UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO

TALITA ARAÚJO SALGADO FAUSTINO

O PENSAMENTO ALGÉBRICO EM ATIVIDADES RELACIONADAS AO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO: EMPREGANDO TECNOLOGIAS MÓVEIS EM UMA SALA INCLUSIVA

SÃO PAULO
2015

UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO

TALITA ARAÚJO SALGADO FAUSTINO

O PENSAMENTO ALGÉBRICO EM ATIVIDADES RELACIONADAS AO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO: EMPREGANDO TECNOLOGIAS MÓVEIS EM UMA SALA INCLUSIVA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Anhanguera de São Paulo, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática,** sob a orientação da **Profa. Dra. Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes**

SÃO PAULO
2015

F268p Faustino, Talita Araújo Salgado

O pensamento algébrico em atividades relacionadas ao princípio multiplicativo: empregando tecnologias móveis em uma sala inclusiva. / Talita Araújo Salgado Faustino. – São Paulo, 2015.
140 f.:il.; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós- graduação, Universidade Anhanguera de São Paulo, 2015.

Orientadora: Prof.ª Dr. Solange Hassan Ahmad Ali

1. Educação Matemática. 2. Inclusão. 3. Pensamento Algébrico. 4. Princípio multiplicativo. 5. Dispositivo móvel. I.Título. II. Universidade Anhanguera de São Paulo.

CDD 510.7

Dedico este trabalho,
Aos meus pais que sempre acreditaram nos meus sonhos
e sempre que possível tornaram eles possíveis.
Ao João pelo amor incondicional. Obrigada pelo carinho,
paciência, lealdade e por sempre estar ao meu lado.
E a todos que contribuíram diretamente e indiretamente
para realização deste trabalho.

Agradecimentos

Quando iniciei esta caminhada, muitos me disseram que o mais difícil não seria cursar as disciplinas, nem mesmo as longas horas de estrada que teria que enfrentar e, sim, a difícil missão de escrever. Entretanto, é neste momento que se apresenta a tarefa mais difícil, pois se for me declarar para cada um, corro o risco de me esquecer de alguém e se fizer de maneira genérica posso ser injusta. Sendo assim, agradeço:

Aos meus pais, pois sem eles, certamente, não estaria mais uma vez comemorando uma nova etapa vencida em minha vida. Eles são, sem dúvidas, o meu exemplo de dedicação e perseverança. Muito obrigada pelo incentivo a buscar meus sonhos e seguir o meu coração sem me esquecer de quem está ao meu redor. Essa conquista também é mérito de vocês!

Ao João Marcos por ter me estimulado a buscar mais essa conquista e por todo amor a mim dedicado ao longo destes anos de convivência. À minha querida irmã, Alana, pelo carinho, respeito e também pelas longas horas de leituras e correções em meus textos.

À Solange que com toda sabedoria e paciência conduziu este trabalho. Agradeço também pela confiança que tudo daria certo, até mesmo quando eu já não tinha mais essa confiança. Tenha a certeza que aprendi muito com você durante essa jornada.

Às minhas amigas de "Sampa", que tornaram as disciplinas mais prazerosas e mais fáceis. Denise, Dosília e Simone, vocês tornaram São Paulo mais quente e acolhedora e transformaram meus dias nesta cidade mais curtos e agradáveis. Já sinto falta das farras feitas até o aeroporto ou simplesmente dos nossos encontros na lanchonete. Espero por vocês em BH. Também não posso deixar de me lembrar do Carlos, do Cláudio, da Célia e da Roberta, companheiros "da mesma linha". Tenham certeza que vocês me ajudaram muito!

À minha tia avó de "coração" Janete, que me recebeu em sua casa de braços abertos. Foi bom saber que teria um cantinho em São Paulo bem acolhedor onde poderia me recolher.

Não poderia me esquecer dos meus queridos amigos conterrâneos que também foram essenciais nessa trajetória. À Daniela, ao Marcelo, à Karina, ao Júnio, ao Rafael, que em vários momentos cederam seus ouvidos para ouvirem minhas inquietações sobre a minha pesquisa. Graças a vocês, tive vários momentos de descontração que puderam me dar fôlego e ânimo para continuar nesse pique BH – SP.

À Tula, que foi uma das maiores incentivadoras para que eu embarcasse nessa viagem. Ela, sem dúvidas, contribuiu muito com seus conselhos.

Agradeço à Lulu e à Rute por aceitarem compor a banca de avaliação deste trabalho e pelas contribuições dadas.

Aos professores do programa de Pós-Graduação da Universidade Bandeirante Anhanguera e à CAPES pela bolsa de estudo consedida, sem ela esse estudo não seria possível.

Aos colegas, à coordenação do Colégio Maria Clara Machado, por entenderem minhas ausências em momentos importantes e compreenderem meu cansaço, e ao Donizetti por ter permitido a realização da pesquisa na escola.

Aos meus queridos alunos que rapidamente aceitaram participar dessa pesquisa. Sem vocês, literalmente, nada disso seria possível em minha vida.

E, por fim, a Deus. Afinal de contas, Ele é o responsável por tudo isso, pois me deu a vida e colocou em minha caminhada pessoas tão especiais.

RESUMO

A presente pesquisa originou-se da necessidade emergente de investigar práticas pedagógicas adequadas ao cenário da inclusão no Brasil, principalmente aquelas voltadas a alunos da Educação Básica. Dessa forma, observou-se alunos com necessidades educacionais especiais que cursam o sexto ano, em uma escola particular, localizada na cidade de Belo Horizonte. O objetivo foi investigar os estilos de pensamento algébrico a partir da realização de atividades envolvendo o princípio multiplicativo em situações combinatórias. Baseamos nossos estudos nos estilos de pensamento algébrico (*factual, contextual* e o *simbólico*) proposto por Radford (2010) e, com o intuito de motivar e auxiliar nas resoluções das atividades, foi escolhido um aplicativo a ser utilizado pelos alunos – o xilofone – baixado em dispositivos móveis. Nessa pesquisa, a metodologia utilizada foi *Desing Experiment*, que prevê o processo denominado *iterative desing* no qual, a partir de diferentes aplicações, um instrumento de pesquisa pode ser aperfeiçoado. Além disso, dentre as configurações apontadas por Cobb et al (2003) nos enquadramos na do professor/pesquisador. Quatro atividades que favoreciam a representação de objetos matemáticos por meio de som e de cores foram preparadas e desenvolvidas em quatro encontros, com duração aproximada de 100 minutos. Os alunos foram separados por duplas e utilizaram seus dispositivos móveis – *tablets* ou *smartphones*. Na análise dos dados, foi constatado que os alunos usaram o xilofone para realizar suas composições musicais e validar suas respostas. Dessa forma, foi evidenciado que ele foi um instrumento muito importante para a compreensão e para o desenvolvimento das atividades, pois serviu para registar as diferentes possibilidades de músicas que os alunos representaram na lista de possibilidades. Em relação às generalizações apresentadas, verificou-se que elas foram registradas por meio da língua natural e, assim, identificou-se dois estilos pensamento algébrico, o *factual* e o *contextual;* além de que, dentre as atividades, alguns alunos apresentaram uma transição entre o *factual* e o *contextual*. Como já era esperado, não foi possível verificar o pensamento algébrico *simbólico* com os alunos do sexto ano. Observou-se que o trabalho com classes inclusivas é favorecido quando se escolhe metodologias diferenciadas e motivadoras, assim como, atividades que estimulem os sentidos do corpo e a interação entre alunos e professores.

Palavras-chave: Educação Matemática. Inclusão. Pensamento Algébrico. Princípio Multiplicativo. Dispositivo Móvel.

ABSTRACT

This study meets the emerging need to investigate appropriate pedagogical practices to the inclusion scenario in Brazil, mainly aimed at students of Basic Education. Hence, we decided to observe students with special educational needs who attend sixth grade at a private school in the city of Belo Horizonte. In order to investigate the algebraic thinking styles we decided to carry out activities involving the multiplicative principle in combinatorial situations using a mobile device. We base our studies in styles of algebraic thinking (factual, contextual and symbolic) proposed by Radford (2010) and, in order to motivate and assist in the resolution of activities, choose an application to be used by students - xylophone - downloaded on mobile devices. The methodology used in this research was *Design Experiment*, which provides iterative process called *Iterative Design* in which, from different applications, a research instrument can be improved. In addition, among the settings mentioned by Cobb et al. (2003) we fit in teacher / researcher. We have prepared four activities that favored the representation of mathematical objects through sound and color. These activities were developed in four meetings which lasted about 100 minutes. Students were separated in pairs and used their mobile devices - tablets or smartphones. In the analysis of the data we found that students used the xylophone to perform their musical compositions and validate their responses, so we believe it was a very important tool for the understanding and development of the activities. To register the different possibilities of music students represented a list of possibilities. Regarding the generalizations presented, we found out they were registered through the use of natural language, and hence we could identify two styles of algebraic thinking, the *factual* and *contextual,* and we absolutely believe that among the activities some students showed a transition between the *factual* and *contextual*. As expected it was not possible to verify the *symbolic* algebraic thinking with the sixth graders. In our work we found that when working with inclusion students groups it is important to choose alternative and motivating methodologies. Also, we should develop activities that stimulate the senses of the body and the interaction between students and teachers.

Keywords: Mathematics Education, Inclusion, Algebraic Thinking, Multiplicative Principle, Mobile Device.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sequência trabalhada por Radford com alunos de 14 anos 291
Figura 2 – Os 3 primeiros termos de uma sequência trabalhada com um pequeno grupo de estudantes 313
Figura 3 – Representação da resolução de arranjo por um aluno do 7º ano 413
Figura 4 – Representação da resolução de permutação por um aluno do 7º ano 424
Figura 5 – Fluxograma dos ciclos do Design 513
Figura 6 – Imagem do Xilofone de Madeira 546
Figura 7 – Imagem do xilofone no dispositivo móvel 59
Figura 8 – Novo layout das atividades com a imagem do xilofone 60
Figura 9 – Diferentes registros de possibilidades **Erro! Indicador não definido.**2
Figura 10 – Representação do Luís 613
Figura 11 – Representação do Léo 613
Figura 12 – Registro das generalizações Poliana e Rafaela 635
Figura 13 – Registro das generalizações de Leo e Luís 635
Figura 14 – Registro das generalizações de Vinicius e George 635
Figura15 – Registos de generalização do aluno Vinicius 646
Figura 16 – Manuela toca o xilofone imaginário 702
Figura 17 – Representação da lista de possibilidades 702
Figura18 – Registro da regra da Atividade 1 724
Figura 19 – Socialização da atividade 1 735
Figura 20 – Registro da regra da atividade 1 por Bartolomeu 746
Figura 21 – Registro da regra da atividade 1 Jubileu 746
Figura 22 – Manuela pensando 79
Figura 23 – Omi mostra suas músicas para Manuela 79
Figura 24 – Primeiros registros para o 2º item da atividade 2. 80
Figura 25 Lista de possiblidades com a nota 1 na primeira posição 78
Figura 26 – Socialização com dois voluntários 79
Figura 27 – Socialização com três voluntários 79
Figura 28 – Registro da regra 81
Figura 29 – Comparação entre os registros 83
Figura 30 – Registro da Atividade 2 - 1º item 84
Figura 31 – Registro da Atividade 2 - 2º item 84
Figura 32 – Omi tocando a música no ar 86
Figura 33 – Manuela tocando o xilofone 887
Figura 34 – Manuela conversando com a professora 870
Figura 35 – Omi testando suas composições 88
Figura 36 – Omi tocando o xilofone mentalmente 89
Figura 37 – Omi fazendo as composições com o xilofone impresso 90
Figura 38 – Manuela registra as possibilidades no quadro **Erro! Indicador não definido.**
Figura 39 – Registro escrito da regra de Manuela e Omi 935
Figura 40 – Lista de músicas 93
Figura 41 – Registro da regra de Jack 95
Figura 42 – Registro da regra de Jubileu 95
Figura 43 – Registro da regra de Mart 95
Figura 44 – Omi tocando no xilofone **Erro! Indicador não definido.**0
Figura 45 – Manuela observando Omi 98
Figura 46 – Omi mostrando para Manuela suas composições 99
Figura 47 – Manuela tocando para Omi 99
Figura 48 – Omi novamente verificando as possibilidades 100
Figura 49 – Manuela mostrando para Omi sua lista 102
Figura 50 – Professora conversando com a dupla 102
Figura 51 – Registro do 3º item da atividade 103

Figura 52 – Omi verificando os registro dos itens da atividade 104
Figura 53 – Registro da regra de Manuela e Omi 104
Figura 54 – Omi explicando para Manuela 105
Figura 55 – Professora explicando para dupla **Erro! Indicador não definido.**1
Figura 56 – Registro da regra de Hércules 110

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 13
1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS 18
1.1 TRANSTORNO DE DÉFICIT DE ATENÇÃO 18
1.1.1 O TDAH e a Matemática 20
1.2 DISLEXIA 21
1.2.1 Dislexia e a Matemática 23
1.3 HEMIPARESIA 24
1.4 DISTÚRBIO DO PROCESSAMENTO AUDITIVO CENTRAL 25
1.5 SÍNDROMES DE IRLEN 27
2 NOSSOS APORTES TEÓRICOS 28
2.1 O PENSAMENTO ALGÉBRICO 28
2.2 PAPERT E OS COMPUTADORES 33
2.2.1 Usos de novas tecnologias 35
2.3 PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO 39
2.3.1 Estudos precedentes 42
3 TRAJETÓRIA DO ESTUDO 48
3.1 DESIGN EXPERIMENT 48
3.2 CICLO 1 – PRIMEIRA ESCOLHA 52
3.2.1 Ciclos Exploratórios 53
4 ESTUDO PRINCIPAL 66
4.1 OS PARTICIPANTES 66
4.2 ATIVIDADE 1 69
4.2.1 Síntese do primeiro encontro 75
4.3 ATIVIDADE 2 75
4.3.1 Síntese do segundo encontro 83
4.4 ATIVIDADE 3 85
4.4.1 Síntese do terceiro encontro 95
4.5 ATIVIDADE 4 96
4.5.1 Síntese do último encontro 109
5 NOSSOS PRINCIPAIS INDÍCIOS 111
5.1 INTRODUÇÃO 111
5.2 O ESTUDO 112

5.3 NOSSOS PRINCIPAIS INDÍCIOS 113
5.3.1 O papel do recurso móvel – *smartphone* 113
5.3.2 Os estilos do pensamento algébrico 114
5.3.3 Práticas Matemáticas para uma turma de inclusão 116
5.3.4 Inclusão 118
5.4 PRÓXIMOS DESAFIOS 119
REFERÊNCIAS 120
APÊNDICE A – VERSÃO 1 DAS ATIVIDADES 125
APÊNDICE B – VERSÃO 2 DAS ATIVIDADES 127
APÊNDICE C – CONJUNTO DE ATIVIDADES 129
ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 137

INTRODUÇÃO

> *Entende-se por inclusão a garantia, a todos, do acesso continuo ao espaço comum da vida em sociedade, sociedade essa que deve estar orientada por relações de acolhimento à diversidade humana, de aceitação das diferenças individuais, de esforço coletivo na equiparação de oportunidades de desenvolvimento, com qualidade, em todas as dimensões da vida. (Diretrizes nacionais para educação especial na educação básica / Secretaria de Educação especial MEC, 2001, p. 20).*

A definição para inclusão, considerada na epígrafe que abre esta seção, é bastante ampla. Ela nos leva a pensar que a inclusão é o respeito ao próximo, independe de suas condições físicas, motoras e mentais e que é preciso saber compreender as diferenças para valorizar as potencialidades do ser humano.

Ao se falar em inclusão escolar, provavelmente muitas pessoas pensam, por exemplo, naquelas crianças que têm deficiência física ou visual. Entretanto é necessário ponderar para além desses aspectos. Precisamos pensar em uma inclusão que atenda a todos que possuem uma necessidade educacional especial visível fisicamente ou não. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – Adaptações Curriculares Estratégias para a Educação de Alunos com Necessidades Educacionais Especiais (BRASIL,1998, p.23):

> Necessidades educacionais podem ser identificadas em diversas situações representativas de dificuldades de aprendizagem, como decorrência de condições individuais, econômicas ou socioculturais dos alunos: crianças com condições físicas, intelectuais, sociais, emocionais e sensoriais diferenciadas; crianças com deficiência e bem dotadas; crianças trabalhadoras ou que vivem nas ruas; crianças de populações distantes ou nômades; crianças de minorias linguísticas, étnicas ou culturais; crianças de grupos desfavorecidos ou marginalizados.

Sendo assim, a escola precisa estar preparada para atender as diferentes limitações, sejam elas sensoriais ou cognitivas, não se limitando somente a fazer a matrícula desses alunos, mas promovendo a sua inserção social. É preciso que todos os alunos, independentemente de suas necessidades, aprendam de forma efetiva.

Nesta direção, os Parâmetros Curriculares Nacionais – Adaptações Curriculares Estratégias para a Educação de Alunos com Necessidades Educacionais Especiais – PCN – Adaptações curriculares – (BRASIL, 1998) sugerem alguns ajustes, entre eles:

> [...] elaborar propostas pedagógicas baseadas na interação com os alunos, desde a concepção dos objetivos; reconhecer todos os tipos de capacidades presentes na escola; sequenciar conteúdos e adequá-los aos diferentes ritmos de aprendizagem dos educandos; adotar metodologias diversas e motivadoras; avaliar os educandos numa abordagem processual e emancipadora, em função do seu progresso e do que poderá vir a conquistar. (BRASIL, 1998, p. 18)

Desse modo, é preciso que os professores conheçam seus alunos, a fim de estruturar, de forma coerente e consciente, o programa de conteúdo a ser trabalhado com seus alunos. A partir desse reconhecimento, ele deverá buscar metodologias e estratégias que viabilizem o aprendizado de todos os alunos pertencentes a uma classe inclusiva. Um dos maiores desafios da escola hoje é preparar recursos didáticos e pedagógicos para diferentes necessidades especiais e, de acordo com as Diretrizes Nacionais Para a Educação Especial na Educação Básica (2001), temos que:

> A educação tem hoje, portanto, um grande desafio: garantir o acesso aos conteúdos básicos que a escolarização deve proporcionar a todos os indivíduos – inclusive àqueles com necessidades educacionais especiais, particularmente alunos que apresentam altas habilidades, precocidade, superdotação; condutas típicas de síndromes/quadros psicológicos, neurológicos ou psiquiátricos; portadores de deficiências, ou seja, alunos que apresentam significativas diferenças físicas, sensoriais ou intelectuais, decorrentes de fatores genéticos, inatos ou ambientais, de caráter temporário ou permanente e que, em interação dinâmica com fatores sócio ambientais, resultam em necessidade muito diferenciada da maioria das pessoas. (BRASIL, 2001, p. 21-22)

Alunos diagnosticados com Transtorno de Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH) e Dislexia são classificados como transtornos funcionais específicos e Síndrome de Asperger como transtornos globais do desenvolvimento, todos certamente precisam desse olhar diferenciado.

Por acreditarmos nessa necessidade de um olhar diferenciado para todos, desenvolvemos nossa pesquisa em uma escola da rede privada de Belo Horizonte (MG) que, desde a sua fundação, há 44 anos, tem atendido alunos com necessidades educacionais especiais. Já existe uma cultura institucional voltada para diferentes práticas em sala de aula e, dessa forma, seus professores tendem a buscar um trabalho diferenciado para aplicar em suas turmas. O trabalho que é realizado se alinha com o que também é apontado pelos PCN – Adaptações Curriculares.

Essa pesquisa foi desenvolvida com três turmas, duas[1] do 6º e uma do 7º ano, que apresentam características bem peculiares. Na turma do 6º ano A haviam vinte e seis alunos, sendo que quinze deles apresentam laudo clínico psicológico. Já o 6º ano B era composto por 18 alunos, sendo que 11 apresentaram laudo clínico psicológico que indica transtornos funcionais específicos. Na turma do 7º ano, tínhamos 18 alunos e 11 deles que também apresentaram laudos. Dessa forma, o ambiente é bastante heterogêneo e os alunos apresentam grandes dificuldades de concentração e motivação.

