos não sabiam nenhuma propriedade relacionada às principais figuras planas e ainda, não sabiam diferenciar figuras planas e figuras espaciais e, também, não sabiam diferenciar retas de segmentos. Sem contar a falta de domínio, por parte dos alunos, dos conceitos elementares de Trigonometria.

Lima, Sauer e Sartor (2011) realizaram oficinas envolvendo Trigonometria, devido a sua importância para a Engenharia e para as ciências em geral, com os objetivos de buscar formas mais atraentes de ensinar os conceitos trigonométricos e estabelecer a interação entre as ciências da Engenharia junto aos alunos e professores do EM.

Os dois trabalhos citados evidenciam a necessidade do domínio de conceitos de Geometria e também de Trigonometria para a produção de representações vetoriais e sua importância em aplicações na Engenharia. O autor do livro 9, *Estática*, por exemplo, e também nos livros 10 e 11, explora vários conceitos matemáticos com relação ao vetor, desde semelhança de triângulos até elementos de Trigonometria básica. Tais conhecimentos associados aos vetores se fazem necessários ante várias situações que o aluno pode enfrentar em problemas da Engenharia.

Identificamos, também, que nos livros de Física a Trigonometria é bastante utilizada, e está associada aos vetores para calcular suas componentes em cada eixo coordenado, produzindo uma representação algébrica trigonométrica (RAT). Quando necessário, é possível, partindo de representações gráfica (RGR), em coordenadas (RAC) ou algébrica trigonométrica (RAT) retornar à representação RAM, perfazendo o caminho inverso, sempre se valendo de elementos trigonométricos básicos, independentes do sentido da conversão, essenciais a essas operações.

Na Física como nas disciplinas técnico-científicas fica evidenciado pelas análises, tanto da parte teórica como dos problemas propostos, que os conceitos trigonométricos são fundamentais para a produção da representação de vetor mais frequentemente utilizada, e também, para as operações de tratamento envolvidas nos cálculos necessários às resoluções de problemas, assim como para as conversões necessárias de representações conforme as demandas para as resoluções dos problemas.

Nos livros de Matemática (1 a 6), os conceitos trigonométricos não são abordados para a produção de uma representação algébrica trigonométrica, tampouco elementos de geometria. Isso pode ser confirmado ao se acessar a teoria sobre vetores e os resultados das análises dos problemas propostos nesses livros, mostrados no quadro 64.

Os dois trabalhos supracitados já evidenciam as dificuldades dos alunos com relação à Trigonometria desde o EM e tornam visíveis as necessidades em se trabalhar mais os processos de ensino e de aprendizagem desses conceitos matemáticos, uma vez que tem grande utilidade para as áreas técnicas. Trigonometria é um tema que faz parte do currículo de Matemática e que merece receber atenção e cuidados especiais quanto as suas aplicações e ir além dos ditos cálculos de distâncias inacessíveis destacados nos PCNEM (1998).

Como sugerem Watson, Spirou e Tall (2003), para que os distintos enfoques da Física e da Matemática para os vetores sejam compartilhados e melhorem o entendimento desse objeto matemático, há necessidade de se introduzir esse tópico, também no currículo de Matemática, logo no EM. A partir daí, ampliar também as aplicações dos fundamentos básicos da Trigonometria, como na produção da representação algébrica trigonométrica para vetor.

Observamos que os livros didáticos de disciplinas de Matemática não atendem completamente as necessidades dos cursos de Engenharia, com relação a abordagem e aplicação do objeto matemático vetor. Destacamos esse ponto baseados nos dados levantados nas partes teóricas e nos problemas propostos, que demonstram, por sua vez, a baixa exploração das representações geométricas e gráficas e, principalmente, a ausência da Trigonometria nas representações de vetores e, como já mencionado, são elementos essenciais e de ampla utilização nas engenharias.

Como sugestão, verificamos a necessidade de reforçar efetivamente a exploração dos conceitos de Trigonometria, em disciplinas da Engenharia, como Cálculo e GA, visando a convergência dos objetivos estabelecidos nos livros didáticos da Matemática e nos livros didáticos das áreas técnicas, e a partir daí, chegar a uma uniformização das representações de vetores, incluindo símbolos e notações utilizadas, dando assim, maior proximidade entre as disciplinas de Matemática e as disciplinas de Física e técnicas, que ao nosso ver, estão um pouco distanciadas em suas finalidades.

Consideramos importante a abordagem de vetor que não fique somente no contexto matemático, mas também, que possam ser levados em conta os aspectos e necessidades relacionados aos pontos de vista de aplicações de outras ciências, como a Física e a Engenharia.

Este trabalho explorou as representações de vetores, aplicadas em muitas áreas da Engenharia, como Mecânica e Produção, no entanto, não tratamos da representação matricial de vetor, que tem grande aplicação em áreas como a *Robótica* e *Automação* e, portanto, pode ser investigada em novas pesquisas relacionadas a esse tema, dentro do universo da Engenharia.

Referências Bibliográficas

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com aplicações**. 10ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa, Portugal: Edições 70, 1977.

BARROS, L. G. X. **Uma Introdução Ingênua à Teoria dos Registros de Representações Semióticas**. Revista Ceciliana, Ano 22, nº 32, p.33 – 41. Santos, 2011.

BITTAR, M.**O Ensino de Vetores e os Registros de Representação Semiótica**. In: MACHADO, S.D.A. Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. 8ª ed. Campinas: Papirus, 2011. p. 71-94.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (PCNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Ministério da Educação e Cultura (MEC), 1998.

BRASIL, **Ministério da Educação, (2015)**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=21027:ministro-planeja-exame-como-forma-de-avaliar-ensino-dio&catid=418&Itemid=86 Acesso em 13 de agosto de 2015.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (PCNEM): Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica**. Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2). P.77

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica – um tratamento vetorial**. 3ª ed. - São Paulo: Prentice Hall, 2005.

CASTRO, Samira Choukri de. **Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação**. São Paulo: 2001. 111p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. In: MACHADO, S.D.A. Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica. 8ª ed. Campinas: Papirus, 2011. p. 11-33.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma – Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. São Paulo: Proem Editora, 2011. ISBN 978-85-87564-26-9.