A proposta de trabalho foi pensada para oferecer atividades motivadoras, que fossem capazes de envolver os alunos. Desse modo, nesta pesquisa, trabalhamos com uma tecnologia móvel que foi empregada como recurso na resolução de atividades envolvendo o princípio multiplicativo.

Optamos pelo uso do *smartphon*e como recurso tecnológico. Essa escolha ocorreu por dois principais motivos. O primeiro deles foi porque esse instrumento é um aparelho muito utilizado por crianças e adolescentes, facilmente encontrado nas salas de aulas. Em segundo lugar, fomos motivados por acreditarmos que ele poderia ser um elemento que ajudaria a fazer com que os alunos se envolvessem na realização das atividades.

Moura (2009), em seu trabalho, aponta alguns projetos que estão sendo desenvolvidos em vários países com *smartphones* usados em propostas educacionais. Os resultados apresentados pela autora apontam um saldo positivo na aprendizagem dos alunos. Ela afirma que:

> [...] não tem sentido continuar a banir as tecnologias móveis da sala de aula, como está a acontecer. A aposta terá de ser na educação responsável do seu uso e começar a valorizá-las como ferramentas educativas, capazes de ajudar a melhorar a execução de atividades curriculares. (MOURA 2009, p.7)

---

[1] Utilizaremos 6ºA para nos referirmos ao 6º ano que participou da pesquisa durante os ciclos do *Design,* e para a turma que participou da coleta dos dados analisados usaremos 6ºB.

Assim, é importante que a escola promova essa “educação responsável” e, para isto, ela deve criar estratégias para o uso desta tecnologia em sala de aula. Contudo, novas práticas pedagógicas implicam em mudanças no modelo educacional e no modo como o professor trabalha com os alunos.

Papert (1980) já apontava essa necessidade de mudança desde os anos 70. Segundo ele, é preciso criar ambientes onde as crianças aprendam a partir de suas experiências e criações. Ainda de acordo com Papert (1980), o professor deve trabalhar como um antropólogo buscando ferramentas e propiciando um ambiente rico em experiências, que deixe para o aluno a capacidade de tomar suas decisões e instigue-os a buscarem estratégias para solucionar seus problemas.

Tendo por base as ideias de Papert (1980) sobre a educação, procuramos desenvolver um conjunto de atividades envolvendo o princípio multiplicativo. Elas foram realizadas com o auxílio de uma tecnologia móvel para analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico (Radford, 2010) em uma turma inclusiva de 6º ano do ensino fundamental.

Por trabalharmos com alunos do 6º ano, resolvemos elaborar atividades que estivessem diretamente ligadas ao conteúdo programático deste ano escolar. Dentre os assuntos abordados, um dos tópicos é a multiplicação e, como apontado pelos PCN, é importante abordar os diferentes significados dessa operação. Desse modo, para este trabalho, optamos pela combinatória. Ainda de acordo com os PCN (3º e 4º ciclos):

> [...] o emprego de problemas envolvendo combinatória leva o aluno, desde cedo, a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática como também em outros campos, o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do ensino fundamental. (BRASIL, 1998, p. 137)

Ainda na fase inicial da pesquisa, observamos que o trabalho com o princípio multiplicativo poderia propiciar o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois, ao resolver as atividades, os alunos recorriam à lista de possibilidades e, ao utilizar essa estratégia, eles poderiam observar os padrões envolvidos em cada situação. De acordo com Radford (2001, 2010), ao observar padrões os alunos podem desenvolver o pensamento algébrico. Com isso, decidimos que seria interessante e importante se as situações que criássemos nos permitissem também analisar esse construto.

Desse modo, o objetivo principal desta pesquisa centrou-se em investigar os estilos de pensamento algébrico a partir da realização de atividades envolvendo princípio multiplicativo, utilizando um dispositivo móvel em uma sala inclusiva. Para atender a este objetivo a questão de pesquisa que norteou nossos estudos foi:

Quais os estilos de pensamento algébrico que emergem a partir de atividades envolvendo o princípio multiplicativo atrelado às práticas interativas?

Para isso, foram consideradas como práticas interativas a interação entre as duplas, entre as duplas e o dispositivo móvel e entre os alunos e professores.

Para responder nossa questão de pesquisa, organizamos essa dissertação em cinco capítulos. No primeiro capítulo, fizemos algumas considerações sobre as necessidades educacionais com as quais nos deparamos durante a pesquisa. Apresentamos o que a literatura aponta sobre cada necessidade e como trabalhar com elas. No Capítulo 2, abordamos os estilos de pensamento algébrico propostos por Radford (2010), a utilização de tecnologias nas salas de aulas, segundo Papert (1980), Penteado e Borba (2001) e Cox (2003). Além disso, apresentamos algumas considerações a respeito do princípio multiplicativo, bem como tratamos de estudos precedentes que consideram a combinatória na educação básica, levantados na revisão de literatura.

A metodologia e os caminhos percorridos durante este estudo, como a escolha do aplicativo, a elaboração do Conjunto de Atividades e o objetivo de cada ciclo desenvolvido na pesquisa compõem o terceiro capítulo desta dissertação.

No capítulo 4, descrevemos a trajetória de uma das duplas que participaram do Estudo Principal e apresentamos a descrição e análise dos dados coletados no último ciclo deste estudo.

No capítulo 5, expressamos nossas considerações acerca do estudo com base nos estilos de pensamentos algébricos de Radford (2010), no papel desempenhado pelo dispositivo móvel na realização das atividades e as implicações dessas práticas em uma sala inclusiva. E, por último, trazemos as referências utilizadas, além dos apêndices e anexos que foram necessários para realização desta pesquisa.

A seguir apresentaremos algumas exposições iniciais a respeito das necessidades educacionais dos sujeitos envolvidos no estudo.

CAPÍTULO 1

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Para compreender melhor as peculiaridades envolvidas nas turmas com as quais trabalhamos, faremos uma apresentação sobre as necessidades educacionais especiais que encontramos nas salas de aula nas quais realizamos nossa pesquisa. Tais necessidades são: Transtorno de Déficit de Atenção e Hiperatividade, Dislexia, Síndrome de Irlen, Hemiparesia e Distúrbio do Processamento Auditivo. Para compreendermos a trajetória de nossos alunos, é preciso saber sobre suas necessidades, sobre o que tais necessidades implicam na aprendizagem e o que a literatura vem apontando sobre cada uma delas.

1.1 TRANSTORNO DE DÉFICIT DE ATENÇÃO

O transtorno de déficit de atenção e hiperatividade, conhecido como TDAH, afeta tanto crianças quanto adultos. Segundo a Associação Brasileira de Déficit de Atenção (ABDA), “o TDAH é um transtorno neurobiológico, de causas genéticas, que aparece na infância e frequentemente acompanha o indivíduo por toda a vida, e se caracteriza por sintomas de desatenção, inquietude e impulsividade”. Os indivíduos que possuem esse transtorno têm dificuldades de concentração, agem impulsivamente, na maioria das vezes, e quase sempre não conseguem terminar as atividades propostas. De acordo com Orjales (2007, p. 296), “não terminam as tarefas que começam; distraem-se com qualquer coisa; precipitam-se em responder antes que se tenham completado as perguntas”.

Segundo Orjales (2007), posteriormente ao diagnóstico, é possível subdividir o transtorno em três categorias, o TDAH-D que é do tipo desatento, o TDAH –HI que é o hiperativo impulsivo e o último perfil é uma combinação dos dois primeiros TDAH-C. De acordo com o autor, as características atribuídas ao perfil desatento são:

- Não terminam as tarefas que começam;
- Cometem muitos erros;
- Não se concentram nos jogos;
- Muitas vezes parecem não escutar quando se fala diretamente com elas;

- Tem dificuldades para se organizar;
- Evitam tarefas que exigem esforços;
- Com muita frequência, perdem coisas de que precisam (por exemplo, brinquedos, exercícios escolares, lápis, livros, roupas);
- Distraem-se com qualquer coisa;
- São muito descuidadas (ORJALES, 2007, p. 297).

Ainda de acordo com Orjales (2007, p. 297-298), as características ligadas ao perfil hiperativo impulsivo são:

- Movimentam constantemente mãos e pês;
- Levantam-se a todo o momento;
- Correm por todos os lados;
- Para essas crianças é difícil brincar em atividades tranquilas;
- São aceleradas como se tivessem um motor;
- Falam muito;
- Precipitam-se em responder antes que se tenha completado as perguntas;
- Costumam interromper ou interferir nas atividades de outros (por exemplo, intrometem-se em conversas ou brincadeiras).

Diante dessas características, as crianças com TDAH apresentam algumas dificuldades durante sua trajetória escolar. Por isso, são necessárias diferentes estratégias de ensino.

De acordo com Orjales (2007), o trabalho deve começar pela localização do aluno dentro de sala, evitando locais perto da porta ou janela. É recomendando que ele se sente nas primeiras carteiras, de preferência, próximas ao professor. Outro ponto de destaque relaciona-se com as atividades que o aluno irá fazer, elas devem ter curta duração, ou seja, devemos propor atividades menores, para que as crianças consigam terminar e se sintam capazes de cumprir com as demais tarefas. Além disso, é interessante se mostrar disponível para esses alunos e oferecer a eles frequentes *feedbacks* positivos.

Segundo Smith (2008), os alunos com TDAH tendem a ter um bom rendimento em ambientes “altamente estruturados”, com atividades bem direcionadas e que possam ser concluídas em um tempo menor. Sobre essas questões, a Cartilha 10, publicada pelo Ministério da Educação e pela Secretaria de Educação Especial, para orientar o trabalho nos apresenta que:

> A previsibilidade de ações e de acontecimentos pode diminuir em muito a ansiedade do aluno que apresenta comportamentos não adaptativos. Assim, é importante que o professor estruture o uso do tempo, do espaço, dos materiais e a realização das atividades, de

> forma a diminuir ao máximo o caos que um ambiente complexo pode representar para esse aluno (BRASIL, 2002, p. 20).

Segundo ABDA, uma das características desses indivíduos é a agitação, por isso é importante permitir que eles se levantem em alguns momentos da aula. Esses momentos podem ajudar a criança a diminuir sua agitação, fazendo que ela concentre-se, por mais tempo, nas atividades. Outra intervenção que foi apresentada tanto por Orjales (2007) quanto por Smith (2008) e pela ABDA, é dar aos alunos a oportunidade de escolher dentre um conjunto de atividades quais eles gostariam de fazer.

1.1.1 O TDAH e a Matemática

Segundo Miranda, Alba e Taverner (2006), há poucos trabalhos na literatura que investigam as dificuldades em Matemática associadas ao TDAH. Inicialmente, buscamos trabalhos que relacionassem o TDAH e o raciocínio combinatório, uma vez que esse será nosso objeto de estudo. Porém, não localizamos nenhum trabalho que fizesse essa relação.

Apesar de não encontrarmos nenhum estudo que abordasse especificamente o nosso objeto matemático, achamos interessante levantar quais objetos matemáticos estavam sendo pesquisados e quais eram as considerações apontadas sobre os sujeitos. Sendo assim, procuramos trabalhos que abordassem o TDAH e a Matemática. Nessa pesquisa, encontramos trabalhos que abordam esses dois temas, entretanto, muitos deles estavam ligados à área de medicina e de psicologia. Sendo assim, selecionamos quatorze trabalhos que estavam mais ligados à área de educação.

Entre os trabalhos pesquisados, observamos que seis deles dizem respeito à aritmética em crianças com TDAH. Uma possível justificativa para ter muitos trabalhos relacionados a essa área pode ser, segundo Vital e Hazin (2008, p. 21-22), o fato de que:

> Na matemática, as deficiências atencionais parecem dificultar a utilização de estratégias ordenadas e hierarquizadas implicadas no uso de determinado algoritmo. Assim, crianças com déficit de atenção apresentariam certa tendência a desenvolver deficiências relacionadas ao cálculo aritmético, pois não conseguem guardar informações relevantes em virtude de não sustentarem o foco atencional enquanto organizam as informações verbais recebidas.

No estudo feito por Vital e Hazin (2008), um dos objetivos era perceber os tipos de erros cometidos pelas crianças que têm o TDAH do tipo desatento. Eles perceberam que os erros obtidos pelos sujeitos da pesquisa eram de “natureza procedural”; sendo assim, os erros não eram provenientes de dificuldades com os conceitos matemáticos envolvidos. Diante disso, as autoras sugerem algumas intervenções como as que apresentamos, anteriormente, ao considerar o trabalho de Orjales (2007) e de Smith (2008).

De maneira geral, a literatura vem mostrando que alguns problemas relacionados à aprendizagem Matemática de crianças com TDAH não estão ligados diretamente à Matemática. De acordo com Miranda e Gil Llario, (2001) citado por Vital e Hazin (2008, p. 22):

> Estudos neuropsicológicos têm contribuído para mostrar que, em geral, as dificuldades nas atividades matemáticas, podem ser caracterizadas por: deficiências atencionais; deficiências visuo-espaciais; déficits de memória; dificuldades do próprio pensamento matemático e; compreensão das operações subjacentes.

No trabalho desenvolvido por Costa, Dornelas e Rohde (2012, p.796), o “objetivo era identificar e descrever os procedimentos de contagem e os processos de memória predominantemente utilizados por estudantes diagnosticados com TDAH-C ou TDAH-D na resolução de problemas aritméticos aditivos”. Nos resultados obtidos, os autores apontam que não foi possível traçar um perfil que fosse próprio dos alunos com TDAH para as estratégias de contagem. Outro resultado encontrado foi que os alunos que utilizam o procedimento do tipo contar todos utilizaram os dedos, o que sugere que o material concreto está auxiliando a memória de trabalho. Além disso, Costa, Dornelas e Rohde (2012, p. 797-798) afirmam que “[...] estudantes com TDAH precisam de mais tempo e prática para consolidar o conhecimento, mas não de um ensino diferente”.

1.2 DISLEXIA

A dislexia é uma dificuldade de aprendizagem da leitura e da escrita das palavras. As pessoas que apresentam esse transtorno têm dificuldades para escrever corretamente as palavras bem como para ler (FAUSTINO, 2014, no prelo). Segundo Vilchez (2007, p. 164) “uma criança disléxica se caracteriza, precisamente, por não saber ler / escrever corretamente apesar de não ter deficiência perceptiva, motora ou intelectual".

A Associação Brasileira de Dislexia assume a definição dada por Brany e col. (2003):

> Dislexia é uma dificuldade de aprendizagem de origem neurológica. É caracterizada pela dificuldade com a fluência correta na leitura e por dificuldade na habilidade de decodificação e soletração. Essas dificuldades resultam tipicamente do déficit no componente fonológico da linguagem que é inesperado em relação a outras habilidades cognitivas consideradas na faixa etária.

Sánchez (2004) afirma que temos os disléxicos fonológicos, que apresentam problemas ligados na "via fonológica"[2] e os disléxicos de superfície, que apresentam problemas ligados na "via léxica"[3]. Contudo, há indivíduos que podem ter os dois tipos de problemas. Diante disso, é necessário ter um olhar diferenciado e criar estratégias que ajudem nos processos de ensino e aprendizagem dessas crianças.

Segundo Vilchez (2007), as intervenções realizadas com alunos disléxicos devem propiciar atividades nas quais eles tenham a oportunidade de interagir com a escrita de maneira diversificada, como, por exemplo, propor a separação de sílabas das palavras. Em outra ocasião, pedir que formem palavras com um determinado grupo de letras ou frases com um grupo de palavras. Em outros momentos, deve-se trabalhar a leitura, diversificando sempre, ora em voz alta, ora silenciosamente. Também é interessante pedir que eles expliquem ou contem a história que acabaram de ler. Outra intervenção que deve ser feita é a correção dos erros cometidos pelos disléxicos durante a leitura ou a escrita. Além dos exercícios ligados diretamente a escrita e leitura, o autor recomenda exercícios que trabalhem a noção espacial, o desenho de formas no espaço e à mão livre.

A dislexia ocasiona problemas ligados à escrita e leitura, porém há autores que apontam que alguns desses indivíduos também podem apresentar dificuldades em outras áreas do conhecimento. Para este trabalho, procuramos na literatura referências que associavam a dislexia e o raciocínio combinatório, entretanto, não achamos nenhum trabalho deste tipo.

---

[2] Um problema na via fonológica manifesta-se, sobretudo, na leitura de palavras não familiares, diante das quais podem surgir dois tipos de comportamento: deter-se em uma leitura fonológica, em que dadas as suas dificuldades a respeito, encontraremos erros abundantes, ou, evitar essas dificuldades lendo por analogia. Nesse caso, os alunos se baseariam nas semelhanças visual e ortográfica dessas palavras com outras familiares" (SÁNCHEZ et al., 2004, p.101).

[3] "...acarretaria apenas erros na leitura" (SÁNCHEZ et al., 2004, p.101).

1.2.1 Dislexia e a Matemática

Não encontrarmos nenhuma referência entre nosso objeto de estudo e a dislexia. Por esse motivo, realizamos outra busca com o intuito de localizar o que se tem discutido sobre Matemática e dislexia.

Coelho (2013) aponta que os indivíduos com dislexia também apresentam dificuldades em diferentes áreas. Na área de Matemática, a autora cita que eles podem ter dificuldades em geometria e também em orientação espacial, além de dificuldades na assimilação de símbolos e em decorar a tabuada.

De acordo com Capellini et al (2007, p.379), "indivíduos com dificuldade de leitura apresentam alterações no processamento da informação" e, como consequência, podem ter dificuldades associadas à "compreensão de problemas com enunciados e cálculos matemáticos".

Também encontramos referências sobre a dislexia e o aprendizado matemático no artigo *Problemas na educação matemática do ensino fundamental por fatores de dislexia e discalculia*. De acordo com os autores Carvalho et al (2010, p.69):

> [...] pode-se dizer que a criança com dislexia encontrará dificuldades também em matemática, pois é uma linguagem. Assim, a aprendizagem numérica está fortemente associada à leitura de texto, nos casos de resolução de problemas matemáticos, ou seja, já uma semelhança na linguagem escrita e na linguagem matemática, pois a letra é um símbolo, e o número é uma representação simbólica.

Na literatura, encontramos trabalhos que associam a dislexia à discalculia, como o trabalho acima citado, o que sugere que crianças que possuem dislexia também poderão ter a discalculia.

A discalculia é uma dificuldade relacionada ao aprendizado da Matemática. De acordo com Silva (2008, p. 23):

> Os portadores de discalculia têm dificuldades em ler e escrever (interpretar) os grafemas usados como indicadores de significados para representar a necessidade de operações. Os sujeitos não decodificam os símbolos e, portanto, não operam, ou não realizam atividades com eles.

O fato de um indivíduo ter discalculia não quer dizer que ele não compreenda os conceitos matemáticos, segundo Carvalho et al (2010, p. 70):

> A criança com discalculia pode ser capaz de entender conceitos matemáticos de um modo bem concreto, uma vez que o pensamento

> lógico está intacto, porém tem extrema dificuldade em trabalhar com números e símbolo matemático, fórmulas e enunciados.

Ainda de acordo com Garcia (1998), a criança que tem discalculia apresenta dificuldade em compreender “números, habilidades de contagem, habilidades computacionais e solução de problemas”.

Cabe aos professores procurar maneiras interessantes e eficazes, em suas intervenções, para propiciar aos alunos um aprendizado de qualidade e diversificado, permitindo que eles aprendam. No trabalho de Silva (2008), encontramos algumas sugestões de atividades que propiciam a aprendizagem por meio de jogos. O autor sugeriu sete jogos diferentes e cada um tentando abordar um conhecimento diferente, como, por exemplo, os jogos que trabalham cálculos, noções espaciais e raciocínio lógico.

Coelho (2013) propõe que as intervenções devem ser feitas com materiais concretos para que os alunos possam compreender mais facilmente os conceitos matemáticos. Em relação ao cálculo, a autora é favorável ao uso da calculadora e, até mesmo, consultas em tabuadas, pois esses alunos apresentam muitas dificuldades nessa área.