DUVAL, R. **A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension In a Learning of Mathematics.** In: Educational Studies in Mathematics, New York, v. 61, p. 103-131, 2006.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6ª ed. - São Paulo: Atlas, 2008.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física, volume 1: mecânica**. 9ª ed. – Rio de Janeiro: GEN LTC, 2012.

HIBBELER, R.C. **Estática: Mecânica para Engenharia.** 12ª ed. – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

HIBBELER, R.C. **Dinâmica: Mecânica para Engenharia.** 12ª ed. – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

HIBBELER, R.C. **Resistência dos materiais.** 7ª ed. – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

KATZ, Victor J. **Historical Ideas in Teaching Linear Algebra**. In: SWETZ, Frank; FAUVEL, John; BEKKEN, Otto; JOHANSSON, Bengt; KATZ, Victor. Learn From the Masters. The Mathematical Association of America. United States of America: 1995. p.199-206.

KARRER, Monica. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria. Um Estudo sobre as Transformações Lineares na Perspectiva dos Registros de Representação Semiótica.** São Paulo: 2005. 435p. Tese de doutorado em Educação Matemática. PUC-SP.

LIMA, Isolda G.; SAUER, Laurete Z.; SARTOR, Solange G. **Oficinas de Matemática no projeto Engenheiro do Futuro: aproximando as escolas de Ensino Médio e as de Engenharia**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, art.1931, 2011, Blumenau, Santa Catarina, 2011.

NASCIMENTO, Alessandra Zeman. **Uma sequência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica**. São Paulo: 2005. 228p. Dissertação de mestrado profissional em Ensino de Matemática. PUC-SP.

PATRÍCIO, Rafael Silva. **As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. Belém: 2011. 103p. Dissertação de mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará – PA.

POYNTER, A. e TALL, D. **What do mathematics and physics teachers think that students will find difficult? A challenge to accepted practices of teaching**. Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick: 2005. pp. 128-135.

SANTAELLA, L. ***O que é semiótica***. São Paulo: Brasiliense, 2007. (Coleção Primeiros Passos; 103).

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear e Geometria Analítica (PLT 195)**. 2ª ed. - São Paulo: Pearson Prentice Hall, 1987.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. 2ª ed. - São Paulo: Pearson Prentice Hall, 1987.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. 2ª ed. - São Paulo: Pearson Prentice Hall, 1987.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. **Física para cientistas e engenheiros, volume 1.** 6ª ed. - Rio de Janeiro: GEN LTC, 2012.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. 2ª ed. - São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

WATSON, A.; SPYROU, P.; TALL, D. **The Relationship Between Physical Embodiment and Mathematical Symbolism: The Concept of Vector**. The Mediterranean Journal of Mathematics Education, 1(2): 2003. p.73-97.

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em 02/08/16.

Anexos

A – Plano de Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear – Anhanguera

Anhanguera

ANHANGUERA EDUCACIONAL LTDA.

Al. Maria Tereza, 4.266 • Valinhos (SP) • 13278-181 • (19) 3517-3517

PLANO DE ENSINO E APRENDIZAGEM			
CURSO: Engenharia Mecânica			
Disciplina: Álgebra Linear e Geometria Analítica	**Período Letivo:** 1° sem/2015	**Série:** 1ª Série	**Período:** Noturno
Semestre de Ingresso: 1°		**Ano de Ingresso:** 2015	
C.H. Teórica: 60	**C.H. Outras:** 20	**C.H. Total:** 80	

Ementa

Matrizes. Definição de Matriz. Matriz Retangular. Matriz Coluna. Matriz Linha. Matriz Quadrada. Matriz Diagonal. Igualdade de Matrizes. Adição de Matrizes. Produto de Matrizes. Determinantes. Determinante de uma Matriz. Ordem de um Determinante. Cálculo de Determinante. Propriedades do Determinante. Inversão de Matrizes. Propriedades da Matriz Inversa. Sistemas de Equações Lineares. Definição e Classificação de sistemas Lineares. Sistemas de Equações Lineares. Solução de um Sistema Linear. Método de Gauss Jordan. Método da Matriz Inversa. Vetores. Conceito de vetores. Operações com vetores. Produto Escalar. Ângulo entre dois vetores. Produto vetorial. Espaços Vetoriais. Propriedades dos Espaços Vetoriais. Combinação Linear. Dependência e Independência Linear. Diferenciação de Vetores. Transformações Lineares. Operadores Lineares. Geometria Analítica. A reta. O plano. Distâncias.

Objetivos

Ao final do curso o aluno estará apto a ; operar com matrizes, determinantes e sistemas de equação lineares.

Bibliografia Básica Padrão

1) ANTON, Howard. **ALGEBRA LINEAR COM APLICAÇÕES**. 10ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

Bibliografia Básica Unidade: Centro Universitário Anhanguera de Santo André (FSA)

1) BOLDRINI, José Luiz. **Algebra Linear**. 3ª ed. São Paulo: Harbra, 2000, v.1.

2) WINTERLE, P.; STEINBRUCH, Alfredob S.. **Álgebra Linear e Geomatria Analítica**. 2ª ed. Rondonópolis: Pearson - Prentice Hall, 2008, v.1.

Bibliografia Complementar: Centro Universitário Anhanguera de Santo André (FSA)

1) SWOKOWSKI, EARL W.. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

2) MACHADO, Antônio dos Santos. **Matemática** : Temas e Metas. 1ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

3) MACHADO, Antônio dos Santos. **Álgebra Linear e Geometria Analítica**. 2ª ed. São Paulo: Atual, 1982.

4) GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2010.

5) LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc Lars. **Álgebra Linear** : Coleção Schaum. 3ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

B - Plano de Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear - Mackenzie

UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE

Unidade Universitária: Escola de Engenharia – Campus Higienópolis		
Curso: **Curso de Engenharia de Produção**		Núcleo Temático: **NEMEE – Núcleo de Ensino de Matemática da Escola de Engenharia**
Disciplina: *Álgebra Linear*		Código da Disciplina: *ENEC00184*
Carga horária: 4 **68 horas aula**	Teóricas: (4) (68 horas aula = 51 horas) Práticas: (0)	Semestre: 2º

Ementa:

Estudo de Quádricas. Estudo de Matrizes e sistemas lineares. Estudo de Espaços vetoriais. Produto interno e espaços euclidianos. Normas e espaços normados. Transformações lineares. Autovalores e autovetores.