Carvalho et al (2010) também apontam a necessidade de trabalhar com materiais concretos, porém os autores pontuam que, além disso, é necessário que as atividades “englobem vários sentidos do corpo, possibilitando que a criança internalize o conceito adquirido e familiarize-se com ele”.

Dessa forma, percebemos que a literatura mostra a necessidade de trabalhar com materiais concretos com esses alunos, mas é importante diversificá-los para garantir uma qualidade em seu aprendizado. Além disso, é importante fazer com que esses conceitos possam ser identificados no dia a dia desses estudantes.

1.3 HEMIPARESIA

A hemiparesia é uma classificação da paralisia cerebral. De acordo com Basil (2004, p. 216), “as diversas formas de paralisia cerebral podem ser classificadas por seus efeitos funcionais e pela topografia corporal”. Em relação à topografia corporal, temos a *paraplegia, tetraplegia, monoplegia e a hemiplegia.* O autor explica que “quando a afecção é menos grave, falamos de paraperesia, tetraparesia, monoparesia e hemiparesia”. (Basil, p. 218)

De acordo com a Associação Brasileira de Paralisia Cerebral, hemiparesia é:

> O comprometimento de um lado do corpo, direito ou esquerdo, dependendo do lado (hemisférico) do cérebro que foi lesado. A grande maioria das crianças hemiparéticas vai ter um bom desenvolvimento global, porém, muitas vezes, a principal dificuldade decorre de problemas de comportamento ou de compreensão.

1.4 DISTÚRBIO DO PROCESSAMENTO AUDITIVO CENTRAL

Para compreendermos o que é o Distúrbio do Processamento Auditivo Central (DPAC) é necessário saber a função do processamento auditivo. De acordo com o American Speech-Language-Hearing Association (ASHA, 2005) o processamento auditivo:

refere-se a eficiência e eficácia, pelo qual o sistema nervoso central utiliza informações auditivas [...]inclui os mecanismos auditivos que fundamentam as seguintes habilidades ou competências: boa localização e lateralização; discriminação auditiva; reconhecimento de padrões auditivos; aspectos temporais da audição, incluindo a integração temporal, discriminação temporal, ordenação temporal e mascaramento temporal; desempenho auditivo em sinais acústicos concorrentes; e desempenho auditivo com sinais acústicos degradados. (ASHA, 2005)

Assim, o processamento auditivo é “aquilo que fazemos com o que ouvimos”.

Já o Distúrbio do Processamento Auditivo Central (DPAC), que também pode ser chamado de Disfunção Auditiva Central ou Transtorno do Processamento Auditivo, segundo ASHA (2005) “refere-se a dificuldades no processamento da informação auditiva no sistema nervoso central perceptual como demonstrado pelo mau desempenho em uma ou mais das habilidades acima”. Portanto, pessoas que apresentam o DPAC escutam bem, porém têm dificuldades em decodificar os sons recebidos e reagir ao escutá-los.

Sypczuk (2006) apresenta alguns sinais e sintomas que podem levar um indivíduo ao diagnóstico de DPAC:

- Parece não ouvir bem?
- É muito distraído ou desatento?
- Demora em escutar e/ou entender quando é chamada sua atenção?

- Fala muito “Hã”?, “o que”?, ou “não entendi!”?
- Possui dificuldades para lembrar o que foi dito ou parece ter problemas de memória?
- Tem fala diferente de outras crianças da mesma idade?
- Tem dificuldade para ler ou escrever ou outras habilidades escolares?
- Tem dificuldade para entender o que está sendo falado quando em ambientes ruidosos ou em grupos?
- Não consegue acompanhar uma conversa com muitas pessoas falando ao mesmo tempo?
- Há cansaço ou atenção curta para sons em geral?
- Deixa o volume da televisão muito alto?
- Apresenta dificuldade de localizar som?
- Apresenta dificuldades em seguir orientações?
- Tem dificuldade em contar um fato ou história?
- Tem dificuldade para transmitir um recado?
- Possui dificuldades em seguir uma sequência de tarefas que lhe foi falada?
- Tem dificuldades em entender piadas ou duplo sentido?
- Os problemas de matemática são difíceis de interpretar?
- A informação abstrata é difícil de compreender?

Para realização do diagnóstico é necessária uma equipe multidisciplinar, composta por neurologistas, psiquiatras, otorrinolaringologistas, audiologista, fonoterapeutas, psicólogos, pedagogos e profissionais da educação. Diante dos sintomas e de acordo com a literatura pessoas que tem o DPAC podem apresentar dificuldades de aprendizagem. Dessa forma, é preciso propiciar um ambiente que permita o aprendizado desses alunos.

A Associação de Deficientes Auditivos, Pais, Amigos e Usuários de Implante Coclear (ADAP) apresentam algumas orientações para o trabalho com esses indivíduos:

- Reconhecer que o indivíduo não tem controle de suas dificuldades.
- Falar com um ritmo contendo pausas nítidas, com articulação clara, com ênfase na entonação e dando pista orofacial.

- Não negar a repetição do que foi dito quando a criança não compreendeu anteriormente.
- Sentar em locais que permitam ao aluno uma visualização completa do rosto do professor.
- Se possível, entregar a aula impressa para o aluno antes de ministrá-la.
- Os professores de educação física e de música podem ajudar com treinamento auditivo durante as atividades.
- Reconhecer que pode ocorrer cansaço mental antes do esperado.
- Cuidar do ruído do ambiente físico para garantir a inteligibilidade da fala.
- Realizar solicitações em frases curtas, dando uma ideia por vez.
- Assegurar-se de que a criança compreendeu as solicitações, pedindo-a para repetir o que foi dito.

1.5 SÍNDROMES DE IRLEN

De acordo com Guimarães (2012), a Síndrome de Irlen "é uma alteração visuoperceptual, causada por um desequilíbrio da capacidade de adaptação à luz que produz alterações no córtex visual e déficits na leitura". Os alunos que possuem essa síndrome queixam-se de reflexo no papel branco, dizem que as letras parecem se movimentar (vibram, tremem).

Levando em consideração todas as necessidades descritas nos itens anteriores, um dos nossos objetivos é criar estratégias que consigam atender a todas elas. Com isso, desenvolvemos um Conjunto de Atividades que abordasse a combinatória e que contribuísse no desenvolvimento do pensamento algébrico à luz dos estudos de Radford. Com o intuito de auxiliar a resolução das atividades, utilizaremos um dispositivo móvel. Portanto, no próximo capítulo, apresentaremos as ideias de Radford sobre o pensamento algébrico.

CAPÍTULO 2

NOSSOS APORTES TEÓRICOS

Neste capítulo, apresentamos o desenvolvimento do pensamento algébrico na perspectiva de Radford. Além disso, mostraremos um panorama sobre o uso de novas tecnologias nas salas de aulas e, atrelado a isso, mostraremos alguns estudos sobre o raciocínio combinatório.

2.1 O PENSAMENTO ALGÉBRICO

De acordo com Radford (2010a) o pensamento algébrico está sendo estudado há pelo menos três décadas. Os diversos grupos de estudos que se dedicam a tal área ainda não chegaram a um consenso sobre as características ligadas ao pensamento algébrico. Contudo, há consenso em relação a dois aspectos relacionados ao seu estudo, pois, de acordo com o autor, a "álgebra lida com objetos de natureza indeterminada, como incógnitas, variáveis e parâmetros. Além disso, na álgebra, tais objetos são tratados de forma analítica" (RADFORD 2010a, p.35). Desse modo, é como se as letras fossem números quaisquer, assim, sendo possível realizar com elas qualquer operação.

Voltando à história da Matemática, podemos observar que a álgebra era feita sem o uso de letras. Ela era expressa por palavras, conforme Cardoso (2007, p. 28) aponta:

> No tempo dos antigos gregos, dos egípcios e de Pitágoras havia uma álgebra cujo sentido não era o que, hoje, atribuímos a esse vocábulo. Havia sim, uma álgebra expressa por meio de palavras, isto é, uma álgebra retórica, desprovida totalmente de símbolos. Qualquer desses povos, nas respectivas línguas ou idiomas, para exprimir a superfície de um trapézio escrevia: [...] multiplica-se o valor da soma das bases pelo valor da altura e divide-se o resultado por 2.

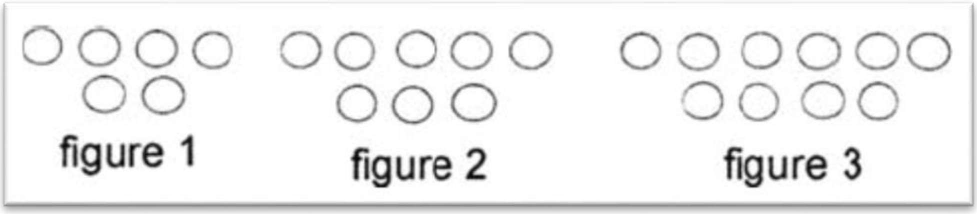
Radford (2006, 2010a) aponta outros exemplos, citando que chineses (I a.C.) e babilônios (XVII a.C.) faziam álgebra sem usar letras. O autor destaca ainda que o fato de usar letras não é uma condição necessária e suficiente para pensar algebricamente. Ele cita o exemplo apresentado por Euclides em sua obra *Elementos* na qual ele usa letras em suas representações sem apresentar indícios do pensamento algébrico.

Radford investiga, em suas pesquisas, o desenvolvimento do pensamento algébrico, que é definido por ele a partir de três elementos. O primeiro deles é o sentimento de indeterminação que, segundo o autor, é próprio da álgebra. O segundo considera que os objetos indeterminados devem ser tratados analiticamente; e finalmente, o terceiro refere-se à forma particular e especial de indicar os objetos indeterminados (RADFORD, 2010b, p.39).

Entretanto, antes de nos aprofundarmos em seus estudos sobre o assunto, é importante abordar a discussão feita por Radford (2010b) sobre generalização e indução ingênua. De acordo com ele, nem toda “simbolização” é algébrica e nem toda atividade que envolve padrões levará ao pensamento algébrico. Em uma sequência numérica, por exemplo, alguns alunos não conseguem perceber uma relação entre o número de elementos que compõem um termo e a posição do termo na sequência. Muitas vezes, os alunos buscam uma relação aritmética entre os termos da sequência para determinar os termos seguintes, podendo expressar uma sentença que permita calcular os seus valores. Contudo, nem sempre essa expressão será válida para determinar todos os termos da sequência.

Para elucidar essa situação, usaremos um exemplo apresentado por Radford (2010a). A atividade consistia em observar uma figura como a representada na Figura 1 e, em seguida, desenhar as figuras 4 e 5 dessa sequência e depois responder quantos círculos terá as figuras 10 e 100. A segunda atividade os alunos teriam que escrever uma mensagem para os alunos do ano seguinte mostrando como calcular o número de círculos de qualquer figura. E, por último, os alunos deveriam escrever uma expressão algébrica para indicar o número de círculos na figura *n*. (RADFORD, 2010a, p.6).

Figura 1 – Sequência trabalhada por Radford com alunos de 14 anos.



Fonte: Radford, 2010a, p. 8

Determinado grupo apresentou uma regra específica para cada figura. Sendo que para figura 1 $n \times 2 + 1$, depois para figura 2 $n \times 2 + 2$, até obterem $n \times 2 + 4$ para a figura 3. Contudo, cada uma dessas regras só é válida para figuras especificas. Sendo assim, essa maneira se baseia em tentativa e erro e não é verdadeira para as outras figuras envolvidas no exercício (RADFORD, 2010a, p.9). Este tipo de raciocínio, baseado em tentativa e erro, Radford classifica como indução ingênua, ou seja, os alunos não investigam a sequência de maneira mais detalhada, procurando relacionar as posições e seus termos ou buscar semelhanças entre eles.

Ao pesquisar o pensamento algébrico, a partir de situações que envolvem generalizações de padrões, Radford (2010b) não considera, em suas análises, somente o que é produzido nas representações sobre o papel, mas principalmente elementos que são externos à atividade, como palavras, gestos ou outros recursos semióticos que emergem nas situações instrucionais. Para ele, o pensamento algébrico não se reduz ao uso de símbolos alfanuméricos. Radford considera o pensamento como “uma atividade reflexiva mediada por signos e materializada nos gestos, nas ações e nos artefatos” (RADFORD, 2010a, p.36). Sob essa perspectiva, é importante criar um ambiente propício, levando em consideração o meio no qual a criança está inserida, os recursos disponíveis e observando quais são os mecanismos que ajudarão na formulação do conhecimento. Ao fazermos isso, estamos criando a possibilidade para uma *zona de emergência do pensamento algébrico* que, segundo Radford citado por Fernandes e Healy (2013, p.354) é: “[...], um espaço no qual os aprendizes articulam as formas de mediação disponíveis em um processo de transformar objetos conceituais culturais (objetos algébricos) em objetos de consciência”.

Radford (2010b) assinala também que é importante que nós, professores, estejamos atentos para as escolhas de atividades, principalmente aquelas que envolvem padrões. É necessário observar se estamos “trabalhando com generalizações algébricas ou com outras formas de lidar com o geral” (RADFORD 2010b, p. 40), ou seja, é preciso observar se estamos trabalhando com atividades que permitem que os alunos estabeleçam relações entre os termos da sequência, o que favorecerá a determinação da escrita de um termo geral, ou se simplesmente essas atividades os fazem buscar uma regra para determinar um termo específico da sequência.

Ainda sobre o pensamento algébrico, Radford (2010b) afirma que cada um dos alunos de uma mesma classe pode estar destacando particularidades diferentes das atividades e que cada uma dessas particularidades podem ser indícios de um determinado tipo de pensamento algébrico.

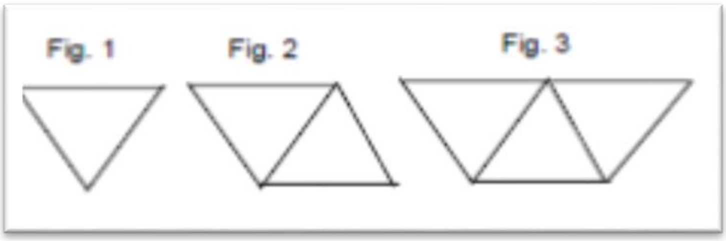
A partir de suas considerações, Radford (2001, 2010) estabelece três estilos de pensamento: o *factual, o contextual e o simbólico*. Para exemplificar cada um dos níveis do pensamento algébrico, utilizaremos uma das atividades usadas por Radford (2001). Nesta atividade, solicitava-se que os alunos observassem uma figura como a representada na Figura 2 e em seguida respondessem as seguintes questões:

(a) quantos palitos seriam usados na figura 5 e na figura 25

(b) quantos palitos seriam usados em uma figura qualquer

(c) quantos palitos seriam usados na figura “n”.

Figura 2 – Os 3 primeiros termos de uma sequência trabalhada com um pequeno grupo de estudantes.



Fonte: Radford (2001, p.81)

Os alunos descobriram com facilidade quantos palitos foram usados para construir a figura 5 e, em seguida, partiram para a segunda parte da atividade a. Um dos alunos observou que há uma regularidade apontando que a primeira figura tem 1 mais 2, a segunda terá 2 mais 3. Esse discurso faz com que outro aluno perceba que a figura 25 terá 25 palitos mais 26, totalizando 51 palitos (RADFORD, 2001, p.82).

Em relação à estratégia utilizada pelos alunos, Radford (2001) destaca que eles não precisaram contar o número de palitos em cada uma das figuras até chegar a vigésima quinta. O número de palitos foi determinado por meio de um “processo de generalização” (RADFORD, 2001, p. 82), ou seja, um processo no qual os alunos podem perceber as estruturas matemáticas reveladas a partir de padrões que os levam a descrever procedimentos e ações para determinar o número de palitos de uma determinada figura.

De acordo com Radford (2001, 2010) esse processo caracteriza o *pensamento factual* que:

> Apesar de sua natureza aparentemente concreta, [...] não é uma forma simples de reflexão matemática. Pelo contrário, [ele] repousa sobre mecanismos altamente evoluídos de percepção e uma coordenação rítmica sofisticada de gestos, palavras e símbolos. (RADFORD, 2010a, p.7, tradução nossa).

Radford (2010a, p. 7) destaca ainda que a apreensão da regularidade e a imaginação das figuras no desenvolvimento de generalização permanecem ancoradas em um processo mediado; isso mostra a natureza multimodal do pensamento algébrico *factual.* Para responder o item b da atividade, os alunos realizaram longos debates. Radford (2001) aponta que um dos alunos apresentou a seguinte regra “[...] adiciona a figura mais a próxima figura”, e a escreve usando as mesmas palavras (RADFORD, 2001, pagina 84). De acordo com o autor, esse processo apresenta indício do *pensamento algébrico contextual*. Ou seja, os alunos utilizam termos apresentados nos enunciados dos exercícios para expressar as sentenças, além das ações que deverão ser feitas. No exemplo observado, os alunos utilizam os termos “figura” e “próxima figura” para designar um objeto indeterminado e também utilizam “você adiciona” para indicar qual a ação deverá ser feita com objetos mencionados. Nessas ações, podemos observar que os números já não são mais suficientes e os alunos conseguem escrever expressões que apresentam indicativos de indeterminação.

No exemplo considerado por Radford (2001), a atividade c tem a intenção de promover a emergência do *pensamento algébrico simbólico*. Ao se depararem com a “figura n” os alunos fazem algumas tentativas para escrever o número de palitos da figura, mas não estabelecem relação entre os procedimentos usados nos itens anteriores. Eles têm dificuldades para substituir os termos “figura” e “próxima figura” por uma “figura n”, ou seja, eles têm dificuldades em substituir as palavras por símbolos alfanuméricos. Isso faz com que o professor faça uma intervenção a partir dos resultados encontrados nos itens anteriores e nos discursos dos alunos. O professor visa chamar a atenção dos alunos para a representação da próxima figura no item a, ou seja, a figura 6. Um dos alunos percebe que seria 5 + 1, concluindo que seria a quantidade usada anteriormente mais um. Ao fazer essa intervenção, os alunos conseguem perceber como será a figura seguinte a “n”, concluindo que poderia ser n+1. Neste pensamento a característica marcante é a indeterminação, nessa situação representada por n, deixando de usar palavras para expressar a indeterminação denotada por letras.

Em linhas gerais, o pensamento algébrico factual exige uma generalização e ela é expressa por números. No pensamento contextual, as generalizações são apresentadas por palavras que fazem parte do contexto da atividade e no pensamento simbólico há um sentido de indeterminação que é denotado pelos símbolos alfanuméricos. O autor ainda destaca que nas generalidades de cada pensamento algébrico há camadas de significação, sendo que essas camadas podem ser profundas ou não. Essa profundidade entre as camadas está ligada à "forma material que pensamos e usamos para expressar o geral (por exemplo, os símbolos alfanuméricos, a linguagem natural ou outra coisa qualquer)" (RADFORD 2010b, p.42).

Em nosso trabalho, procuramos observar se o Conjunto de Atividades, envolvendo o princípio multiplicativo, realizado com o auxílio de um dispositivo móvel e as negociações entre os pares propiciam a emergência do pensamento algébrico. Além disso, acreditamos que o uso de um dispositivo móvel pode ser um diferencial e um motivador em nossos estudos. Diferencial por ser pouco utilizado em sala de aula, e também porque durante as atividades os alunos podem ouvir as músicas compostas e validar se elas são ou não uma possibilidade. A seguir, apresentamos algumas considerações sobre o uso de tecnologias na sala de aula.

2.2 PAPERT E OS COMPUTADORES

O computador, apesar de ser um recurso aparentemente novo, já era citado há pelo menos 3 décadas no meio educacional. Papert (1980) apontava que a escola nos moldes tradicionais precisava ser repensada. E uma forma de modificar este espaço era modificar o uso dos computadores e permitir que os alunos tivessem uma aprendizagem pautada em construções a partir de suas experiências de vida. Assim, na década de 1980 ele argumentava:

> Pode-se dizer que o computador está sendo usado para "programar" a criança. Na minha perspectiva, é a criança que deve programar o computador e, ao fazê-lo, ela adquire um sentimento de domínio sobre um dos mais modernos e poderosos equipamentos tecnológicos e estabelece um contato íntimo com algumas das ideias mais profundas

> da ciência, da matemática e da arte de construir modelos intelectuais. (PAPERT 1980, p. 17-18)

Essa mudança de atitude, proposta por Papert, requer uma nova postura tanto do professor como da escola, pois este recurso faz com que o profissional repense os conteúdos que serão abordados e qual a melhor maneira de utilizar tal recurso. Assim, é preciso se contrapor ao modelo tradicional. Seguindo esse raciocínio, para aprender, as crianças devem ter uma atitude participativa, ou seja, elas devem criar e recriar instrumentos que sejam interessantes, os quais precisam fazer sentido para elas.

O construcionismo, uma abordagem proposta por Papert, é uma extensão do *construtivismo* proposto por Piaget, baseia-se nesses ideais, ou seja, as crianças criam seus instrumentos, e eles são construídos a partir das necessidades de quem os fez, podendo sofrer alterações a qualquer momento. Nas palavras de Papert (1994, p. 137):

> [...] o construcionismo, minha reconstrução pessoal do construtivismo, apresenta como principal característica o fato de examinar mais de perto do que outros *ismos* educacionais a ideia da construção mental. Ele atribui especial importância ao papel das construções no mundo como um apoio para o que ocorre na cabeça, tornando-se assim uma concepção menos mentalista.
> .

Compreendemos, com isso, que a aprendizagem ocorre não só na “cabeça”, mas, sim, permeia todo o corpo. É necessário que as crianças sintam as experiências vindas das atividades nas quais estão envolvidas.

Para Papert (1980), para as crianças aprenderem é preciso ter ambientes nos quais elas “aprendem a transferir hábitos de exploração de sua vida pessoal para o domínio formal da construção cientifica” (PAPERT, 1980, p.45). Para estes ambientes ele deu o nome de micromundo. Desse modo, percebemos que o micromundo vai além de um ambiente para construções. Ele consiste em um espaço no qual a criança faz suas construções (criações) de maneira a utilizar o seu corpo. Durante a criação, ela pode seguir estratégias determinadas por ela mesma, não havendo necessidade de se preocupar com o certo ou errado. Essas criações, por serem espontâneas, bem particulares e muito livres, acabam sendo uma forma de representação do que elas pensam, sentem e compreendem sobre o mundo. Ao viver essas experiências, elas vão compreendendo possíveis conhecimentos formais a partir de experimentos informais.

Percebemos, assim, que o micromundo permite uma “aprendizagem sintônica” (PAPERT 1980, P. 87). Essa aprendizagem passa por três eixos: o primeiro é a sintonicidade corporal que está relacionada com o conhecimento que o indivíduo tem do seu corpo e ele utiliza esses conhecimentos em suas construções; já o segundo, a sintonicidade do ego, relaciona-se com o que o indivíduo pensa de si e do mundo ao seu redor, com suas experiências positivas ou negativas. O terceiro eixo, que seria a sintonicidade cultural, é quando o indivíduo consegue estabelecer relações entre um determinado conhecimento usado no micromundo e em sua vida cotidiana.

Acreditamos que uma maneira de proporcionar a criação desses micromundos é inserindo novas tecnologias nas práticas pedagógicas. A seguir apresentaremos um panorama sobre o uso de novas tecnologias na sala de aula.

2.2.1 Usos de novas tecnologias

A cada novo dia, surge uma inovação tecnológica. Nas últimas décadas, com os avanços tecnológicos e com computadores cada vez mais potentes, novas descobertas nas áreas da saúde, dos transportes e da comunicação, por exemplo, têm modificado a vida das pessoas. Nossa sociedade fica, cada vez mais, mecanizada; utilizamos carros, ônibus, metrô para nos descolorarmos de nossas casas para o trabalho. Não precisamos mais sair às ruas para comprar um jornal para saber o que acontece no mundo, é só ligar um *tablet* ou *smartphone* para termos acesso às notícias ou compras. Enfim, estamos cercados por tecnologias que facilitam nossas tarefas.

Entretanto, a cada dia que passa, a escola se distancia mais dessa realidade. A utilização das novas tecnologias na sociedade é crescente e cabe à escola acompanhar essas mudanças. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998, p. 34) “O fato de [...] estar emergindo um conhecimento por simulação, típico da cultura informática, faz com que o computador seja também visto como um recurso didático cada dia mais indispensável”.

De acordo com os PCN, o uso de computadores e outros recursos tecnológicos, não só auxilia nos processos de ensino e de aprendizagem como também estreita o relacionamento entre escola e aluno. A tecnologia favorece a aprendizagem do estudante, uma vez que ele passa a perceber a importância gráfica dos dados, cria novas estratégias de resolução de problemas, tem experimentos matemáticos mais ricos e, acima de tudo, ela “permite um trabalho que obedece a distintos ritmos de aprendizagem” (PCN, 1998, p. 35). Em nossos estudos, foi possível verificar isso, uma vez que cada dupla tinha um *smarthpone* ou *tablet*, eles resolviam no seu tempo. Não era necessário avançar para a próxima etapa porque um determinado grupo já estava em outra. Neste contexto, Borba e Penteado (2001, p. 38) “apontam que as mídias informáticas associadas a pedagogias que estejam em ressonância com essas novas tecnologias podem transformar o tipo de Matemática abordada em sala de aula”.

Assim como Borba e Penteando mostram a importância do uso de novas tecnologias no ambiente escolar, Cox (2003) aponta algumas possíveis vantagens do uso de computadores nas escolas. A autora assinala que o uso de computadores auxilia no desenvolvimento da linguagem e da escrita, favorece o desenvolvimento da cidadania, pode ser uma fonte de estímulo para o aluno no desenvolvimento das atividades, auxilia na interação entre aluno e professores, propicia a interdisciplinaridade e também prepara para o mundo do trabalho. Desse modo, podemos observar que a contribuição dos computadores não se restringe ao campo matemático, muito ao contrário, ele promove uma interação entre todas as áreas. Borba e Penteado (2001, p. 65) dizem que “a inserção de tecnologia informática (TI) no ambiente escolar tem sido vista como um potencializador das ideias de se quebrar a hegemonia das disciplinas e impulsionar a interdisciplinaridade”. Mas a principal mudança que o uso das novas tecnologias causa é em relação à postura do professor perante o conhecimento, pois, com novas ferramentas, ele tem que repensar na maneira pela qual abordará o conteúdo explorando o máximo a máquina em si.

Além das vantagens, Cox (2003) também apresenta as desvantagens do uso de computadores. Essas desvantagens estão ligadas ao mau uso dos equipamentos sem a devida preparação do professor, ou seja, em muitas escolas, encontraríamos funcionários que não estariam aptos a utilizarem essas ferramentas em sala de aula, deixando, assim, de aproveitarem ao máximo o instrumento em questão. Outra desvantagem é não ter um suporte técnico efetivo, pois estas máquinas necessitam de uma manutenção sistemática.

Diante do exposto acima, e cientes da importância do professor para a inserção das tecnologias nas salas de aula, fazemos um convite para se refletir sobre o uso de celulares (*smartphone*) nas aulas de Matemática.

Uma pesquisa feita pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) entre 2005 e 2011 assinala um crescimento de 107,2% do número de pessoas acima de 10 anos que possuem celulares. Esses aparelhos estão, cada vez mais, frequentes nas escolas, e as crianças estão conectadas a eles cada dia mais. Diante disso, muitos estados brasileiros criaram uma lei que proíbe o uso de celulares durante as aulas. No estado de Minas Gerais, por exemplo, temos a lei nº 14.486 de dezembro de 2002. Com os seguintes dizeres:

> Disciplina o uso de telefone celular em salas de aula, teatros, cinemas e igrejas.
> O povo do Estado de Minas Gerais, por seus representantes, aprovou, e eu, em seu nome, nos termos do § 8º do art. 70 da Constituição do Estado de Minas Gerais, promulgo a seguinte lei:
> Art. 1° – Fica proibida a conversação em telefone celular e o uso de dispositivo sonoro do aparelho em salas de aula, teatros, cinemas e igrejas.
> Art. 2° – Esta lei entra em vigor na data de sua publicação.
> Art. 3° – Revogam-se as disposições em contrário.
> Palácio da Inconfidência, em Belo Horizonte, aos 9 de dezembro de 2002.

Apesar da lei, algumas escolas em Belo Horizonte têm tentado administrar a convivência entre celulares e sala de aula. Conforme a matéria *Escolas e professores se rendem aos celulares e outras mídias eletrônicas*, divulgada pelo Jornal Estado de Minas, em 18 de novembro de 2011, em uma determinada escola “há professores que usam os smartphones dentro da sala como auxiliadores na forma de ensinar”.

Essa invasão não está acontecendo somente no Brasil, em uma matéria divulgada pela revista Carta Capital (2013) observamos que esse fenômeno também está acontecendo nos Estados Unidos. Segundo a matéria:

> Foi realizada uma pesquisa com 777 estudantes de seis universidades americanas de 5 regiões diferentes e o resultado encontrado é que a grande maioria dos entrevistados afirmam que já utilizaram celulares, tabletes ou computadores durante a aula para fins que não eram o aprendizado. Apesar de estes alunos concordarem que o uso dessas mídias eletrônicas atrapalha o rendimento escolar eles não concordam com medidas que proíbam o uso dos aparelhos nas salas de aulas.

Esses dados nos mostram que é necessário repensar a proibição e encontrar uma forma de poder trazer esses aparelhos para as salas de aula de modo a contribuir com o aprendizado dos alunos (FAUSTINO, 2014). Diante disso, ALLAN (2013) aponta que:

> Ao invés de coibir o uso do celular, as escolas deveriam incorporá-lo como um recurso que já tem uma forte ligação com a rotina dos estudantes. Se bem aplicados e com um planejamento bem elaborado, eles podem contribuir fortemente para envolver os alunos em um processo de aprendizagem baseado em projetos, envolvendo atividades desafiadoras e que são conectadas ao cotidiano do aluno. As escolas devem estimular a criação de conteúdos e o desenvolvimento de projetos educacionais e pedagógicos que o transformem em uma poderosa ferramenta de ensino e aprendizagem.

Podemos observar que os aparelhos celulares e outras tecnologias têm adentrado as salas de aulas do mundo todo. Com esse panorama, a Unesco lançou, em 2013, um guia que apresenta vantagens em relação ao uso das tecnologias moveis[4] em sala de aula e maneiras como os governantes podem implementá-las. Este guia visa "auxiliar os formuladores de políticas a entender melhor o que é aprendizagem móvel[5] e como seus benefícios, tão particulares, podem ser usados como alavanca para fazer avançar o progresso em direção à Educação para Todos" (UNESCO, 2013, p.7). Dentre as vantagens apresentadas no guia, destacamos algumas, pois acreditamos que estão diretamente ligadas a nossa pesquisa:

- Auxilia na aprendizagem (individualizada)
- *Feedbacks* imediatos
- Criar uma ponte entre a aprendizagem formal e não formal
- Auxilia estudantes com deficiências

Acreditamos que estes pontos estão relacionados à nossa pesquisa, pois, ao manipularem o aplicativo, os alunos poderiam perceber se as músicas são adequadas para as atividades, portanto teríamos aqui um *feedback* imediato. A partir da "brincadeira" de criar música, eles estão estabelecendo uma relação entre a aprendizagem formal e a informal, pois, a partir das possibilidades criadas, eles poderiam estabelecer relações e criar regras para determinar o número de músicas feitas sem a necessidade de tocar todas as músicas, por exemplo. Além disso, há que se considerar o fato de que essa atividade pode auxiliar estudantes com deficiência se na turma houvesse alunos com deficiência visual e auditiva, pois o deficiente visual

[4] De acordo com a Unesco (2013, p. 8) tecnologias moveis são *aparelhos móveis*, reconhecendo simplesmente que são digitais, facilmente portáteis, de propriedade e controle de um indivíduo e não de uma instituição, com capacidade de acesso à internet e aspectos multimídia, e podem facilitar um grande número de tarefas, particularmente aquelas relacionadas à comunicação.
[5] Envolve o uso de tecnologias móveis, isoladamente ou em combinação com outras tecnologias de informação e comunicação (TIC), a fim de permitir a aprendizagem a qualquer hora e em qualquer lugar. " (UNESCO,2013, p.8)

teria como referência os sons emitidos pelas lâminas tocadas e o deficiente auditivo se orientaria pelas cores ou pelas letras apresentadas nas lâminas dos xilofones.

Enfim, diante de tudo que observamos e lemos, percebemos que proibir o uso de novas tecnologias, principalmente o celular, não é o melhor caminho. O ideal é que as escolas e professores adotem esses aparelhos e utilizem em sala de forma a tornar o ambiente mais favorável para a aprendizagem. Por acreditar que os usos de novas tecnologias favorecem o aprendizado, iremos utilizar dispositivos móveis em um Conjunto de Atividades que aborda o princípio multiplicativo. Escolhemos este assunto por ser adequado ao conteúdo trabalhado no 6º ano. Com ele pretendemos investigar o desenvolvimento do pensamento algébrico. Na próxima seção apresentaremos um estudo sobre o princípio multiplicativo com mais detalhes.

2.3 PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

De acordo com Dante (2012, p 336), as investigações sobre Combinatória iniciaram-se no Século XVI com Tartaglia, a partir da necessidade de “calcular o número de possibilidades existentes em alguns jogos”, porém só no Século XX houve a formalização com o filósofo e matemático Gian-Carlos Rota (1932 – 1999). Ainda hoje, encontramos na literatura trabalhos que destacam a importância dos estudos sobre Combinatória, entre esses consideramos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que apontam a necessidade de se iniciar o estudo sobre Combinatória já no ensino fundamental.

Segundo os PCN (1998, p.84), a “característica da vida contemporânea traz ao currículo de Matemática uma demanda em abordar elementos [...] da combinatória e da probabilidade, desde os ciclos inicias”. No 6º ano do ensino fundamental, estuda-se o conjunto dos Números Naturais e um dos itens do conteúdo programático são as operações com os estes números, o que inclui a multiplicação e seus diferentes significados. De acordo com os PCN, são quatro as ideias relacionadas à multiplicação: comparativa, proporcionalidade, configuração retangular e combinatória, apresentadas por Pessoa (2009, p. 63, grifo do autor) como:

> **Comparativa**: é estabelecida uma comparação entre as quantidades trabalhadas. **Proporcionalidade** envolve a ideia de proporção, comparando razões. A **configuração retangular** está associada à distribuição espacial, podendo envolver situações associadas ao

> cálculo da área. ***Combinatória***: Envolve situações que consistem basicamente em escolher e agrupar os elementos de um conjunto.

No entanto, no mesmo documento, podemos ler que uma prática muito utilizada em relação à multiplicação “é o estabelecimento de uma relação entre ela e a adição” (BRASIL, 1998, p. 108). Sendo assim, a multiplicação torna-se um caso particular da adição, uma vez que as parcelas têm sempre o mesmo valor. Os PCN (1998, p. 109) destacam que: “[...] essa abordagem não é suficiente para que os alunos compreendam e resolvam situações relacionadas à multiplicação, mas apenas aquelas que são essencialmente situações aditivas”.

Reconhecendo a necessidade de trabalhar outras ideias relacionadas à multiplicação, neste trabalho nos concentraremos em alguns aspectos relacionados à combinatória, mais especificamente ao princípio multiplicativo de contagem. De acordo com os PCN o objetivo do trabalho com combinatória é “levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo de contagem” (PCN, 1998, p 40).

Considerando que a combinatória se baseia no raciocínio multiplicativo, desenvolvemos um conjunto de atividades no qual os alunos deveriam, inicialmente, determinar o número de músicas feitas a partir de um determinado número de notas e batidas nas lâminas de um xilofone digital. Ao final de cada atividade, os alunos deveriam escrever uma regra geral que permitisse conhecer o número de músicas a partir de uma quantidade indeterminada de notas e batidas.

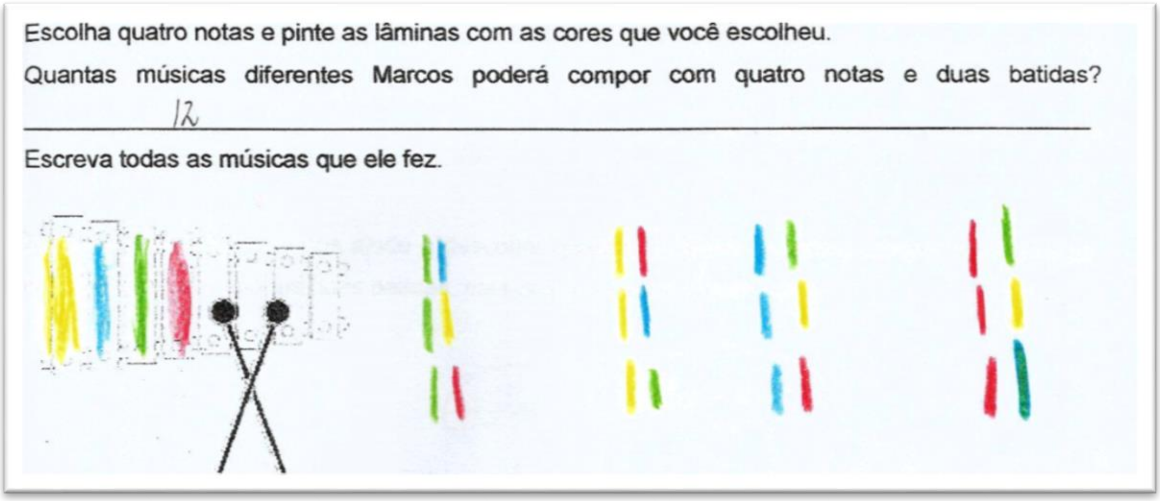
Ao trabalhamos com cores e sons, é preciso ficar atento à ordem de apresentação desses elementos, pois ao alterarmos a ordem deles, fazemos soar uma nova música, gerando, assim, nova possibilidade. Embora não seja o objetivo desse estudo, pois nossos sujeitos são alunos do 6º ano, ao considerar a ordem dos elementos (cores e sons) podemos nos remeter ao conteúdo de Análise Combinatória. Este conteúdo visa o estudo de problemas envolvendo arranjo, permutação e combinação. Contudo, em nossas atividades não é possível trabalhar a questão da combinação. Portanto, apresentaremos as definições de arranjo e permutação fornecidas por Caraça (1956):

> Dizem-se **arranjos** de n elementos tomados p a p os agrupamentos distintos que podem formar-se de modo que em cada um entrem p desses n elementos, considerando como distintos dois agrupamentos quaisquer desde que defiram pela natureza ou pela ordem dos elementos que neles entram.

> Dizem-se **permutações** de n elementos os agrupamentos que podem formar-se com esses n elementos, agrupando-os em todas as ordens possíveis. (CARAÇA, 1956, p. 200- 201, grifo nosso)

Os exemplos que apresentamos a seguir foram retirados do nosso conjunto de Atividades. Na Figura 3 temos um exemplo de arranjo. Observe o que Caraça chama de elementos seria, neste caso, o número de notas escolhidas e eles foram organizados de 2 em 2, que seria o "p".

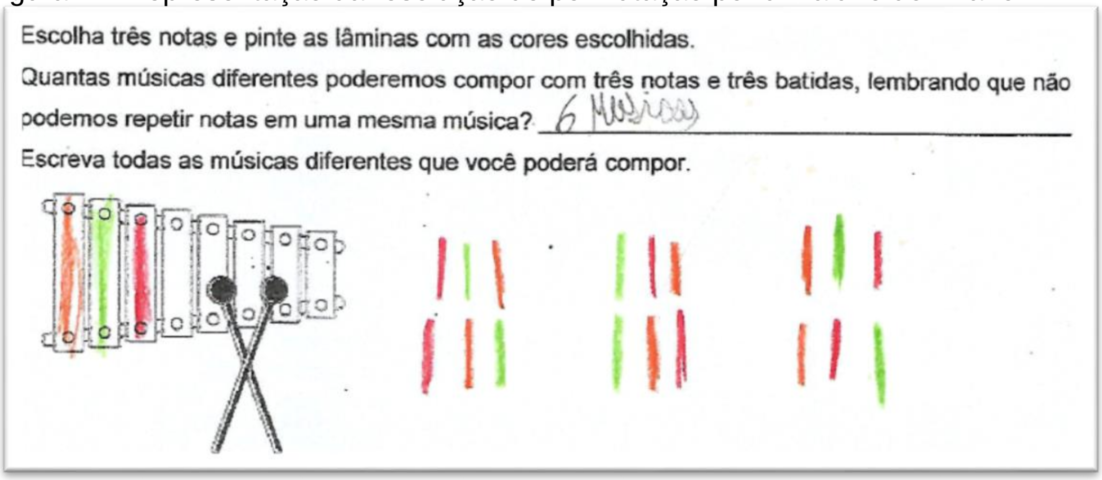
Figura 2 – Representação da resolução de arranjo por um aluno do 7º ano.