Bibliografia Básica:

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear: com aplicações**. 8. ed. reimp. Porto Alegre: Bookman, 2007.
CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra linear e aplicações.** 6. ed. reform. São Paulo: Atual, 2010.
STRANG, G. **Álgebra linear e suas aplicações.** São Paulo: Cengage Learning, 2010.

Bibliografia Complementar:

BERG, M. de. **Computational geometry: algorithms and applications**. 2. ed. Berlin: Springer, 2000.
BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria analítica:** um tratamento vetorial. 2. ed. São Paulo: Pearson Education, 2003.
KREYSZIG, E. **Advanced engineering mathematics**. 8. ed. New York: John Wiley, 1999.
LIPSCHUTZ, S. **Álgebra linear**. 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1968.
WYLIE, C. R.; BARRET, L. C. **Advanced engineering mathematics**. 6. ed. New York: McGraw-Hill, 1995.

C - Plano de Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear - USP

Universidade de São Paulo
Brasil

Júpiter - Sistema de Graduação

Instituto de Matemática e Estatística

Matemática

Disciplina: MAT2457 - Álgebra Linear I
Linear Algebra I

Créditos Aula:	4
Créditos Trabalho:	0
Carga Horária Total:	60 h
Tipo:	Semestral
Ativação:	01/01/2016

Objetivos
Apresentar o método de escalonamento e suas aplicações para a resolução de sistemas lineares, ensinar as leis básicas do cálculo vetorial, estudar geometria analítica em dimensão 3 e introduzir os conceitos de espaços vetoriais, subespaços e suas propriedades. Mostrar como os métodos de Álgebra Linear são importantes para a área de engenharia, com aplicações interessantes e motivadoras.

Bibliografia

1. Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial, I. Camargo, P. Boulos, 3a edição, Ed. Prentice Hall, 2005.
2. Álgebra Linear, Nicholson W. Keith, 2a edição, McGraw-Hill, 2006.
3. Álgebra linear com Aplicações, Howard Anton e Chris Rorres, 10o. edição. Bookman, 2012.
4. Álgebra Linear e suas Aplicações, G. Strang, Ed. Cengage Learning, 4a. edição, 2010.
5. Álgebra Linear e suas Aplicações, Lay David C., Ed. LTC, 2a edição, 1999.
6. Álgebra Linear com Aplicações, C. C. Callioli, H. Domingues, R. C. F. Costa, Ed. Atual, 6a. edição.

D – Plano de Ensino e Aprendizagem de Geometria Analítica - USP

Universidade de São Paulo
Brasil

Júpiter - Sistema de Graduação

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Matemática

Disciplina: SMA0505 - Matrizes, Vetores e Geometria Analítica
Matrices, Vectors and Analytic Geometry

Créditos Aula:	4
Créditos Trabalho:	0
Carga Horária Total:	60 h
Tipo:	Semestral
Ativação:	01/01/2009

Objetivos
Introdução dos conceitos de álgebra vetorial, geometria e álgebra linear.

Bibliografia

Livros Textos:
·Murdoch, D.C. Geometria Analítica com uma introdução sobre cálculo vetorial e matrizes. Livros Técnicos e Científicos, Rio, 1969.
·Caroli, A. Callioli, C. e Feitosa, M. Vatores e Geometria Analítica, Nobel, 1968.
·Boulos, P. Camargo, I. Geometria Analítica - Um tratamento vetorial, Makron Books, 1987.

Complementares:
·Carlos A. Callioli, Hygino H. Domingues, and Roberto C. F. Costa. Álgebra Linear e Aplicações. Atual Editora, São Paulo, 6a. edição, 1995.
·Paulo Boulos and Ivan de Camargo e Oliveira. Geometria Analítica - um tratamento vetorial. Mc Graw-Hill, São Paulo, 1986.
·José L. Boldrini, Sueli I. R. Costa, Vera L. Figueiredo, and Henry G. Wetzler. Álgebra Linear. Ed. Harbra Ltda., São Paulo, 3a. edição, 1986.
·Nathan Moreira dos Santos. Vetores e Matrizes. Livros Técnicos e Científicos Ed. S.A., Rio de Janeiro, 3a. edição, 1988.
·David R. Hill and David E. Zitarelli. Linear Algebra Labs with Matlab. Macmillan Publishing Company, New York, 1994.
·Elon Lages Lima. Álgebra Linear. IMPA, Rio de Janeiro, 2a. edição, 1996.
·Seymour Lipschutz. Álgebra Linear. McGraw-Hill, São Paulo, 2a. edição, 1972.
·Steinbruch and P. Winterle. Geometria Analítica. Makron Books, São Paulo, 2a. edição, 1987.
·Gilbert Strang. Introduction to Linear Algebra. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1993.

E – Plano de Ensino e Aprendizagem de Física – Anhanguera

Anhanguera

ANHANGUERA EDUCACIONAL LTDA.
Al. Maria Tereza, 4.266 • Valinhos (SP) • 13278-181 • (19) 3517-3517

PLANO DE ENSINO E APRENDIZAGEM			
CURSO: Engenharia Mecânica			
Disciplina: Física I	**Período Letivo:** 1º sem/2015	**Série:** 2ª Série	**Período:** *Não definido*
Semestre de Ingresso: 2º		**Ano de Ingresso:** 2014	
C.H. Teórica: 60	**C.H. Prática:** 10	**C.H. Outras:** 10	**C.H. Total:** 80

Ementa
Grandezas Físicas. Sistemas de Unidades. Movimento Retilíneo: posição, deslocamento, velocidade e aceleração. Movimento Uniforme. Movimento Uniformemente Variado. Queda Livre. Movimento em duas e três dimensões: lançamento de projéteis e movimento circular.

Bibliografia Básica Padrão
1) HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. **Física I**. 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2007.

Bibliografia Básica Unidade: Centro Universitário Anhanguera de Santo André (FSA)
1) TIPLER, Paul A. (org.). **FISICA** : FISICA. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2006, v.1.
2) SEARS, Francis Weston; ZEMANSKY, Mark W.. **Física 1 - Mecânica**. 1ª ed. São Paulo: Makron Books, 2002.
3) YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. (orgs.). **Física I**. 12ª ed. São Paulo: Pearson - Addison Wesley, 2008, v.1.