Fonte: acervo da pesquisa

Já na Ilustração 4 temos um exemplo de permutação, o número de notas são os elementos que devem ser combinados de três em três.

Figura 4 – Representação da resolução de permutação por um aluno do 7º ano.



Fonte: acervo da pesquisa

No caso de nossas atividades, não temos a possibilidade de trabalharmos com combinações, pois essas implicam escolhas não ordenadas de *n* elementos tomados *p* a *p*. Considerando as sete notas musicais (dó, ré, mi, fá, sol, lá e si) e escolhendo duas delas, por exemplo, (dó e si) ao tocarmos dó-mi e mi-dó produzimos músicas distintas.

Além de trabalharmos com alguns aspectos relacionados à Combinatória, temos o propósito de envolver os alunos em atividades nas quais eles expressem generalizações algébricas. Moro, Soares e Filho (2010) apontam que uma forma de iniciar o trabalho com álgebra é por meio de problemas de produto cartesiano. Nesta pesquisa, esperamos que o trabalho com arranjos e permutações também permita o envolvimento com a álgebra, pois podemos desenvolver o pensamento algébrico a partir das regularidades observadas nas atividades, conforme Radford (2001, 2006, 2010) apresenta em seus trabalhos.

Com o intuito de conhecer melhor as pesquisas envolvendo a combinatória, realizamos um levantamento sobre os trabalhos envolvendo este assunto e a maneira como ele é abordado. No próximo tópico, apresentaremos os trabalhos encontrados que mais se relacionavam com nossa pesquisa.

2.3.1 Estudos precedentes

Inicialmente, pesquisamos por trabalhos que associassem a inclusão e o computador à combinatória. Em relação ao computador, procuramos especificamente trabalhos desenvolvidos sob a perspectiva dos micromundos de Papert. Porém, não conseguimos localizar nenhum trabalho com essa configuração ou que envolvesse educação na perspectiva inclusiva e a combinatória. Desta forma, passamos a procurar trabalhos que abordassem diretamente a combinatória, desenvolvidos em escolas regulares. Aproximadamente, foram encontrados trinta trabalhos. Considerando o número de pesquisas, passamos então a estabelecer alguns critérios de seleção.

Nossa pesquisa seria desenvolvida com um grupo de alunos do ensino fundamental, mais especificamente do ensino fundamental II (6º ao 9º ano). Deste modo, um segundo processo de seleção nos deixou com 18 trabalhos para análise.

Dentre os trabalhos selecionados, observamos que a grande maioria estava ligada ao grupo Geração[6]. Deste grupo, observamos que os trabalhos de Azevedo (2013), Azevedo e Borba (2013) e Ferraz, Borba e Azevedo (2010) apresentam como fundamentação teórica a Teoria dos campos conceituais de Vergnaud. Ainda em relação aos trabalhos citados, os dois primeiros foram desenvolvidos com alunos do 5º ano do ensino fundamental e tinham como objetivo geral analisar a influência da construção de árvores de possibilidades na resolução de problemas combinatórios. O terceiro trabalho foi desenvolvido com alunos do 7º ano com o objetivo de analisar de que maneira o *software* educativo *Árbol* pode ajudar na compreensão do conhecimento combinatório através da construção de árvores de possibilidade.

Além disso, a estrutura destes trabalhos é bem parecida, pois em todos eles temos uma divisão entre os participantes, sendo que uma parte deles compõem o grupo controle e a outra parte o grupo experimental. Desta forma, é aplicado um teste inicial, para ambos os grupos e, a partir deste pré-teste, o grupo experimental recebe intervenções. Por fim, é aplicado um pós-teste aos dois grupos com o intuito de verificar os avanços que ocorreram a partir das intervenções feitas.

Azevedo (2013), Azevedo e Borba (2013) e Ferraz, Borba e Azevedo (2010) trabalharam com um *software* educacional, chamado Diagramas de Árbol. O programa, de acordo com Ferraz, Borba e Azevedo (2010, p.3):

> [...] tem como proposta explorar o campo do raciocínio combinatório da Combinatória através de diagramas de árvore. Sua interface apresenta opções para criar uma árvore com elementos distintos ou

[6] GERAÇÃO (Grupo de estudos em raciocínio combinatório do Centro de educação da UFPE), “o Geração surgiu com o objetivo de desenvolver e divulgar estudos relativos ao conhecimento de Combinatória.” Está registrado no CNPq desde 2009, sendo a coordenadora a Prof.ª Doutora Rute Borba

> iguais, permite usar exemplos já existentes na biblioteca do software e adicionar novas árvores à biblioteca. A opção que permite verificar os exemplos existentes tem uma apresentação gráfica composta por ferramentas que possibilitam ao usuário marcar e colorir os vários níveis, ampliar ou reduzir um nível específico e navegar pelos vários níveis da árvore. Com a vantagem de, sem usar fórmulas, e sem se restringir a apenas um dos significados da Combinatória, este software permite que o usuário construa, para todos os significados da Combinatória, árvores de possibilidades.

Na pesquisa de Azevedo (2013), os alunos que utilizaram o *software* apresentaram avanços no pós-teste, porém se forem comparados os desempenhos entre o grupo que usou o *software* e o grupo que usou lápis e papel, ambos os grupos tiveram desempenho similar.

Nas outras duas pesquisas, os sujeitos que utilizaram o *software*, durante as intervenções, obtiveram um desempenho melhor nos pós-testes aplicados. Entretanto Ferraz, Borba e Azevedo (2010) apontam que o trabalho com o *software* necessita de uma atenção especial do professor, pois ele pode apresentar algumas desvantagens. Uma delas é o próprio idioma, uma vez que o programa está em espanhol; a segunda desvantagem apontada pelas autoras é com relação a interpretar as árvores que são criadas. Como o *software* faz uma combinação entre todos os elementos, é necessário que o aluno observe se todas as possibilidades fazem parte da solução; caso contrário, ele deverá descartar as que não atendem a solução do problema.

Em relação às estratégias de representação das possibilidades, como árvores de possiblidades, diagramas, listagem, entre outros, Azevedo e Borba (2013) recomendam o uso de diferentes representações para a resolução das atividades, pois essa variedade pode propiciar um conhecimento mais “amplo sobre problemas combinatórios” (AZEVEDO; BORBA, p.61).

Pessoa e Santos (2012), Santos e Pessoa (2012) e Pessoa, Santos e Silva (2013) trabalharam com alunos 5º ano do ensino fundamental, sendo que Pessoa e Santos (2012) pesquisaram a resolução de problemas de produto cartesiano e arranjo. Santos e Pessoa (2012) e Pessoa, Santos e Silva (2013) trabalharam a resolução dos quatro tipos de problemas que compõem o raciocínio combinatório (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação). A estrutura dos trabalhos é bem similar, todos apresentam um grupo experimental e um grupo controle.

No trabalho de Pessoa, Santos e Silva (2013), o objetivo foi analisar as contribuições das intervenções feitas com material manipulativo para alunos do 5º ano quando eles trabalham com o raciocínio combinatório. As autoras separaram dois grupos, um trabalharia com lápis e papel e o outro grupo com “fichas com imagens que representavam os elementos citados nos enunciados dos problemas” (PESSOA; SANTOS; SILVA, 2013, p. 6).

Durante o trabalho de intervenção, as pesquisadoras destacaram para os alunos a importância da organização dos registros ao longo da resolução dos problemas e a necessidade de escrever todas as possibilidades. Porém, com o desenvolvimento da pesquisa, elas acabam mostrando para os alunos que é possível determinar a solução sem discriminar todas as possibilidades

Em relação aos resultados obtidos, as autoras corroboram trabalhos anteriores em que o número de acertos é maior em situações que envolvem uma quantidade menor de possibilidades, sendo mais difícil generalizar quando o número de possibilidades é maior. Além disso, elas observaram que o grupo que trabalhou com lápis e papel, durante toda a pesquisa, obteve melhor resultado no pós-teste em comparação ao grupo que trabalhou com o material manipulativo nas intervenções. As autoras ponderam que a utilização de dois recursos diferentes pelo mesmo grupo pode ter influenciado no desempenho.

Os trabalhos de Pessoa e Santos (2012a; 2012b) e Santos e Pessoa (2012) focaram nas invariantes de cada problema de combinatória, na listagem de possibilidades, na sistematização e generalização e utilizaram como recurso lápis e papel. As autoras ponderam os invariantes da seguinte forma:

> [...] defende-se que os invariantes do conceito dos problemas combinatórios se relacionam com a *escolha*, ou seja, a utilização ou não de todos os elementos da situação-problema e com a *ordenação*, ou seja, a geração ou não de novas possibilidades, dependendo do tipo do problema. (PESSOA; SANTOS, 2012 p.4)

Elas também destacam que o grupo experimental obteve um rendimento melhor que o grupo controle nos pós-testes. E, dentre os resultados encontrados em ambas as pesquisas, é apontado que:

> [...] é possível perceber importantes avanços no que se refere ao ensino-aprendizagem de Combinatória quando o conteúdo é trabalhado de forma sistemática em sala de aula, o que demonstra que os pilares adotados, durante as intervenções (listagem de possibilidades como estratégia, sistematização, generalização e percepção dos invariantes dos significados dos problemas), parecem contribuir significativamente para que os alunos compreendam e

> melhor reflitam sobre a Combinatória. (PESSOA; SANTOS, 2012, p. 12)

Outro fator que Pessoa e Santos (2012) apontam é em relação à generalização. As autoras afirmam que é preciso um trabalho contínuo e longo para que os alunos consigam perceber a generalização e explicam que não é possível chegar até ela com apenas uma intervenção. As autoras ainda destacam que, muitas vezes, os alunos só recorrem a essa estratégia ao perceber que o problema tem muitas possibilidades e que é necessária uma forma de se encontrar o resultado correto sem escrever todas as combinações. Outra hipótese para fazer com que os alunos não recorram às generalizações, ainda de acordo com Pessoa e Santos (2012a), é que inicialmente eles não têm muita familiaridade com as situações problemas e listar todas as possiblidades é uma maneira segura de identificar a resposta correta. Entretanto, quando eles passam a resolver exercícios deste tipo com mais frequência, é esperado que os estudantes comecem a usar a generalização mais vezes (PESSOA, SANTOS, 2012a, p.372).

Foram localizados outros trabalhos que não estão ligados ao grupo GERAÇÃO. Alves (2010) trabalhou a introdução do pensamento combinatório com alunos do 9º ano. A pesquisa tem como questão central “quais as estratégias de ensino aprendizagem que podem viabilizar uma introdução dos conceitos básicos de análise combinatória?” (ALVES, 2010, p.15). Um dos resultados apontados indica que, ao se trabalhar com diferentes representações, como árvores de possibilidades, listagem ou tabelas, os alunos conseguem perceber as diversas situações que compõem o raciocínio combinatório. Desta forma, eles identificam quando a ordem dos termos será importante ou não.

Em todos os trabalhos lidos, foi sugerida a necessidade de mais pesquisas ligadas ao raciocínio combinatório com alunos do ensino fundamental. E a justificativa para isso é o fato de ser um conteúdo que auxilia no desenvolvimento das estratégias de resoluções.

Ao concluir as leituras dos trabalhos realizados sobre combinatória, entendemos que era importante deixar as formas de registro livres, já que diferentes estímulos sensoriais estavam sendo oferecidos. Entretanto, elas devem ser obrigatórias para auxiliar na resolução das atividades em nossa pesquisa. Sendo assim, percebemos que o fato de trabalharmos com cores e som também poderá colaborar na construção dos registros e ajudar os alunos nos momentos de validação de suas “regras” (generalizações).

Outro ponto que consideramos interessante e importante é o fato de que os alunos devem trabalhar em duplas. Desse modo, eles poderão discutir sobre as estratégias que serão adotadas, bem como sobre as respostas dadas.

A partir das leituras dos trabalhos desenvolvidos com combinatória, começamos a pensar nos elementos que deveriam compor nossa atividade. Percebemos que eram importantes os registros das possibilidades, a necessidades de diálogo entre os alunos e também a utilização do recurso tecnológico. No próximo capítulo, apresentaremos a metodologia usada em nossa pesquisa, bem como o desenvolvimento das atividades usadas na pesquisa.

CAPÍTULO 3

TRAJETÓRIA DO ESTUDO

Neste capítulo, apresentaremos a metodologia que norteou nosso estudo, o *Design Experiment*. Além disso, exibiremos os participantes de cada ciclo e suas peculiaridades.

3.1 DESIGN EXPERIMENT

O termo *Design Experiment* começou a ser divulgado em 1992 por Collins e Brown em seus artigos (COLLINS, JOSEPH, BIELOCZYC, 2004, p. 15). Trata-se de uma metodologia voltada para as questões pedagógicas.

Essa metodologia visa desenvolver teorias e instrumentos que auxiliam na aprendizagem. Para isso, os pesquisadores envolvidos nos projetos formulam hipóteses e ferramentas, e as testam em sala de aula. Durante o desenvolvimento, observam os alunos com o intuito de perceber como eles desenvolvem o pensamento matemático e de que forma os instrumentos desenvolvidos contribuem para a aprendizagem do conteúdo matemático envolvido no estudo. Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer e Schauble. (2003) apontam que o *Design Experiment* propicia um bom entendimento da ecologia[7] de aprendizagem.

De acordo com Cobb et al (2003) essa metodologia visa a experimentação para desenvolver teorias para a aprendizagem e também observar os meios em que essa aprendizagem acontece. Isso independente do grupo, podendo ser um pequeno grupo de alunos, uma sala de aula, professores e, até mesmo, com futuros professores ou na comunidade escolar como um todo.

Cobb et al (2003, p.9) descrevem cinco contextos para os quais a metodologia do *Design Experiment* é adequada. No primeiro, o pesquisador trabalha com um pequeno grupo de alunos, com o intuito de criar uma pequena versão da ecologia de aprendizagem que pode ser estudada com maior profundidade e detalhe. Em um

[7]De acordo com Cobb et al (2003, p. 9) Ecologia de Aprendizagem – é um complexo sistema interativo que envolve diferentes elementos de diversos tipos e níveis. (tradução nossa)

segundo contexto, uma equipe de pesquisadores colabora com um professor (que pode ser membro da equipe de pesquisa) que tem a reponsabilidade da instrução na realização de experimentos em sala de aula. Uma terceira possibilidade é o desenvolvimento de experimentos com professores em formação, em que a equipe de pesquisadores ajuda a organizar e estuda a educação de futuros professores. O quarto contexto, apontado por eles, permite o desenvolvimento de estudos com professores em exercício, em que os pesquisadores colaboram com professores para dar suporte ao desenvolvimento da comunidade profissional. A quinta possibilidade considera um grupo de pesquisadores que colabora com professores, administradores escolares e outros, para dar suporte à mudança organizacional.

O estudo principal foi desenvolvido em uma turma de 6º ano do Colégio Maria Clara Machado, localizado em Belo Horizonte (MG). A escolha da escola campo da pesquisa foi motivada, primeiramente, por ser um ambiente já conhecido pela pesquisadora e, em segundo lugar, por ser uma escola com um número elevado de alunos com TDAH ou outras necessidades, como dislexia; portanto, ela é uma escola inclusiva.

A escola está estruturada da seguinte forma: no turno da manhã, funcionam o ensino fundamental II e o médio, com uma sala de cada turma, exceto nos 8º, 9º e 1º ano que possui duas turmas cada, em média há 20 alunos em cada sala no turno da manhã. No turno da tarde, funciona o ensino fundamental I com turmas do 2º, 4º e 5º ano, neste segmento o número de alunos em sala não ultrapassam 10 alunos.

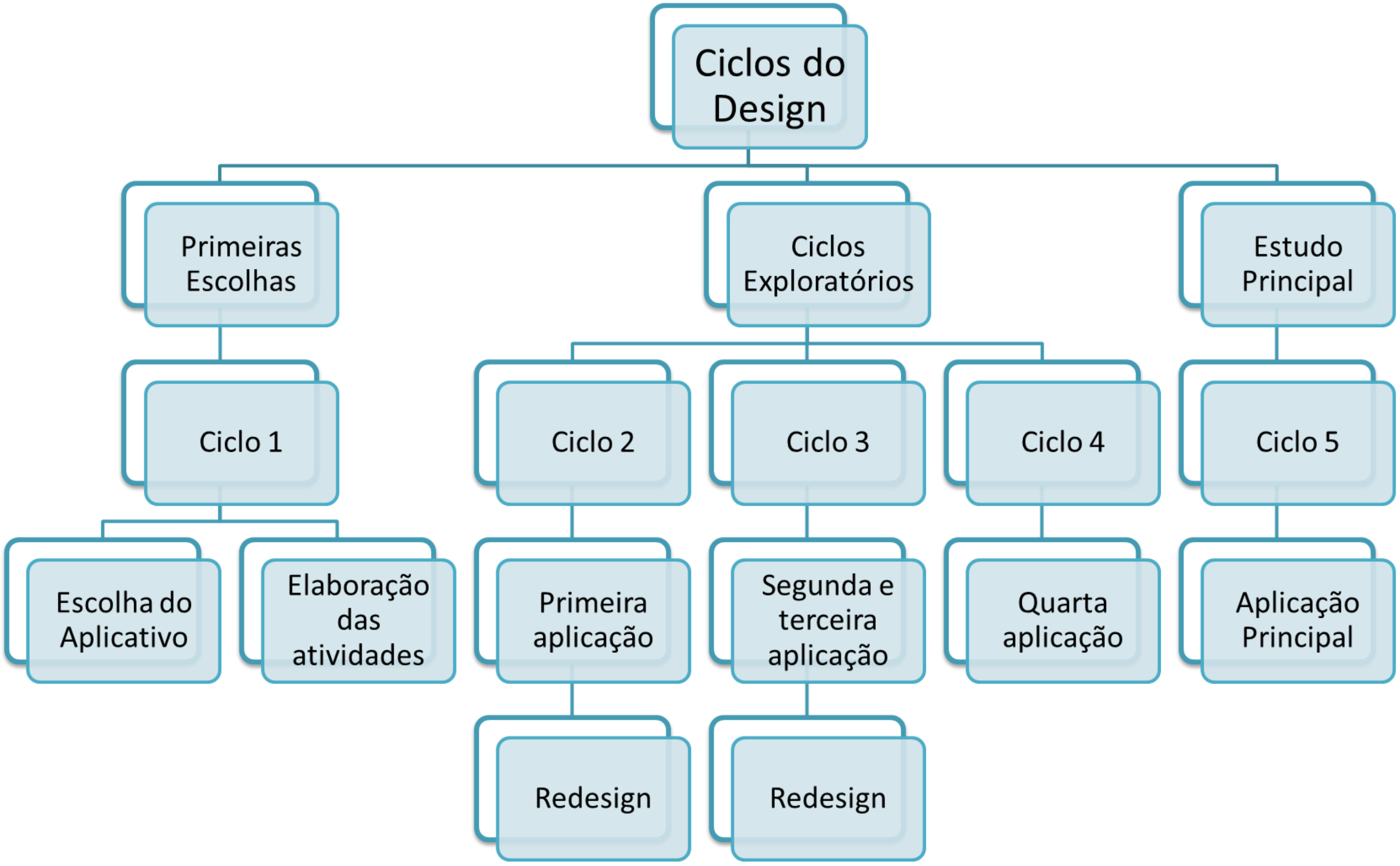
A estrutura física da escola é pequena. Ela possui dois andares, no primeiro andar existe duas quadras, uma biblioteca, um laboratório de ciências, uma lanchonete e um banheiro, sendo um feminino e outro masculino e 5 salas de aula. No segundo andar funciona a sala dos professores, a sala da direção, a sala da coordenação um banheiro, feminino e masculino, a recepção e 5 salas de aula. Em todas as salas há um projetor e um sistema multimídia.