Bibliografia Complementar: Centro Universitário Anhanguera de Santo André (FSA)
1) RAMALHO JR, F; FERRARO, Nicolau et al. **fundamentos da física: eletricidade, introdução à física moderna e análise dimensional**. 8ª ed. São Paulo: Moderna, 2003, v.3.
2) CUTNELL, John D.; JOHNSON, Keneth W.. **Física, V.1**. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2006, v.1.
3) TIPLER, PAUL A.. **FÍSICA PARA CIENTISTAS E ENGENHEIROS**. 4ª ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2000.
4) SEARS, Francis Weston; ZEMANSKY, Mark W.; YOUNG, Hugh D.. **Física**. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1998.
5) YOUNG, Hugh D. et al. **Física I:Mecânica**. 10ª ed. São Paulo: Pearson, 2003, v.1.

F – Plano de Ensino e Aprendizagem de Física Geral I - USP

Universidade de São Paulo
Brasil

Júpiter - Sistema de Graduação

Instituto de Física de São Carlos

Física e Ciência Interdisciplinar

Disciplina: FCI0405 - Física Geral I

Créditos Aula: 4

Créditos Trabalho: 0

Tipo: Semestral

Objetivos

Iniciar os estudantes nos estudos da mecânica considerando operações de derivação e integração.

Programa Resumido

Estática, cinemática dos pontos materiais, dinâmica dos pontos materiais, trabalho e energia, energia potencial.

Programa

1. Estática: 1.1. Conceito de força resultante 1.2. Decomposição de forças e o produto escalar 1.3. Equilíbrio de pontos materiais no plano 1.4. Equilíbrio de pontos materiais no espaço 1.5. Estática dos corpos rígidos 1.6. Conceito vetorial de torque – o produto vetorial 1.7. Conceito de binários 1.8. Força de reação 1.9. Equilíbrio de corpos rígidos em duas dimensões 2. Cinemática dos pontos materiais 2.1. Movimentos unidimensionais 2.2. Movimentos em duas e três dimensões 2.3. Lançamentos de projéteis no campo gravitacional 2.4. Movimentos circulares 3. Dinâmica dos pontos materiais 3.1. Conceito de momento linear 3.2. As Leis de Newton 3.3. Aplicações das Leis de Newton 3.4. O princípio de Arquimedes 3.5. Forças naturais e de atrito 4. Trabalho e energia 4.1. Conceito de trabalho unidimensional 4.2. Trabalho em três dimensões – o produto escalar 4.3. Princípio dos trabalhos virtuais e suas aplicações 4.4. As relações entre trabalho e energia 4.5. Fundamentos da Hidrodinâmica 5. Energia Potencial 5.1. Forças dissipativas e conservativas 5.2. Propriedades das forças conservativas 5.3. A conservação da energia.

Avaliação

Método

Provas regulares e uma prova substitutiva para substituir a menor nota das provas regulares.

Critério

Média de prova maior ou igual a 5,0.

Bibliografia

Beer and Johnston. Mecânica vetorial para engenheiros: estática. Tipler, P. Física - Vol. I

G – Plano de Ensino e Aprendizagem de Física – Mackenzie

UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE
Decanato Acadêmico

Unidade Universitária: **Escola de Engenharia**		
Curso: **Engenharias Civil, Elétrica, Mecânica, de Produção e de Materiais**	Núcleo Temático: Núcleo de Ensino de Física da Escola de Engenharia (NEFEE)	
Disciplina: **Física Geral I**		Código da Disciplina: **ENEC00198**
Carga horária: 4	(4) Teórica (0) Prática	Semestre Letivo: 2º semestre de 2015

Ementa:

Estudo das bases teóricas necessárias ao estudo inicial da Física, tais como: Análise Dimensional - Conceitos Fundamentais, Princípio da Homogeneidade Dimensional, Mudança de Unidades, Previsão de Fórmulas Físicas, Teoria dos Modelos. Estática do Ponto Material. Estática do Corpo Rígido.

Bibliografia Básica:

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. v. 1.
MASSON, T. J. **Física geral I:** análise dimensional e estática. São Paulo: Páginas e Letras, 2003.
SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. **Princípios de física:** mecânica clássica. São Paulo: Thomson, 2005. v. 1.

Bibliografia Complementar:

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. **Mecânica vetorial para engenheiros:** cinemática e dinâmica. 5. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.
MARTINS, N. **Dinâmica** . São Paulo: EPU, 1979.
MASSON, T.J. **Física geral II**: cinemática e dinâmica sólidos e fluidos. São Paul o: Plêiade, 2006. PAULI, R. U. **Física 1:** mecânica. São Paulo: EPU, 1978.
YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física 1:** mecânica. São Paulo: Pearson/Addison-Wesley, 2005.

H – Plano de Ensino e Aprendizagem de Física I – USP

Universidade de São Paulo
Brasil

Júpiter - Sistema de Graduação

Instituto de Física

Disciplinas Interdepartamentais do IF - para EP

Disciplina: 4320195 - Física Geral e Experimental para Engenharia I
General and Experimental Physics for Engineering I

Créditos Aula:	4
Créditos Trabalho:	0
Carga Horária Total:	60 h
Tipo:	Semestral
Ativação:	01/01/2010

Objetivos
Revisar e aprofundar conceitos de mecânica clássica com auxílio do cálculo diferencial e integral e vetores, levando a significados mais gerais tais como as leis de conservação da energia, do movimento linear e momento linear e do momento angular, que são leis fundamentais da física.

Avaliação

Método

Aulas expositvas para grupos de 60 alunos (2h/semana) e aula prática com grupos de 30 alunos (2h/semana) com resolução de exercícios ou demonstrações de experiências.

Critério

Provas

Bibliografia

1) Sears e Zemansky, Física I, Hugh D. Young e R.A. Freedman, 10a. Edição. 2) Fundamentos da Física I, D. Halliday e J. Merrill, Editora LTC. 3) Física para Cientistas e Engenheiros, Vol.1, R.A. Serway, Editora LTC. 4) Curso de Física Básica, Mecânica, Vol.1, H.M. Nussenzveig, Ed. Edgard Blücher.