Como a pesquisadora é professora no colégio onde será realizada a pesquisa, nosso estudo adequa-se a segunda configuração dentre as apresentadas por Cobb et al (2003) para as possíveis aplicações do *Design Experiment*, pois o experimento será desenvolvido em uma turma. Nesta pesquisa, trabalharemos com uma sala de 18 alunos com diferentes necessidades educacionais.

Ao optar por essa metodologia, levamos em conta uma das características apresentadas por Cobb et al (2003, p. 10) que, é o processo *iterative design.* Esse processo envolve ciclos de aplicação e de análises que permitem que conjecturas sejam formuladas, testadas e reformuladas. Durante a aplicação das atividades, os pesquisadores fixam seus olhares para tudo aquilo que o aluno produz, como as falas, os registros escritos e até mesmo sua expressão corporal. Após a aplicação, os pesquisadores refinam o instrumento utilizado, com o intuído de melhorá-lo e novamente o testam.

Orientada por essa metodologia, nossa pesquisa apresenta cinco ciclos, conforme fluxograma apresentado na Figura 5, a seguir.

Figura 5 – Fluxograma dos ciclos do Design



Fonte: acervo da pesquisa

3.2 Ciclo 1 – Primeira escolha

Neste ciclo, nos dedicamos à elaboração das atividades e à escolha do recurso digital que iríamos usar. Em relação ao recurso digital, procuramos um que nos permitisse trabalhar com estímulos visuais e sonoros, pois acreditávamos que estes elementos (sons e cores) poderiam oferecer diferentes formas de registro e de validação de possíveis combinações no momento de realização das atividades. Além disso, procurávamos elementos que trouxessem dinamismo para as aulas. Um instrumento que atendia a essa demanda era o xilofone de oito lâminas.

Almejávamos proporcionar um ambiente favorável para a aprendizagem, conforme Papert (1980) apresentou. Um ambiente que proporcionasse ferramentas e matérias que favorecessem o aprendizado das crianças. Ao utilizar o xilofone para compor as músicas, os alunos poderiam verificar por meio do som, por exemplo, testar e validar suas respostas para as atividades propostas. Além disso, elas, ao comporem suas músicas, escolheriam as notas a partir de seus gostos, ou pelo som ou pela cor que a lâmina representaria, tornando, assim, suas construções pessoais. Outro aspecto é que as cores e o som poderiam auxiliar os alunos a visualizarem as diferenças entre as diferentes possibilidades, ou até mesmo favorecer a percepção de regularidades, dependendo das estratégias aplicadas.

Ao finalizar as atividades, precisávamos verificar suas potencialidades e melhorá-las se necessário. Para isso, foram necessários três ciclos que contaram com quatro grupos diferentes, além do último ciclo (Estudo Principal), conforme quadro 1.

Quadro 1 - Relação de participantes

Ciclos	Participantes
2 – Primeira aplicação	Grupo de pesquisa (8 prof. de Matemática).
3 – Segunda e terceira aplicações	* 20 alunas do Curso de Pedagogia. * 26 alunos do 6º ano do ens. fundamental.
4 – Quarta aplicação	18 alunos do 7º ano do ens. fundamental.
5 – Estudo final	18 alunos do 6º ano do ens. fundamental.

Fonte: acervo da pesquisa

3.2.1 Ciclos Exploratórios

Nesse tópico, apresentamos a proposta dos primeiros ciclos deste estudo, tendo como foco a estrutura das atividades e os objetivos que pretendíamos atingir. Antes de iniciarmos cada uma das sessões apresentadas neste trabalho, os participantes ou seus responsáveis leram e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (Anexo A). Os instrumentos de coleta de dados são os registros individuais, realizados pelos alunos em cada atividade, e os vídeos gravados durante a realização das sessões. Na descrição e na análise dos dados os participantes serão identificados por meio de um pseudônimo.

3.2.1.1 Ciclo 2. Primeiro Teste das Atividades

Durante a elaboração das atividades, tomamos cuidado em relação ao vocabulário empregado, bem como com os comandos de ações, pois estávamos elaborando atividades que seriam usadas com crianças de 11 a 13 anos. Procuramos escrever de forma simples e objetiva os enunciados de cada item.

Com isto, a primeira versão da Atividade (Apêndice A) ficou da seguinte forma:

Atividade 1
João adora música e por isso ganhou de sua mãe um xilofone. Seu xilofone é composto por 8 lâminas (notas) e, como esperado, cada uma emite um som diferente e tem uma cor diferente. Sendo assim é possível compor várias músicas.
1. Escolha duas notas. Usando apenas estas duas notas, descubra quantas músicas diferentes João pode tocar. Registre todas as diferentes músicas de João.
2. Faça o mesmo para 3 notas.
3. Como vocês verificaram que tocaram todas as diferentes músicas com suas 3 notas?
4. Você poderia dizer quantas músicas diferentes João poderia compor com 4 notas? Registre todas as músicas diferentes
5. Você poderia dizer quantas músicas diferentes João poderia compor com 5 notas?

Atividade 2
Marcos, amigo de João, pensou fazer músicas que não tivessem notas repetidas. Ele pediu emprestado o xilofone de 8 notas e começou a compor músicas.
1. Escolha duas notas. Usando apenas estas duas notas, descubra quantas diferentes músicas Marcos pode tocar. Registre todas as diferentes músicas de Marcos
2. Faça o mesmo para 3 notas.
3. Como vocês verificaram que tocaram todas as diferentes músicas com suas 3 notas?
4. Você poderia dizer quantas músicas diferentes Marcos poderia compor com 4 notas? Registre todas as músicas diferentes.
5. Você poderia dizer quantas músicas diferentes Marcos poderia compor com 5 notas?
Desafio
Agora você é o compositor. Seu desafio é determinar quantas músicas diferentes você pode tocar usando 3 notas diferentes escolhidas entre as 8 do xilofone.

Antes de aplicarmos as atividades aos alunos do 6º ano, precisávamos testá-las. Sendo assim, escolhemos aplicar essa versão em nosso grupo de pesquisa, com o intuito de que eles nos dessem *feedbacks* sobre a atividade. Este grupo era composto por oito professores de Matemática e era bem diversificado, pois os professores trabalhavam em segmentos diferentes. Alguns davam aulas no ensino fundamental II, outros no ensino médio, e havia professores da Graduação e da Pós-Graduação.

Para a realização das atividades, eles trabalharam em duplas e receberam as atividades impressas, um xilofone em madeira (Figura 6) e canetas hidrográficas. Essa aplicação aconteceu em um único encontro. Uma particularidade sobre o trabalho desse grupo foi o não uso do xilofone. Isso ocorreu, provavelmente, porque os professores dominam os conceitos matemáticos abordados na atividade.

Figura 6 – Imagem do Xilofone de Madeira

Fonte: acervo pessoal

Depois que as atividades foram concluídas, abrimos as discussões com o grupo e levantamos alguns pontos que deveriam ser considerados no (*re)design* das atividades. Não estava claro para os leitores alguns comandos, como, por exemplo, o número de notas em cada composição, e quantas vezes poderiam tocar cada lâmina. Assim, reescrevemos os enunciados realizando algumas modificações, que estão em destaque abaixo.

*Escolha duas notas. Usando apenas estas duas notas (**e dois toques)** descubra quantas músicas diferentes João pode tocar. Registre todas as diferentes músicas de João.*

*Escolhendo três notas e usando apenas estas notas (**e três toques**) quantas diferentes músicas João pode tocar? Registre todas as diferentes músicas de João.*

Consideramos também que o número de questões não era suficiente para que os alunos conseguissem observar regularidades e que seria necessário inserir mais questões que envolvessem outros conceitos relacionados à combinatória, como combinação. Na primeira atividade desenvolvida, havia 10 itens e um desafio, sendo que 5 itens eram com repetição de notas e outros 5 itens sem repetição de notas e o número de batida sempre variava de acordo com o número de notas escolhidas. Ao reestruturarmos essa parte, nossa versão 2 ficou com 3 itens com o número de batidas variando de acordo com o número de notas (com repetição), 2 itens com o número de notas fixos em 3 e o número de batidas variando de 2 a 4 em seguida fizemos a mesma coisa, porém não era permitido repetir as notas. Na segunda versão mantivemos o desafio igual ao da primeira.

3.2.1.2 Ciclo 3 – Segundo Teste das Atividades

Após as modificações realizadas nas atividades, a segunda versão ficou da seguinte forma (Apêndice B):

Atividade 1
João adora música e por isso ganhou de sua mãe um xilofone. Seu xilofone é composto por 8 notas (lâminas) e, como esperado, cada uma emite um som diferente e tem uma cor diferente. Sendo assim é possível compor várias músicas.

1. *Escolha duas notas. Usando apenas estas duas notas (e dois toques) descubra quantas músicas diferentes João pode tocar. Registre todas as diferentes músicas de João.*
2. *Escolhendo três notas e usando apenas estas notas (e três toques) quantas diferentes músicas João pode tocar? Registre todas as diferentes músicas de João.*
3. *Como podemos ter certeza que tocamos todas as diferentes músicas com as 3 notas escolhidas?*
4. *Depois de perceber que era possível compor diferentes música João começou a colocar algumas regras para criar suas músicas. Ele escolheu então 3 notas do xilofone e começo a criar músicas somente usando somente dois toques. Descubram quantas diferentes músicas João pode tocar. Registrem todas as diferentes músicas de João*
5. *E se com as mesmas 3 notas, quantas músicas de 4 toques poderão ser feitas? Registre todas as diferentes músicas de João*

Atividade 2
Marcos, amigo de João, pensou fazer músicas que não tivessem notas repetidas. Ele pediu emprestado o xilofone de 8 notas e começou a compor músicas.

1. *Escolha duas notas e usando apenas estas duas notas (e 2 toques) descubra quantas diferentes músicas Marcos pode tocar. Registre todas as diferentes músicas de Marcos.*
2. *Faça o mesmo usando 3 notas para compor músicas com 3 toques.*
3. *Como vocês verificaram que tocaram todas as diferentes músicas com suas 3 notas?*
4. *Vocês poderiam dizer quantas músicas diferentes Marcos poderia compor com 4 notas? Registre todas as músicas diferentes.*
5. *Vocês poderiam dizer quantas músicas diferentes Marcos poderia compor com 5 notas?*

Atividade 3 *Assim como João, Marcos resolveu fixar o número de notas que cada música poderia ter, lembre-se que as músicas de Marcos nunca têm notas repetidas. Desta forma quantas músicas de 3 notas Marcos pode compor com apenas 2 toques? Registrem todas as diferentes músicas que Marcos pode compor.*
1. E se forem 4 notas? Registrem todas as diferentes músicas com 3 toques que Marcos pode compor. *2. Vocês podem dizer quantas músicas diferentes Marcos poderia compor com 5 notas e 3 toques?* *3. Vocês poderiam dizer quantas músicas diferentes João poderia compor escolhendo somente 4 notas (e 4 toques)?* *4. Vocês poderiam dizer quantas músicas diferentes João poderia compor escolhendo 5 notas (e 5 toques)?*
Desafio! *Agora vocês são os compositores. O desafio é determinar quantas músicas diferentes vocês podem tocar usando 3 notas diferentes (e 3 toques) escolhida entre as 8 do xilofone.*

Mais uma vez, era preciso verificar a funcionalidade das atividades. Então, o Ciclo 3 contou com dois grupos de participantes. O primeiro deles era composto por vinte alunas do 6º período do Curso de Pedagogia da Universidade Bandeirante de São Paulo. As alunas da Pedagogia trabalharam com as Atividades em dois encontros, com duas horas cada um. Escolhemos este grupo para aplicar as atividades, para verificar como seria o desenvolvimento da atividade por um público sem formação específica em Matemática.

O segundo grupo foi uma turma do 6Aº ano do ensino fundamental II, que tinha as mesmas características do grupo que participou do processo experimental que será analisado. Essa turma era composta por vinte e seis alunos com faixa etária de 11 a 13 anos. Destes alunos, onze são diagnosticados com Transtorno do Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH), um aluno com Síndrome de Asperger, um com Dislexia, um com Transtorno Invasivo do Comportamento, um aluno com Síndrome de Irlen. Para o desenvolvimento das atividades, foram feitos três encontros de uma hora cada um.

Estes dois grupos receberam as mesmas Atividades, entretanto trabalharam com instrumentos diferentes. As alunas da Pedagogia, assim como os participantes do Ciclo 1 receberam um xilofone de madeira (Figura 6) já os alunos do 6º ano baixaram no dispositivo móvel um aplicativo com o xilofone (Figura 7). Ambos os grupos trabalharam em duplas.

Figura 7 – Imagem do xilofone no dispositivo móvel

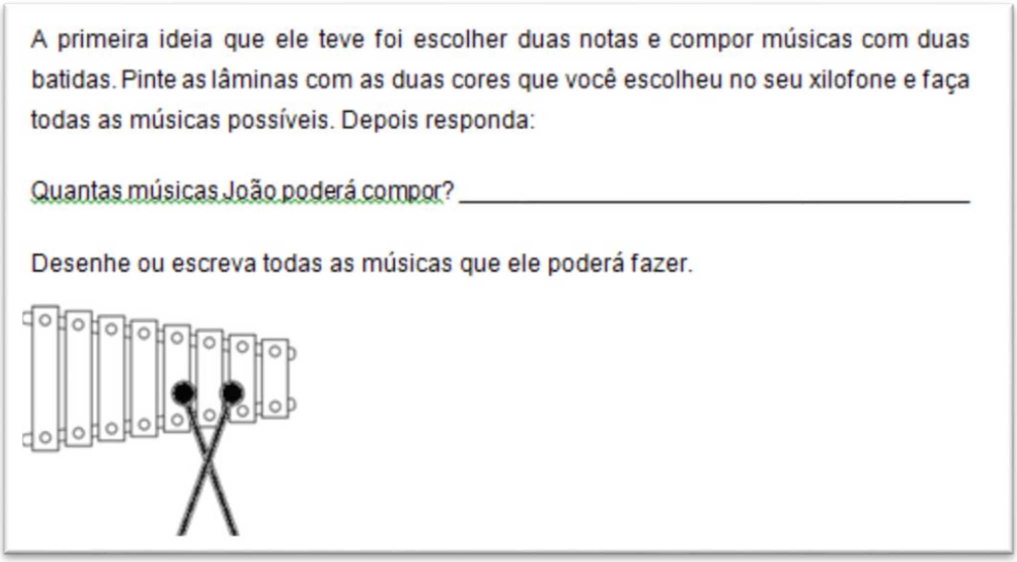
Fonte: acervo pessoal

Mesmo trabalhando com grupos diferentes, observamos que a postura diante das atividades e do instrumento foi bem similar. Os participantes precisaram de um tempo para “brincar” com o instrumento antes de começarem a realizar as atividades. Durante a aplicação, percebemos que ainda era necessário melhorar as atividades, pois os participantes ainda manifestaram dúvidas nos enunciados. Eles não conseguiam compreender o que estava sendo pedido sem a presença do professor/pesquisador, não entendiam o que eram os dois toques, por exemplo, mencionados na atividade, ou pensavam que poderiam tocar duas notas ao mesmo tempo. Observamos também que eles não conseguiam terminar as atividades propostas. Além disso, era preciso fazer com que as atividades ficassem mais objetivas, pois de acordo com Orjales (2007), ao se trabalhar com crianças com TDAH é preciso que as atividades sejam curtas para que elas consigam terminar e se sintam capazes. Smith (2008) considera também que é importante ter atividades bem direcionadas e que possam ser concluídas em um tempo menor.

A primeira providência foi reestruturar a organização das atividades. O novo conjunto de atividades foi reorganizado para ser realizado em quatro sessões e, com isso, descartamos o desafio.

Outra modificação que realizamos foi no *layout* das atividades. Em relação a isso, inserimos em cada item das atividades o desenho de um xilofone, para que os alunos pintassem as notas que escolhiam para resolver aquele item (Figura 8). Ao inserirmos esse desenho, acreditávamos que poderia auxiliar os alunos durante a construção das listas de possibilidades.

Figura 8 – Novo layout das atividades com a imagem do xilofone



A primeira ideia que ele teve foi escolher duas notas e compor músicas com duas batidas. Pinte as lâminas com as duas cores que você escolheu no seu xilofone e faça todas as músicas possíveis. Depois responda:

Quantas músicas João poderá compor? ____________________________

Desenhe ou escreva todas as músicas que ele poderá fazer.

Fonte: acervo da pesquisa

A versão completa das atividades testadas neste ciclo pode ser visualizada no Apêndice B.

3.2.1.3 Ciclo 4 – Terceiro Teste das Atividades

Após o redesenho do Conjunto de Atividades, era preciso realizar uma nova aplicação com o intuito de verificar se as alterações feitas seriam suficientes para que os alunos conseguissem resolver as atividades propostas no período previsto para cada uma das sessões. Para aplicar esse Conjunto de Atividades, selecionamos uma turma de 7º ano do ensino fundamental.

Essa turma, na ocasião, contava com dezoito alunos com idades entre 12 a 14 anos, dentre os quais nove são diagnosticados com Transtorno do Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH) e um aluno com Dislexia. O grupo era bem falante e participativo.

Antes de iniciar as tarefas com os alunos, eles foram orientados a baixar o aplicativo xilofone que tivesse oito lâminas de cores diferentes em seus *smartphones* ou *tablets*.

Para a realização do Conjunto de Atividades, os alunos organizaram-se livremente em duplas ou em trios e foram orientados a agruparem-se de forma que pelo menos um membro da dupla ou do trio tivesse o aplicativo no seu dispositivo móvel. Para o desenvolvimento deste estudo, prevíamos quatro encontros uma vez por semana de uma hora cada.

A dinâmica dos encontros foi à mesma, exceto no primeiro. Iniciávamos os encontros retomando o que havíamos feito no anterior e, após esse momento, liamos a estória que estava na Atividade proposta para a sessão. Ao final, realizávamos uma discussão com o intuito de socializarmos as estratégias utilizadas pelas duplas para determinarem as respostas e também para validar as regras encontradas. É importante pontuar que essa maneira de conduzir os encontros foi diferente das aplicações que aconteceram nos Ciclo 2 e 3, pois nas aplicações anteriores só realizávamos a discussão quando toda a atividade estivesse resolvida. Acreditávamos que essa mudança poderia facilitar o desenvolvimento do Conjunto de Atividades, pois a socialização de estratégias, dúvidas e argumentações poderia colaborar para a realização das Atividades posteriores.

A estrutura das quatro Atividades não variava significativamente. Cada uma delas era composta de 4 a 5 cinco itens, sendo que nos três primeiros os alunos deveriam determinar o número de músicas feitas e apresentar todas as possibilidades. Em seguida, era solicitado que os alunos escrevessem uma regra para aquela situação (Apêndice C). Em algumas atividades, solicitávamos que eles usassem esta regra para determinar o número de músicas para certa quantidade notas e batidas. Neste caso, a proposta envolvia, geralmente, uma grande quantidade de notas.

Começamos o primeiro encontro entregando a Atividade 1 impressa e em seguida a pesquisadora leu a estória para eles:

> *João adora música e por isso ganhou de sua mãe um xilofone. Seu xilofone é composto por 8 lâminas (notas). Cada uma delas tem uma cor diferente e um som diferente e, batendo nelas (tocando), João pode compor várias músicas. Você vai ser o músico agora e fazer algumas experiências que João imaginou. A primeira ideia que ele teve foi escolher duas notas e compor músicas com duas batidas.*

Ao término da leitura, chamamos a atenção para alguns pontos importantes para o desenvolvimento das atividades. A primeira delas era que eles deveriam colorir as lâminas do xilofone (impresso) com as cores escolhidas; além disso, era necessário escrever as músicas que foram criadas com as notas escolhidas. Na sequência, realizaremos algumas considerações sobre as respostas encontradas no Conjunto de Atividades por nossos alunos.