I – Plano de Ensino e Aprendizagem de Física – Mackenzie

UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE
Decanato Acadêmico

Unidade Universitária:
Escola de Engenharia

Curso: **Engenharia Civil, Elétrica, Materiais, Mecânica e Produção**	Núcleo Temático: Núcleo de Ensino de Física da Escola de Engenharia (NEFEE)

Disciplina: **Física Geral II**		**Código da Disciplina:** **ENEC00200**
Carga horária: 04 h/a	(X) Teórica ( ) Prática	Semestre Letivo: 2º semestre de 2015

Ementa:

Estudo das bases teóricas necessárias ao estudo inicial da Mecânica, tais como: Movimento Unidimensional - Cinemática Escalar; Movimento em Duas Dimensões - Cinemática Vetorial; Movimento Circular4; Impulso de uma Força e Quantidade de Movimento; As Leis do Movimento – Dinâmica; Forças no Movimento Circular - Outras Aplicações das Leis de Newton; Trabalho de uma Força - Forças Conservativas; Energia - Energia Cinética - Energia Potencial - Energia Mecância; Conservação da Energia; Trabalho de Forças não Conservativas.

Bibliografia Básica:

SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. Princípios de Física - mecânica clássica. volume 1. São Paulo: Thomson, 2005.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. Fundamentos de Física. volume 1. 6a edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2009.

TIPLER, P.A. - Física para cientistas e engenheiros. Volume I. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. , 2011.

Bibliografia Complementar:

MASSON, T.J.; Física Geral II: cinemática e dinâmic a sólidos e fluidos. São Paulo S.P.: Plêiade, 2006.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. – Física 1: mecânica. São Paulo SP: Pearson/Addison Wesley, 2005.

PAULI, R. U.; Física 1: mecânica, São Paulo SP: EPU , 1978.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. ; Mecânica vetorial pa ra engenheiros: cinemática e dinâmica. 5ª Ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

MARTINS, N.; Dinâmica. São Paulo, SP: EPU, 1979.

J - Plano de Ensino e Aprendizagem de Mecânica Aplicada – USP

Universidade de São Paulo
Brasil

Júpiter - Sistema de Graduação   Escola de Engenharia de São Carlos

Engenharia Mecânica

Disciplina: SEM0500 - Estática Aplicada às Máquinas
Mechanics: Statics

Créditos Aula:	4
Créditos Trabalho:	0
Carga Horária Total:	60 h
Tipo:	Semestral
Ativação:	01/01/2001

Objetivos
Fornecer aos alunos do curso básico (primeiro ano) um contato com os problemas de Engenharia Mecânica através do estudo de estática aplicada às máquinas e suas estruturas.

Programa Resumido
Noçoes de grandezas escalares e vetoriais - SI. Forças e momentos de forças - binários. Equilíbrio do Ponto - Elementos com dimensões desprezíveis. Equilíbrio do corpo rígido - forças e concorrentes. Paralelas e caso geral. Atrito e equilíbrio estático - atrito de rolamento. Vínculos de elementos e máquinas. Forças em elementos e máquinas. Esforços internos - método analítico e métodos gráficos - diagramas. Princípio do trabalho virtual - noções de estabilidade. Centros de massa. Propriedades de inércia.

Avaliação

Método

Aulas expositivas teóricas e aulas práticas. Utilização de recursos de informática e recursos áudiovisuais.

Critério

Média ponderada das notas obtidas em provas e trabalhos maior ou igual a 5,0 (cinco).

Bibliografia

Principal:
HIBELLER, R.C., Estática: Mecânica para Engenharia, São Paulo: Pearson Prrentice-Hall, 10a. Ed., 2005.
Complementar:
HIBBELER, R.C., Mecânica: Estática, Rio de Janeiro: LTC, 8a Ed., 1999.
MERIAM, J.L., KRAIGE, L.G., Mecânica para Engenharia volume 1: Estática, Rio de Janeiro: LTC, 6a. Ed., 2009.
BEER, F.P., JOHNSTON JR., E.R. Mecânica vetorial para engenheiros: estática, São Paulo: Makron Books, 5a ed., 1994.
MUCHERONI, M.F. Mecânica Aplicada às Máquinas, EESC-USP, São Carlos, 1997.

K - Plano de Ensino e Aprendizagem de Estática – Mackenzie

Portal Mackenzie

Plano de Ensino

Semestre:	1º de 2015
Disciplina:	Mecânica dos Sólidos I
Código:	07013604
Curso:	ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
Ementa:	Conceitos fundamentais de estática dos pontos materiais. Sistemas de Forças: Sistema de Forças Concorrentes, Sistema de Forças Paralelas (do mesmo sentido e com sentidos diferentes), Sistema de forças qualquer. Equilíbrio de ponto. Momentos: momento de uma força em relação a um ponto, momento de uma força em relação a um eixo, conceito de redução de forças a um ponto, conceito de mudança de pólo ou centro de redução, momento de binário. Equilíbrio de corpo rígido, estudo de reações vinculares (no plano e no espaço). Geometria das massas: Conceito de centro de massas, conceito de centro de gravidade, conceito de centróide e baricentro. Teoremas de Pappus-Guldin. Momento Estático. Momento de Inércia de Área. Teorema dos Eixos Paralelos (Teorema de Steiner) Produto de Inércia e Teorema dos Eixos de Rotação.
Metodologia:	A disciplina consta de quatro (4) horas, dentro destas, duas (2) horas dedicadas à introdução dos conceitos teóricos e, duas (2) horas à solução de exercícios. As aulas serão expositivas, empregando-se lousa e retroprojetor. Será feita ênfase no relacionamento dos conceitos ministrados com disciplinas a serem recebidas posteriormente pelo acadêmico, oferecendo exemplos de aplicação.
Bibliografia:	Básica: 1. HIBBELER, R. C. Mecânica para Engenheiros - Estática, volum. 1, 10ª edição. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005. **Complementar:** 1. BEER, Ferdinand P.; Johnston, E. Russell Jr; Eisenberg, Elliot R. Mecânica Vetorial para Engenheiros. Estática. 7a edição. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 2006. 2. MERIAN, James L. Estática, 4a edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1997.

L – Plano de Ensino e Aprendizagem de Estática – Anhanguera

Anhanguera

ANHANGUERA EDUCACIONAL LTDA.

Al. Maria Tereza, 4.266 • Valinhos (SP) • 13278-181 • (19) 3517-3517

PLANO DE ENSINO E APRENDIZAGEM			
CURSO: Engenharia Mecânica			
Disciplina: Mecânica Geral	**Período Letivo:** 2º sem/2015	**Série:** 4ª Série	**Período:** Noturno
Semestre de Ingresso: 1º		**Ano de Ingresso:** 2014	
C.H. Teórica: 60		**C.H. Total:** 60	

Ementa
Conceitos fundamentais da mecânica Newtoniana. Estática dos pontos materiais. Sistemas equivalentes de forças. Equilíbrio dos corpos rígidos no plano e no espaço. Centróides. Centros de Gravidade. Cargas distribuídas. Momento de Inércia.

Objetivos
Ao término da disciplina o aluno deverá:Apresentar conhecimentos dos conceitos fundamentais da mecânica Newtoniana, mostrando capacidade para o estudo de: equilíbrio no plano e no espaço de um ponto material e dos corpos rígidos:centróides e centros de gravidade:momento estático e momento de inércia:forças internas e externas atuantes. Estar apto para analisar de modo lógico qualquer problema da aréa, nele sabendo aplicar estes conceitos, para desenvolvê-lo e encontrar sua solução.

Sistema de Avaliação	
1ª Avaliação - PESO 4,0	**2ª Avaliação - PESO 6,0**
Atividades Avaliativas a Critério do Professor	**Prova Escrita Oficial**
Práticas: 0	**Práticas: 0**
Teóricas: 10	**Teóricas: 10**
Total: 10	**Total: 10**

Bibliografia Básica Padrão
1) HIBBELER, Russel C.. **Estática: mecânica para engenharia**. 12ª ed. São Paulo: Pearson - Prentice Hall, 2011.

Bibliografia Básica Unidade: Centro Universitário Anhanguera de Santo André (FSA)
1) MERIAM, J. L.. **Mecânica** : estática. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2004.
2) MELCONIAN, Sarkis. **Elementos de Máquinas**. 9ª ed. São Paulo: Érica, 2009.

Bibliografia Complementar: Centro Universitário Anhanguera de Santo André (FSA)
1) BEER, Ferdinand P.; CLAUSEN, William E.. **Mecânica Vetorial Para Engenheiros - Dinâmica**. 7ª ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.
2) SHAMES, Irving H.. **Estática** : Mecânica para Engenharia. 4ª ed. São Paulo: Pearson - Prentice Hall, 2002, v.1.
3) SERWAY, Raymond A.; JEWETT JR., Jhon W.. **Princípios de física** : mecânica clássica. 1ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009, v.1.
4) COLLINS, T.. **Projeto Mecânico de Elementos de Maquinas**. 1ª ed. : Gente, 2010.
5) MORAN, Michael J. et al. **Introdução a engenharia dos sistemas termicos** : termodinâmica, mecânica dos fluidos e transferência de calor. 1ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

M - Plano de Ensino e Aprendizagem de Mecânica Aplicada – Anhanguera

Anhanguera

ANHANGUERA EDUCACIONAL LTDA.

Al. Maria Tereza, 4.266 • Valinhos (SP) • 13278-181 • (19) 3517-3517

PLANO DE ENSINO E APRENDIZAGEM			
CURSO: Engenharia de Produção			
Disciplina: Mecânica Aplicada	**Período Letivo:** 1° sem/2015	**Série:** 4ª Série	**Período:** *Não definido*
Semestre de Ingresso: 2°		**Ano de Ingresso:** 2013	
C.H. Teórica: 40	**C.H. Outras:** 20	**C.H. Total:** 60	

Ementa

Trabalho e Energia: Princípios do Trabalho e Energia; Potência e Eficiência; Conservação de Energia. Cinemática do Movimento Plano de um Corpo Rígido: Movimento Plano de um Corpo Rígido; Movimento de Translação Curvilínea; Rotação em torno de um eixo fixo; Centro instantâneo de rotação no movimento plano. Velocidade e aceleração no movimento plano. Estudo das Tensões em um Ponto: Nomenclatura das tensões; Estado plano de tensão; Expressões gerais para o cálculo da tensão normal; Círculo de Mohr; Eixos e tensões normais principais. Solicitação Axial: Tensão normal e deformação; Lei de Hooke; Diagrama convencional tensão x deformação; Coeficiente de Poisson. Torção em Eixos Maciços de Seções Quaisquer: Eexpressões para cálculo da tensão cisalhante e ângulo de torção para seção circular: Teoremas gerais. Flexão: Flexão pura; Expressão para cálculo da tensão normal; Linha neutra; Flexão simples e composta; Flexão %u2013 torção.

Objetivos

- Apresentar aos alunos conceitos nas áreas de Cinemática e Dinâmica da máquina aplicados a engenharia

Procedimentos Metodológicos Indicados

Aulas teóricas expositivas, com exercícios em classe e recomendados para casa; desenvolvimento do projeto final da disciplina (atividade extra classe em laboratório) com levantamento de dados e cálculos das características e aplicação de um câmbio automotivo de seis marchas; e outros recursos disponíveis (lousa, retro-projetor, etc.).

Bibliografia Básica Padrão

1) HIBBELER, Russel C. (org.). **Dinâmica: Mecânica para Engenharia**. 12ª ed. São Paulo: Pearson, 2011.

Bibliografia Básica Unidade: Centro Universitário Anhanguera de Santo André (FSA)

1) MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G.. **Mecânica para Engenharia** : Estática. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2009, v.1.

2) MELCOMIAN, Sarkis. **Elementos de Máquinas**. 9ª ed. São Paulo: Érica, 2008.

Bibliografia Complementar: Centro Universitário Anhanguera de Santo André (FSA)

1) NIEMANN, G.. **Elementos de Máquinas**. 1ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

2) HIBBELER, Russel Charles. **Dinâmica** : Mecânica para Engenharia. 10ª ed. São Paulo: Pearson - Prentice Hall, 2004.

3) NORTON, R. L.. **Projeto de Máquinas** : Uma Abordagem Integrada. 1ª ed. São Paulo: Artmed, 2004.

4) COLLINS, J. **Projeto Mecânico de Elementos de Máquinas**. 1ª ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2006.