Iniciamos nossas considerações pelos registros encontrados nos primeiros itens de cada atividade, pois a forma de representar as músicas compostas foi a mesma em todas elas. Nesses itens, os alunos deveriam determinar o número de músicas feitas a partir de quantidade de notas e batidas estabelecidas nas atividades.

Os alunos determinaram o número de músicas feitas a partir de seus registros de possibilidades. Na verdade, eles listaram todas as músicas, o que já era esperado, pois Azevedo e Borba (2013) apontam que uma das estratégias usadas é a listagem de possibilidades.

Os registros das duplas apresentavam características distintas, dependo dos acordos feitos entre os alunos de cada dupla, ou da forma como o xilofone era exibido na tela do dispositivo móvel. Alguns alunos nomearam as lâminas com letras (Figura 9a), outros alunos escreviam os nomes das cores das lâminas escolhidas (Figura 9b) e outros, ainda, faziam uma lista de possibilidades usando as cores escolhidas (Figura 9c).

Figura 9 – Diferentes registros de possibilidades

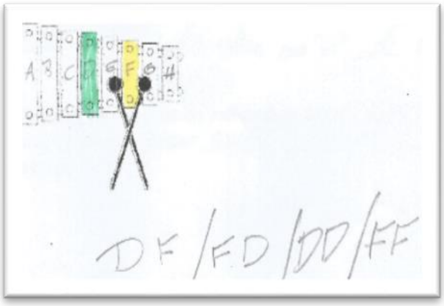


Figura 9a

Figura 9b

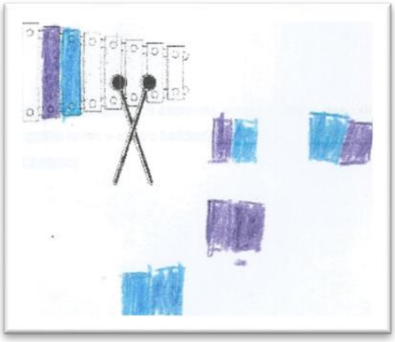


Figura 9c

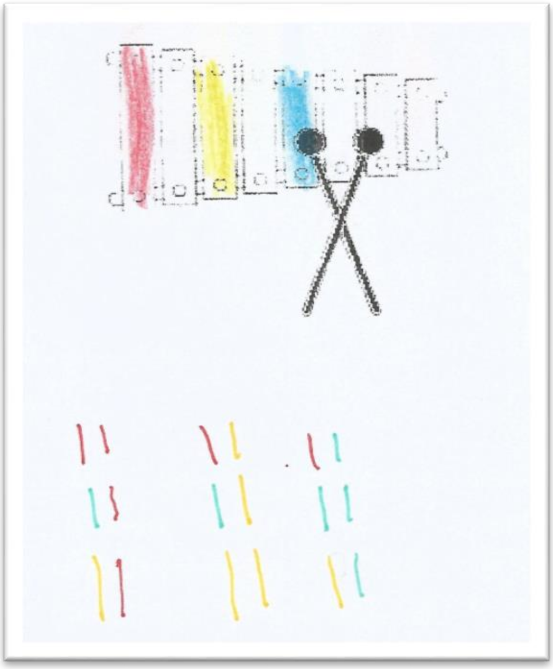
Fonte: acervo pessoal

Em relação à forma de organização das listas de músicas, alguns alunos não deixaram explícito, em seus registros, o critério usado para organizá-las. Entretanto, Azevedo e Borba (2013) apresentam que os alunos que fazem a listagem de forma organizada e sistemática podem chegar à generalização mais rapidamente. Observamos, em nosso trabalho, que a maioria dos alunos, independentemente da sistemática que empregaram para organizar suas listas, expressaram suas generalizações mesmo antes que as ideias fossem socializadas. A título de exemplo, nas Figuras 10 e 11 apresentamos as representações de dois alunos.

Figura 10 – Representação do Luís

Fonte: acervo da pesquisa

Figura 11 – Representação do Léo



Fonte: acervo da pesquisa

Os alunos Luís (Figura 10) e Léo (Figura 11) elaboraram suas listas de possibilidades com critérios diferentes. O aluno Luís não apresenta de forma sistemática suas músicas, diferente do aluno Leo. O aluno Luís representa suas composições por meio de uma sequência de letras e as separa por barras. Já O aluno Leo, para escrever suas músicas, fixa inicialmente uma nota (cor) na primeira posição e escreve todas as possibilidades de músicas obedecendo a esse critério, repetindo esse procedimento para as demais notas.

Cabe destacar, nesse momento, que apesar de empregarem procedimentos distintos para a elaboração das listas, ambos os alunos tiveram sucesso ao expressar uma regra para determinar o número de músicas em cada uma das situações propostas. No decorrer deste texto, apresentaremos indícios que atestam tal fato.

O desenvolvimento do Conjunto de Atividades aconteceu de forma tranquila, os alunos conseguiram fazer as duas primeiras atividades bastando um encontro cada uma. Entretanto, as Atividade 3 e 4 necessitaram de 2 encontros cada uma.

Na Atividade 3, muitos alunos começaram a responder os itens sem levar em consideração o fato de que Marcos, nosso personagem, não gostava de repetir notas. Muitas duplas só observaram este fato no meio da Atividade, sendo necessário voltar aos itens anteriores e observar quais respostas eram válidas.

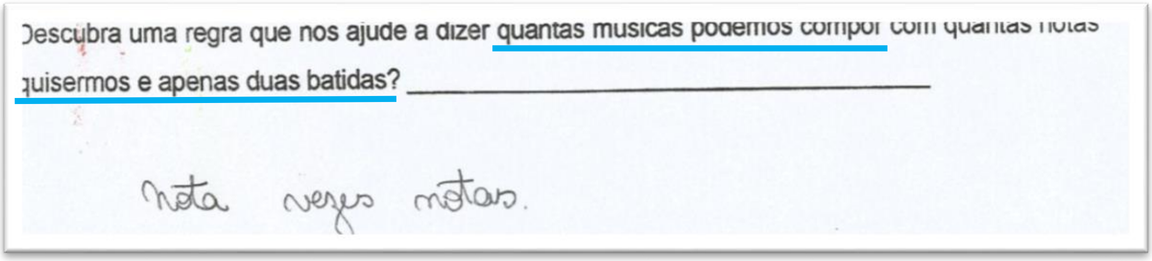
Na Atividade 4, inicialmente os alunos leram os itens e já responderam que a regra seria a mesma encontrada na Atividade 3, pois não ponderaram que o número de batidas variava de acordo com o número de notas. Acreditamos que essa resposta se deu por só terem dois itens antes da generalização e tais itens eram bem semelhantes aos da Atividade 3.

Desse modo, oralmente solicitamos que os alunos, antes de escrever suas regras, registrassem quantas músicas seriam feitas com 4 notas e 4 batidas, lembrando que Marcos não repetia as notas em suas músicas. Esperávamos que ao inserir mais um item, eles conseguiriam perceber que o número de batidas variava de acordo com o número de notas escolhidas, e, portanto, a regra não era a mesma da Atividade 3. Após essa intervenção, eles perceberam que a regra não seria a mesma e que precisaram de um tempo maior para apresentar suas respostas. Com isso, não foi possível realizar a socialização das estratégias e a resposta naquele encontro.

No encontro seguinte, após retomarmos o que havia sido feito na semana anterior, os alunos passaram a discutir qual seria a regra para determinar o número de músicas naquela situação, em que o número de notas e batidas eram iguais e não havia possibilidade de repetição de notas.

Sobre os registros de generalização, também não houve variação nas apresentações das respostas dos alunos, pois em todas as atividades eles fizeram seus registros empregando a linguagem natural. Nas Figuras 12, 13 e 14 apresentamos as três maneiras que os alunos escreveram suas regras para a Atividade 1. Alguns alunos determinaram como regra “nota vezes notas” (Figura 12), outros escreveram “multiplicar o número de notas por ele mesmo” (Figura 13) e um único aluno apresentou como regra “número vezes ele mesmo” (Figura 14). Os alunos Luís e Leo escreveram suas regras conforme a Figura13.

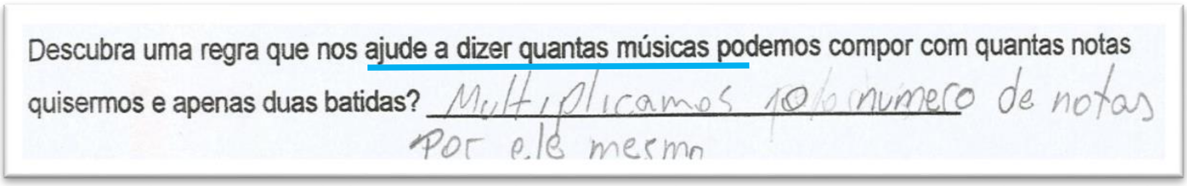
Figura 12 – Registro das generalizações Poliana e Rafaela


Descubra uma regra que nos ajude a dizer quantas musicas podemos compor com quantas notas quisermos e apenas duas batidas?

nota vezes notas.

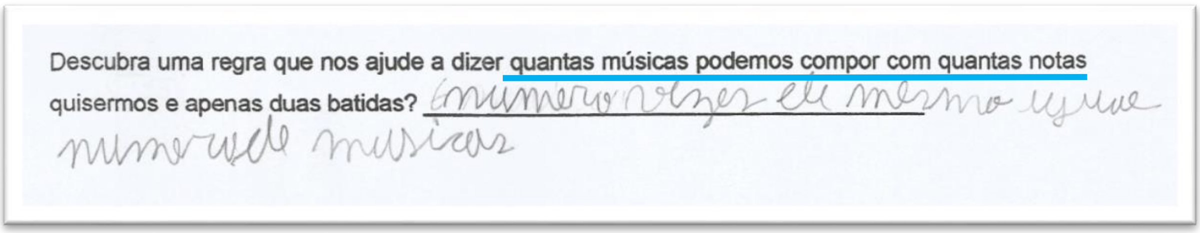
Fonte: acervo da pesquisa

Figura 13 – Registro das generalizações de Leo e Luís


Descubra uma regra que nos ajude a dizer quantas músicas podemos compor com quantas notas quisermos e apenas duas batidas? Multiplicamos o numero de notas por ele mesmo

Fonte: acervo da pesquisa

Figura 14 – Registro das generalizações de Vinicius e George


Descubra uma regra que nos ajude a dizer quantas músicas podemos compor com quantas notas quisermos e apenas duas batidas? numero vezes ele mesmo igual numero de musicas

Fonte: acervo da pesquisa

Apesar das diferentes maneiras que os alunos escreveram suas regras, todos eles apresentaram uma resposta válida. Observando as ações e os discursos dos alunos ao realizar as atividades e considerando as figuras apresentadas, temos indícios do estilo de pensamento algébrico caracterizado por Radford (2001, 2010) como *contextual*. Em particular, em relação às regras apresentadas pelos alunos, destacamos o emprego de elementos da própria atividade como “notas” e “batidas”, e as ações que devem ser feitas para determinar quantas músicas podem ser criadas, como “vezes” e “multiplicar”. Essa forma de representar as regras foi encontrada nas Atividades 2, 3 e 4. Observamos que em todas as respostas é possível perceber um índice de indeterminação, pois a palavra *notas* representa o objeto indeterminado que, no nosso caso, são os números de notas usados para compor a música.

Destacamos abaixo a resposta dada pelo aluno Vinicius (Figura 15). Percebemos que nas Atividades 1 (Figura 15a) e 2 (Figura 15b), sua maneira de escrever foi diferente dos demais. Essa escrita também apresenta características do estilo de pensamento algébrico contextual. Contudo, é importante pontuar que o índice de indeterminação apresentado nas regras que ele escreveu nos faz pensar que ele está em uma camada de significação diferente dos outros, algo compreendido entre os estilos contextual e simbólico. A forma que ele descreve a regra é mais geral. Podemos observar que ele não cita elementos dos enunciados das atividades ao descrever sua regra.

Figura 15 – Registos de generalização do aluno Vinicius

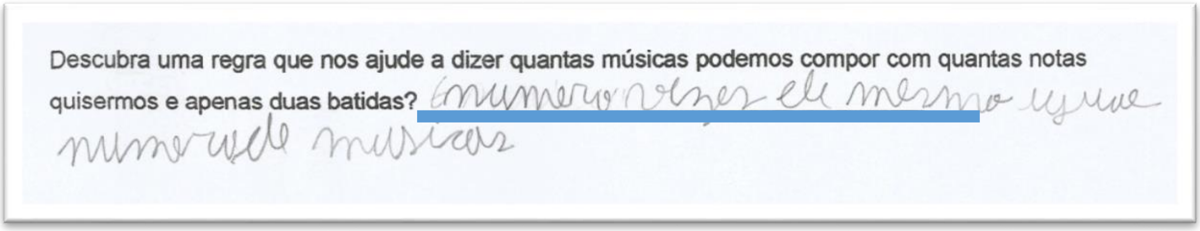

Descubra uma regra que nos ajude a dizer quantas músicas podemos compor com quantas notas quisermos e apenas duas batidas? o numero vezes ele mesmo é igual numero de musicas

Figura15a

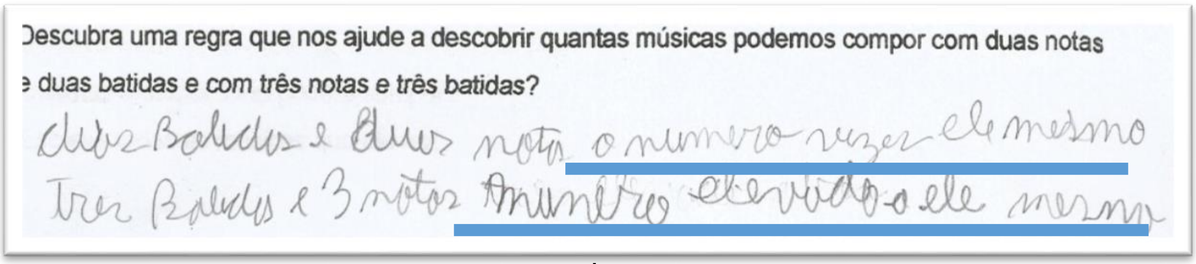

Descubra uma regra que nos ajude a descobrir quantas músicas podemos compor com duas notas e duas batidas e com três notas e três batidas?
duas Batidas e duas notas o numero vezes ele mesmo
Tres Batidas e 3 notas numero elevado o ele mesmo

Figura 15b

Fonte: acervo pessoal

Refletindo sobre as estratégias empregadas pelos alunos e a proposta de Radford (2001, 2009, 2010a, b), que apresenta três estilos do pensamento algébrico, o *factual*, o *contextual* e o *simbólico*, consideramos que as listagens de músicas feitas pelos alunos os direcionam ao estilo do pensamento algébrico *factual*. Apesar de não utilizarem números, os alunos usam artifícios concretos para determinar as respostas dos itens.

Após essa aplicação, observamos que os alunos conseguiam compreender a proposta de cada Atividade, além disso, o tempo determinado era suficiente para que eles conseguissem realizar as atividades.

Outro fator que chamou muito a nossa atenção foi o fato do uso dos dispositivos móveis durante a realização das Atividades. Inicialmente, os alunos demonstraram grande satisfação em utilizar tal recurso. Quando conversamos com eles e dissemos que em algumas aulas eles deveriam trazer seus *smartphones* ou tablets, eles ficaram muito eufóricos e muitos acreditavam que não trabalharíamos com Matemática. Acreditamos que o emprego do dispositivo móvel durante a aula trouxe mais motivação para a realização do Conjunto de Atividades. Observamos também que, nos dois primeiros encontros, os alunos utilizaram bastante os dispositivos, entretanto nas Atividades 3 e 4 a utilização foi menor, mais todas as vezes que eles tinham dúvidas sobre as músicas que estavam compondo ou queriam demonstrar como chegaram nas respostas usavam o xilofone.

Ao concluirmos o trabalho com o 7º ano e após realizar os pequenos ajustes nas atividades, acreditávamos que estávamos prontas para iniciarmos nosso “Estudo Final”. Desta forma, no próximo capítulo, apresentaremos nossa descrição e análise de dados.

CAPÍTULO 4

ESTUDO PRINCIPAL

Nesse capitulo, apresentamos os sujeitos que participaram da última fase, denominada estudo final, bem como descrevemos suas características. Contaremos como os alunos desenvolveram as quatro atividades que elaboramos e como eles utilizaram o dispositivo móvel. Nossas análises apontam ainda os estilos de pensamento algébrico, sob a perspectiva de Radford (2011), que emergem dos discursos, das ações e dos registros dos alunos.

4.1 OS PARTICIPANTES

Na última fase da pesquisa, trabalhamos com uma turma de 6º ano, que denominamos 6ºB. Ela é composta por dezoito alunos. Desse universo, temos nove alunos que apresentam laudo de TDAH, dois alunos têm Dislexia, um aluno tem Síndrome de Irlen e outro tem Hemiparesia e TDAH. Essa turma é bem-falante, gosta muito de atividades em grupos e participa ativamente das aulas.

Inicialmente, conversamos com os alunos a respeito do trabalho que seria desenvolvido. Explicamos que eles seriam filmados (todos os alunos receberam o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e que as resoluções das atividades seriam recolhidas. Combinamos que todas as terças-feiras eles deveriam trazer para a aula de Matemática: lápis de cor, caneta hidrocor, os *smartphones* ou tabletes com o aplicativo do xilofone. Os alunos sugeriram trazer um fone de ouvido, pois assim seria melhor para eles ouvirem o que estavam tocando e não teria tanto barulho externo.

A pesquisa foi desenvolvida durante as aulas de Matemática, pois assim toda a turma poderia participar. Os alunos se dividiram, livremente, em duplas. No total, foram formadas nove duplas. Entretanto, participantes da pesquisa foram oito duplas, já que um aluno não entregou o termo de consentimento livre esclarecido assinado pelos pais. No quadro 2 apresentamos as características de cada aluno que participou deste estudo incluindo o diagnóstico apresentado pela família. Não iremos identificá-los com o intuito de preservar sua identidade.

QUADRO 2 – Características dos alunos do 6ºB

Aluno	Diagnóstico apresentado pela família	Características
Aluno 1	Não apresentou o diagnóstico	Participativo, tem uma fala bem baixinha. É bem prestativo e um pouco tímido. Gosta muito de participar durante as aulas. Tem dificuldades em interpretar textos longos.
Aluno 2	TDAH	Calado, ressabiado, muito desconfiado. Tem baixa autoestima. Distrai-se com muita facilidade e é muito desorganizado.
Aluno 3	TDAH e Distúrbio do processamento auditivo	Falante e bem agitado e por isso não consegue permanecer sentado por muito tempo. É bem sociável e realiza todas as atividades solicitadas. Tem dificuldades em exercícios de interpretação e muitas vezes não consegue compreender corretamente o que falado.
Aluno 4	TDAH	É um aluno de voz bem baixa e muito educado. Apresenta uma certa timidez, porém sempre que solicitado participa das atividades em conjunto, deixando suas contribuições. Além disso, distrai facilmente com outras coisas.
Aluno 5	Dislexia	Participativo, sociável. Apresenta dificuldades nas cópias do quadro. Em seu texto observamos muitos erros de ortografia, principalmente troca de letras. Gosta muito de ajudar suas colegas. Realizar as atividades com muito empenho.
Aluno 6	Síndrome de Irlen	Agitado, muito entrosado e bem bagunceiro. Demora para realizar as atividades e muitas vezes faz pelas metades. Seu material quase sempre está incompleto bem como as atividades que ele realiza.
Aluno 7	TDAH	Quieto, de voz bem baixinha. É muito esforçado e bem lento para realizar as atividades. Tem muita dificuldade na compreensão das atividades e solicita nossa ajuda durante toda a aula.
Aluno 8	Não apresentou o diagnóstico	Falante, que gosta muito de contar casos de sua vida e sempre tem uma pergunta para ser feita sobre diversos assuntos incluindo o da aula.
Aluno 9	Dislexia	Calado, apresenta muita dificuldade de leitura e interpretação. Em matemática observamos que tem dificuldade em realizar as operações de multiplicação e divisão.
Aluno 10	Não apresentou o diagnóstico	Agitado, falante. Apresenta muita dificuldade para fazer as tarefas pedidas e de manter o material organizado. Gosta muito de ler durante a aula.