5) COLLINS, Jack A.. **Projeto mecânico de elementos de máquinas** : uma perspectiva de prevenção da falha. 1ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

N – Plano de Ensino e Aprendizagem de Dinâmica – Mackenzie

UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE
Decanato Acadêmico

Unidade Universitária: **Escola de Engenharia**		
Curso: **Engenharia Mecânica**	Núcleo Temático: Núcleo de ensino de Matemática da Escola de Engenharia (NEMEE)	
Disciplina: **Mecânica dos Sólidos II**		Código da Disciplina: **ENEX00997**
Professor(es): Carla Silva Campos	DRT: 102078-2	Etapa: 3ª Etapa
Carga horária: 4	(2) Teórica (2) Prática	Semestre Letivo: 2º semestre de 2015

Ementa:

Cinemática do ponto material em vários referenciais em 3D. Cinemática dos corpos rígidos: translação, rotação e movimento plano geral, centro instantâneo de rotação e análise das acelerações no movimento plano, sistema de coordenadas em rotação (aceleração de Coriolis). Dinâmica dos corpos rígidos.

Bibliografia Básica:

HIBBELER, R. C. Mecânica para Engenheiros – Dinâmic a. Vol 2 - 12ª Ed. São Paulo, Pearson, 2011.
BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. JR.; EISENBERG, E. R.;CLAUSEN, W. E. Mecânica Vetorial para Engenheiros - Dinâmica. Vol 2 - 7ª Ed. Rio de Janeiro, McGraw-Hill, 2006.
MERIAN, J. L; KRAIGE, L. G. Mecânica – Dinâmica. Vo l 2 – 5ª Ed. Rio de Janeiro, LTC, 2004.

Bibliografia Complementar:

BORESI, A.P; SCHMIDT, R. J. Dinâmica. São Paulo, Pi oneira Thomson Learning, 2003.
HIGDON, A; STILES, W. B; DAVIS, A. W; EVCES, C. R.; WEESE, J. A. Mecânica – Dinâmica. Vol 2 – 2ª Ed. Rio de Janeiro, Prentice Hall do Brasil,1979.
SHEPPARD, S. D; TONGUE, B.H. Dinâmica – Análise e P rojeto de Sistemas em Movimento. Rio de Janeiro, LTC, 2007.
SINGER F. L. Mecânica para Engenheiros – Dinâmica. São Paulo, Harbra, 1978.
SHAMES, I. H. Dinâmica – Mecânica para Engenharia. Vol 2 – 4ª Ed. São Paulo, Pearson Education do Brasil, 2002.

O - Plano de Ensino e Aprendizagem de Mecânica Aplicada – USP

USP Júpiter - Sistema de Graduação

Escola de Engenharia de São Carlos   Engenharia Mecânica

Disciplina: SEM0501 - Dinâmica Aplicada às Máquinas
Mechanics: Dynamics

Créditos Aula:	4
Créditos Trabalho:	0
Carga Horária Total:	60 h
Tipo:	Semestral
Ativação:	01/01/2012

Objetivos
Introduzir o aluno aos conceitos básicos da dinâmica de sistemas mecânicos incluindo técnicas de representação da cinemática e cinética de partículas e corpos rígidos. Fornecer requisitos para o cálculo das relaçõess cinemáticas em sistemas de corpos rígidos.

Avaliaçao

Método

Aulas expositivas teóricas e aulas práticas. Utilização de recursos de informática e recursos audiovisuais.

Critério

Média ponderada das notas obtidas em provas e trabalho maior ou igual a 5,0 (cinco).

Bibliografia

Principal:
HIBELLER, R.C., Mecânica para Engenharia, São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 10a Ed., 2005.

Complementar:
HIBELLER, R.C., Mecânica: Dinâmica, Rio de Janeiro: LTC, 8a Ed., 1999.
MERIAM, J.L., KRAIGE, L.G., Mecânica para Engenharia volume 2: Dinâmica, Rio de Janeiro: LTC, 6a Ed., 2009.
BEER, F.P., JOHNSTON JR., E.R. Mecânica vetorial para engenheiros: cinemática e dinâmica, São Paulo: Makron Books, 5a Ed., 1994.
MUCHERONI, M.F., Mecânica Aplicada às Máquinas, EESC-USP, São Carlos, 1997.

P - Plano de Ensino e Aprendizagem de Resistência dos Materiais – Anhanguera

Anhanguera

ANHANGUERA EDUCACIONAL LTDA.
Al. Maria Tereza, 4.266 • Valinhos (SP) • 13278-181 • (19) 3517-3517

PLANO DE ENSINO E APRENDIZAGEM			
CURSO: Engenharia Mecânica			
Disciplina: Resistência dos Materiais I	**Período Letivo:** 2° sem/2015	**Série:** 6ª Série	**Período:** Noturno
Semestre de Ingresso: 1°		**Ano de Ingresso:** 2013	
C.H. Teórica: 60	**C.H. Prática:** 10	**C.H. Outras:** 10	**C.H. Total:** 80

Ementa
Conceito de Esforços e Tensões. Estudo de tensões e Deformações. Forças cortantes e momento fletor, Flexão Pura. Torção. Carregamento Transversal.

Objetivos
- Determinar as características das figuras planas (seções transversais em vigas);
- Adquirir conceitos para o cálculo de esforços internos solicitantes em estruturas isostáticas;
- Adquirir conceitos para o cálculo de tração, compressão e cisalhamento. Cálculo dos esforços internos solicitantes e resistentes;
- Analisar deformação longitudinal.

Bibliografia Básica Padrão
1) BEER, F. P.; DEWOLF, John T.. **Resistência dos Materiais**. 4ª ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

Bibliografia Básica Unidade: Centro Universitário Anhanguera de Santo André (FSA)
1) SOUZA, Sergio Augusto de. **Ensaios Mecânicos de Materiais Metálicos**. 5ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2004.
2) MELCONIAN, S.. **Mecanica Tecnica e Resistência dos Materiais**. 1ª ed. São Paulo: Érica, 2006.

Bibliografia Complementar: Centro Universitário Anhanguera de Santo André (FSA)
1) HIBBELER, Russel Charles. **Resistência dos Materiais**. 5ª ed. São Paulo: Pearson - Prentice Hall, 2004.
2) NASH, William. **Resistência dos Materiais**. 2ª ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.
3) ARRIVABENE, Vladimir. **Resistência dos materiais**. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, 1994.
4) BOTELHO, Manoel Henrique Campos. **Resistência dos Materiais**. 1ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.
5) COLLINS, Jack et al. **Projeto Mecânico de Elementos de Máquinas** : Uma Perspectiva de Prevenção a Falha. 1ª ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2006.

Q – Plano de Ensino e Aprendizagem de Resistência dos Materiais – Mackenzie

UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE
Decanato Acadêmico

Unidade Universitária: **Escola de Engenharia**		
Curso: **Engenharia Mecânica**	Núcleo Temático:	
Disciplina: **Resistência dos Materiais I**		Código da Disciplina: **ENEC00259**
Professor(es): Eduardo Roberto Giannella Ciccarelli	DRT: 102230-9	Etapa: 3ª Etapa
Carga horária: 4	(4) Teórica (0) Prática	Semestre Letivo: 2º semestre de 2015

Ementa:

Análise do equilíbrio externo e esforços internos solicitantes - obtenção dos esforços. Interpretação do diagrama tensão/deformação. Análises dos esforços. Caracterização, detalhamento e cálculo de treliças isostáticas planas. Caracterização do corte puro. Estudo de peças submetidas à flexão simples, elaboração e análise de diagramas. Problemas Hiperestáticos – Deformações Térmicas.

Bibliografia Básica:

BEER, F.P.; JOHNSTON JR., E. R. **Resistência dos materiais**. 4 ed. São Paulo: Makron Books, 2006.
GERE, J. M. **Mecânica dos materiais:** James M. Gere. Tradução Luiz Fernando de Castro Paiva. Revisão técnica Marco Lúcio Bittencourt. São Paulo: Cengage Learning, 2010.
HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

Bibliografia Complementar:

ALMEIDA, M. C. F. **Estruturas isostáticas**. São Paulo: Oficina de Textos, 2013.
AMARAL, O. C. A. **Estruturas isostáticas**. 6. ed. Belo Horizonte: MG Edições Engenharia e Arquitetura, 1992.
BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R.; DEWOLF, J. T.; MAZUREK, D. F. **Mecânica dos Materiais** . 5 ed. São Paulo: BOOKMAN, 2011.
RILEY, W. F.; STURGES, L. D.; MORRIS, D. H. **Mecânica dos materiais.** Tradução Amir Kurban. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

R – Plano de Ensino e Aprendizagem de Resistência dos Materiais - USP

Universidade de São Paulo
Brasil

Júpiter - Sistema de Graduação **Escola de Engenharia de São Carlos**

Engenharia de Estruturas

Disciplina: SET0183 - Mecânica dos Sólidos I
Solid Mechanics I

Créditos Aula:	4
Créditos Trabalho:	0
Carga Horária Total:	60 h
Tipo:	Semestral
Ativação:	01/01/2016

Objetivos
Fornecer aos alunos os conhecimentos básicos sobre mecânica dos sólidos, destacando aplicações em Engenharia Mecânica, Produção Mecânica, Mecatrônica e Materiais e Manufatura, visando prepará-los para as demais disciplinas relacionadas à área de projeto mecânico.

Avaliação

Método

Aulas expositivas, exemplos e exercícios práticos resolvidos pelo professor e alunos em sala de aula. Listas de exercícios disponibilizadas para resolução fora da sala de aula. ATIVIDADES DISCENTES: participação nas aulas teóricas, resolução dos exercícios recomendados pelo Professor.

Critério

Média ponderada das notas de provas e/ou testes e/ou listas de exercícios realizados durante o semestre maior ou igual a 5,0 (cinco). Ao final do semestre será realizada prova, versando sobre todo o conteúdo ministrado, que poderá substituir a menor nota obtida nas avaliações feitas durante o semestre.

Bibliografia

Gere, J.M., Barry, G. Mecânica dos Materiais, Ed. Cengage, 2010.
Hibbeler, R.C., Resistência dos Materiais, 7ª Ed. Prentice Hall Brasil, 2010.
Beer, F.P. & Johnston, E.R., Resistência dos Materiais, 3ª Ed. Makron, 1995.
Schiel, F., Introdução à Resistência dos Materiais, EESC-USP, 1984.
Higdon, Ohlsen, Stile, Weese, Riley. - Mec. dos Materiais. Guanabara Dois, 1982.
Popov, E.P. - Introdução à Mecânica dos Sólidos. São Paulo, Edgard Blücher, 1978.
Feodosiev, V.I. - Resistência dos Materiais. Portugal, Ed. Lopes da Silva, 1977.

S – Endereços para acesso aos demais planos de ensino

http://www.faap.br/pdf/faculdades/engenharia/portaria40/p40_eng_ppc_mc_2012_3615.pdf
http://www.faap.br/pdf/faculdades/engenharia/portaria40/P40%20ENG%20PPC%20PRD%2020132%2030515.pdf
http://www.fsa.br/images/graduacao/matriz/Eng-producao.pdf
http://www.fsa.br/images/graduacao/matriz/Eng-mecanica.pdf
http://engenhariamecanicafsa.weebly.com/uploads/2/9/2/6/2926549/projeto_pedag%C3%B3gico_-_2013.pdf
http://maua.br/graduacao/engenharia-mecanica/disciplinas-noturno
http://maua.br/graduacao/engenharia-producao/disciplinas-noturno
http://www.faap.br/faculdades/engenharia/portaria40.asp
http://www3.fsa.br/mecanica/conteudo.asp?cat=Grade%20Curricular
http://www3.fsa.br/producao/conteudo.asp?cat=Grade%20Curricular
http://maua.br/graduacao/engenharia-mecanica/disciplinas-noturno
http://maua.br/graduacao/engenharia-producao/disciplinas-noturno
http://www.pucsp.br/graduacao/engenharia-de-producao#matriz_curricular
http://www.pucsp.br/graduacao/engenharia-mecanica#matriz_curricular
http://portal.estacio.br/graduacao/engenharia-mec%C3%A2nica
http://portal.estacio.br/graduacao/engenharia-de-produ%C3%A7%C3%A3o
Engenhariax=UNIP
http://www.engenhariax.com/2012/02/estatica-nas-estruturas.html
http://www.engenhariax.com/2014/01/plano-de-ensino-calculo-com-geometria.html
http://www.engenhariax.com/2013/08/plano-de-ensino-mecanica-da-particula.html
http://www.engenhariax.com/2014/01/plano-de-ensino-cinematica-dos-solidos.html
http://www.engenhariax.com/2011/08/plano-de-ensino-complementos-de-fisica.html
http://www.engenhariax.com/2011/08/plano-de-ensino-dinamica-dos-solidos.html
http://www.engenhariax.com/2012/02/resistencia-dos-materiais.html