Aluno 11	TDAH	Questionador, não cumpre os combinados da sala, suas atividades muitas vezes são incompletas. Não realiza cópia do quadro e apresenta muita dificuldade para ler e escrever. Apresenta um comportamento opositor. Entretanto se você conseguir convencê-lo a fazer as atividades propostas terá uma surpresa, pois seu raciocínio é muito rápido.
Aluno 12	TDAH e Hemiparesia	Simpático. Sempre realiza as atividades pedidas, porém gasta um tempo maior que a turma. Tem dificuldade em concentrar principalmente quando a turma está mais agitada. Em alguns momentos parece se desconectar do ambiente, sendo necessário chamar sua atenção quase que ao pé do ouvido. Apesar de suas dificuldades não gosta de ser ajudado.
Aluno 13	Não apresentou o diagnóstico	Apresenta muita dificuldade, não tem domínio das quatro operações, sua leitura é muito silabada. Quase não conversa durante a aula.
Aluno 14	TDAH	Confuso, com problemas na fala e de organização. Tem dificuldade em socialização e interação com os colegas. Questiona tudo que é solicitado.
Aluno 15	TDAH	Comprometido, faz com certa rapidez as atividades solicitadas. É bem disperso e costuma "trocar" as operações, apresenta um pouco de dificuldade em exercícios de que exigem interpretação de texto.
Aluno 16	Não apresentou o diagnóstico	Agitado, não consegue ficar muito tempo sentado e tem a necessidade de se mostrar. Tem uma mania de colocar objetos na boca, como lápis, caneta, régua entre outros. É bem esquecido.
Aluno 17	TDAH	Simpático, muito falante e bem envolvido com as atividades. Tem mania de levantar da carteira de tempos em tempos.

Fonte: acervo da pesquisa

A coleta dos dados foi realizada por vídeo-gravação. Usamos seis câmeras, dispostas da seguinte maneira: uma ficou no fundo da sala para captar os momentos de socialização, outra na frente da sala para gravar as reações dos alunos durante todo o desenvolvimento do trabalho e, por fim, as quatro câmeras restantes foram distribuídas entre quatro duplas, que foram selecionadas de forma a contemplar as diferentes necessidades educacionais presentes nesse grupo.

Desse universo, selecionamos uma dupla, Manuela e Omi, para nos ajudar a contar como foi o desenvolvimento da atividade. Escolhemos essa dupla pelo fato de que os dois participaram de todos os encontros, possibilitando, assim, uma análise do desenvolvimento do pensamento algébrico apresentado por eles. A identificação dos alunos é feita por meio de pseudônimos que eles mesmos escolheram.

Conforme apresentado anteriormente, o processo empírico foi programado para quatro encontros, com duração de 1h e 40min (duas horas-aula), divididos em três momentos. Inicialmente, lembrávamos o que havíamos feito no encontro anterior, em seguida, apresentávamos a atividade que seria desenvolvida naquele encontro e, por último, realizamos uma discussão com todo o grupo sobre os itens realizados. A seguir, apresentaremos a descrição e análise da atividade 1.

4.2 ATIVIDADE 1

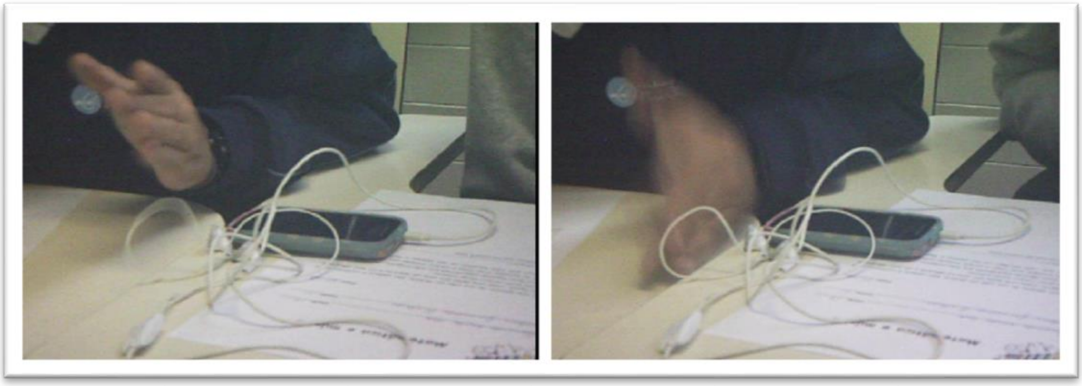
A primeira atividade apresentada aos alunos era composta por cinco itens (ver Apêndice C). Nos quatro primeiros, os alunos deveriam compor músicas escolhendo duas, três, quatro ou cinco notas (lâminas) do xilofone, mas em todos eles o número de batidas permanecia o mesmo (duas batidas). No último item, os alunos deveriam escrever uma expressão que determinasse o número de músicas feitas a partir de determinado número de notas e duas batidas.

Após entregarmos a atividade impressa, fizemos uma leitura da primeira folha da Atividade 1; em seguida, explicamos como seria a atividade e combinamos algumas regras. Por exemplo, que eles deveriam escolher as cores das lâminas no xilofone (recurso móvel) e retratar sua escolha na imagem do xilofone impresso na atividade. Depois, destacamos que era importante que eles representarem as músicas compostas em cada item para responder as questões e, por último, conversamos sobre as batidas e toques nas lâminas.

Ao iniciar a atividade, Omi ainda estava confuso com a ideia de "duas batidas" e disse para Manuela e para a professora que, então, só é possível fazer uma música e Manuela deu a seguinte explicação:

> **Omi**: *Professora, só dá para fazer uma música*.
> **Manuela**: *Tam nam, nam tam, tam tam, nam nam, são quatro* (Batendo uma das mãos na mesa acompanhando o som que imita as notas conforme Figura 16).

Figura 16 – Manuela toca o xilofone imaginário

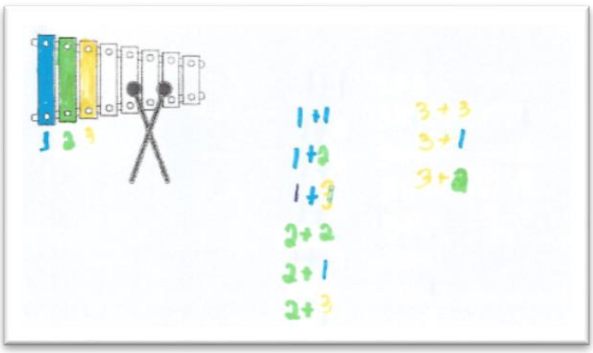


Fonte: acervo da pesquisa

Podemos observar na fala de Manuela sua relação com a música. Encontramos, nesse trecho, elementos de sintonicidade corporal como o proposto por Papert (1980). Para mostrar ao seu parceiro quantas músicas poderiam ser compostas no primeiro item, Manuela utilizou uma representação gestual e sonora.

Verificamos que a dupla respondeu todos os itens da atividade, mas não registraram as diferentes possibilidades no papel. Eles testaram no xilofone as músicas possíveis e escreveram na folha apenas quantas músicas poderiam ser feitas. Ao considerarem as atividades concluídas, chamaram a professora, que percebeu que eles não haviam registrado na folha as músicas possíveis. Sendo assim, ela mostrou o enunciado da atividade e pediu para que escrevessem as músicas que foram feitas. Naquele momento, eles negociaram a forma de representação de suas músicas. Para Omi, era mais fácil numerar as lâminas e registrar as músicas por meio dos números coloridos (representando as cores escolhidas) como no exemplo apresentado na Figura 17.

Figura 17 – Representação da lista de possibilidades



Fonte: acervo da pesquisa

Eles utilizaram esse tipo de registro em todas as atividades desenvolvidas. É possível perceber, desde o início, uma forma bem organizada de representar as músicas. De acordo com a Figura17, percebemos que eles fixaram o número um na primeira casa e, em seguida, combinaram os números dois e três. Ao terminarem as possibilidades, trocaram o número que ocupa a primeira posição por outro e repetiram o mesmo procedimento até todos os números terem ocupado a primeira posição. Pessoa e Santos (2011) apontam que quando há uma organização e o esgotamento de todas as possibilidades, os alunos tendem a resolver a atividade com mais facilidade.

Manuela e Omi realizaram com sucesso os quatro primeiros itens e partiram para o último item cujo enunciado era o seguinte:

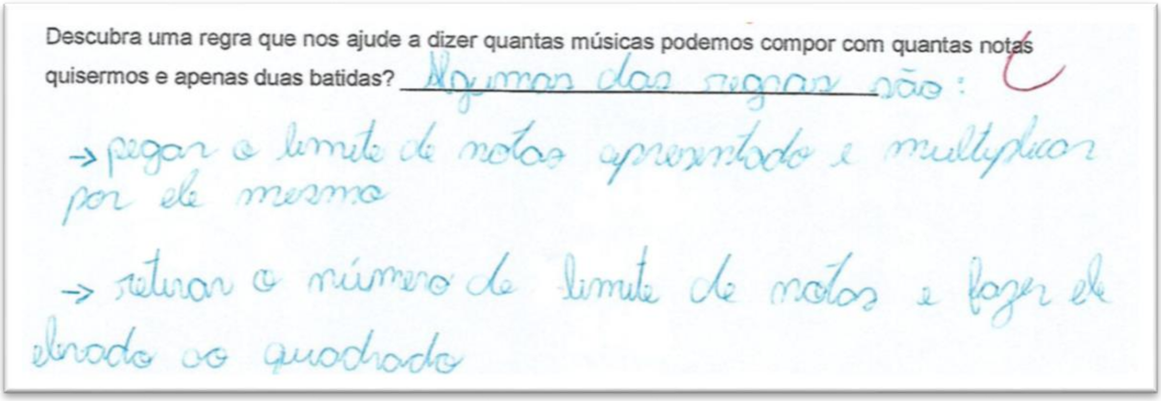
Descubra uma regra que nos ajude a dizer quantas músicas podemos compor com quantas notas quisermos e apenas duas batidas?

Nesse item, algumas duplas tiveram dúvidas, pois não conseguiram compreender o que seria *regra.* Com Manuela e Omi não foi diferente e, por isso, eles chamaram a professora.

> **Manuela**: *Aqui é para usar as oito?*
> **Professora**: *Não é assim. Por exemplo, o Túlio faltou hoje. Como é que você vai explicar para ele, por telefone, como foi a atividade hoje? Será que toda vez que eu pedir para dizer quantas músicas você vai ter que fazer isso aqui?* (A professora aponta para as listas que ela havia feito na atividade anterior)
> **Manuela**: *Notas elevado a dois*.
> **Professora**: *Então, escreve isso (*a professora se refere a fala anterior de Manuela) *pra mim. Essa regra que você acha que é, vale para todas as outras*.

Percebemos que após a intervenção da professora, Manuela compreende o que pedia o exercício e oferece, oralmente, uma regra. No entanto, ao verificar a atividade impressa, vimos que a dupla registrou de forma diferente, conforme apresenta a Figura 18:

Figura 18 – Registro da regra da Atividade 1



Descubra uma regra que nos ajude a dizer quantas músicas podemos compor com quantas notas quisermos e apenas duas batidas? Algumas das regras são: C

→ pegar o limite de notas apresentado e multiplicar por ele mesmo

→ retirar o número de limite de notas e fazer ele elevado ao quadrado

Fonte: acervo da pesquisa

Nos registros de Manuela e Omi, percebemos que eles apresentaram duas expressões que representam a mesma situação. Representando o *limite de notas* pela letra *n*, a primeira expressão "*pegar o **limite de notas** apresentado e **multiplicar por ele mesmo**"* poderia ser escrita usando a linguagem Matemática como $n.n$. Já a segunda expressão *"retirar o número de **limite de notas** e **fazer elevado ao quadrado**"* poderia ser representada por n^2, que matematicamente é a mesma coisa de $n.n$.

Em nossas análises, consideramos que o termo *limite de notas* indica uma indeterminação na perspectiva de Radford (2011), pois o termo é usado para indicar uma quantidade qualquer de notas ou a quantidade escolhida de notas. Considerando que a indeterminação está atrelada a elementos da própria atividade e que Manuela e Omi apresentam uma expressão por meio da língua natural, acreditamos que a dupla está envolvida no estilo de pensamento algébrico contextual proposto por Radford (2001, 2006, 2010).

Ao perceber que boa parte da turma estava terminando a primeira atividade, a professora se organizou para realizar a socialização. Para isso, ela pediu a ajuda de dois voluntários: Jubileu e Manuela. Eles representariam as lâminas escolhidas do xilofone e, juntos, simulariam as possibilidades de músicas. Para isso, eles escolheram as cores dos chapéus[8] e seus colegas deveriam dizer quais músicas poderiam ser criadas. À medida que eles formavam as músicas, a pesquisadora registrava no quadro as possibilidades, conforme a Figura 19.

[8] Havia cinco chapéus de cada uma das cores das lâminas do xilofone.

Figura 19 – Socialização da atividade 1

Fonte: acervo da pesquisa

A partir dessa discussão com o grupo, a dupla Darth Vader e Jason percebeu que era possível compor mais músicas, pois eles não consideraram as composições onde as notas eram repetidas. Ao perceberem essa possibilidade, a dupla corrigiu suas atividades, acrescentando as músicas que faltavam.

Nos três primeiros itens, os alunos construíram junto com a professora a lista de possibilidades no quadro, mas no quarto item "*O desafio para você agora é responder quantas músicas João poderia compor escolhendo cinco notas e duas batidas?"* um dos alunos se manifestou antes mesmo da professora começar a desenvolver a lista de possibilidades no quadro.

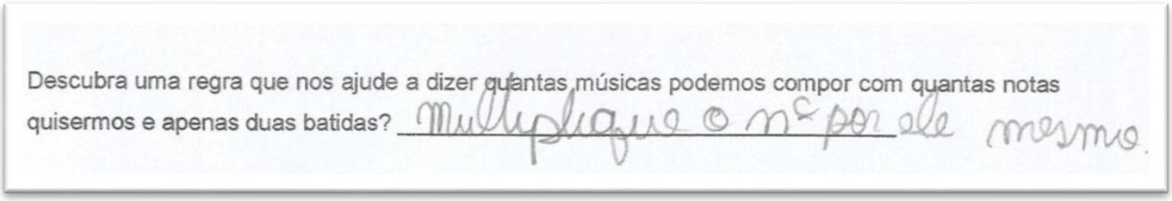
> **Professora**: *Na letra d eu tenho que fazer o quê? São 5 notas e....(*a professora é interrompida por um aluno)
> **Darth Vader**: *Cinco vezes cinco.*
> **Professora**: *O que é que tenho que fazer? Olha só o Darth Vader já me falou uma coisa. O que eu tenho que fazer Darth Vader?*
> **Darth Vader**: *Cinco vezes cinco.*

Achando que Darth Vader havia falado muito baixo, a professora repete em voz alta o que ele havia falado e ainda questiona se todos concordavam. Naquele momento, Manuela justificou o procedimento dito por Darth Vader "*por que o máximo de batidas em cada é dois, cinco elevado a dois*", substituindo o termo "*limite de notas" que usou em seus registros por "máximo de batidas".* A professora começou, então, a discussão do último item:

Descubra uma regra que nos ajude a dizer quantas músicas podemos compor com quantas notas quisermos e apenas duas batidas? ___________________

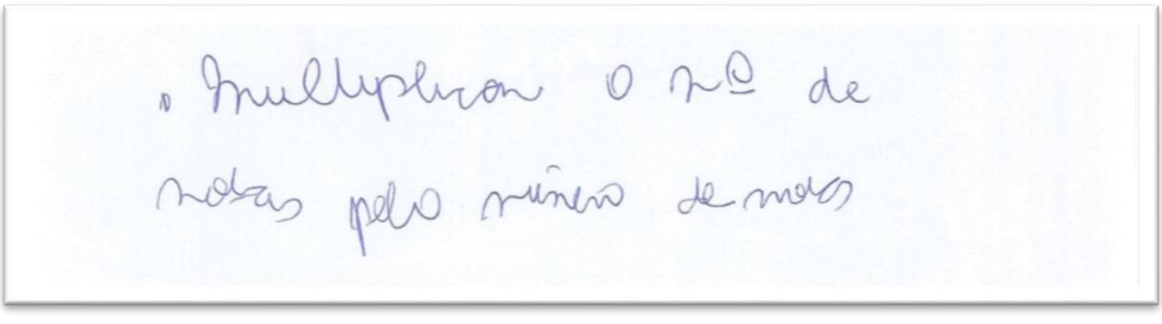
Ao perguntar sobre a regra, os alunos prontamente disseram suas expressões como, por exemplo, Jubileu que disse "*número vezes número",* ou o Jason *"[...] multiplicar o número de notas pelo número de notas"*. Apesar desses alunos não terem estudado álgebra, eles conseguiram expressar a indeterminação citada por Radford (2011) em suas regras orais e escritas (Figuras 20 e 21). Constatamos isso por meio das palavras *"números"* ou *"número de notas"*, pois elas indicam que poderá ser usada uma quantidade qualquer de notas. Diante de todo percurso apresentado pelos alunos durante a realização da atividade, principalmente no momento da socialização, o estilo de pensamento algébrico envolvido nessa atividade apresenta características do *contextual*.

Figura 20 – Registro da regra da atividade 1 por Bartolomeu


Descubra uma regra que nos ajude a dizer quantas músicas podemos compor com quantas notas quisermos e apenas duas batidas? Multiplique o nº por ele mesmo.

Fonte: acervo da pesquisa

Figura 21 – Registro da regra da atividade 1 Jubileu


Multiplicar o nº de notas pelo número de notas

Fonte: acervo da pesquisa

Além disso, observamos que os alunos expressaram a regra por meio de palavras e que, em muitas regras, encontramos elementos relacionados aos exercícios como na regra representada na Figura 21, como a palavra *notas*.

4.2.1Síntese do primeiro encontro

Nesse primeiro encontro, observamos que os alunos conseguiram realizar a atividade proposta dentro do tempo estabelecido; além disso, o dispositivo móvel (xilofone) foi utilizado pelas duplas durante toda a atividade. A participação das duplas foi efetiva durante toda a socialização, pois procuravam dizer suas composições e ficavam atentos para verificar se não estavam repetindo possibilidades.

Ao final dessa etapa, percebemos que deveríamos realizar algumas modificações na dinâmica da socialização. Uma dupla não havia conseguido escrever a regra geral. Acreditamos que um dos fatores que contribuiu para isso é que esses alunos não haviam percebido que as notas poderiam ser usadas mais de uma vez.

Com o intuito de oferecer aos alunos a oportunidade de rever suas regras em atividades futuras, achamos interessante dividir o momento da discussão em duas partes. Em um primeiro momento, debateríamos as questões que pedem para determinar o número de músicas com número de notas e batidas específicas. Após essa discussão com o grupo, os alunos teriam um tempo para escrever ou rever suas regras e, em seguida, compartilhariam essa regra com o grupo.

Outra decisão que tomamos foi em relação ao registro da regra. Nessa primeira atividade, a professora escreveu no quadro uma das expressões dita em voz alta, o que levou alguns dos alunos a corrigirem suas respostas. Para que os alunos não ficassem sugestionados a “criar” um único modelo, as “regras” passaram a ser somente verbalizadas, ficando livre a forma de registrá-las.

4.3 ATIVIDADE 2

Na semana seguinte, retomamos as atividades. Iniciamos o encontro recordando o que havíamos feito anteriormente. A professora perguntou sobre as músicas que foram compostas e a regra encontrada na atividade realizada na semana anterior para, assim, começar a Atividade 2.

Essa Atividade (ver Apêndice C) era composta por quatro itens, sendo que o primeiro e segundo itens solicitavam, respectivamente, que os alunos determinassem quantas músicas poderiam ser compostas com duas notas e duas batidas e três notas e três batidas. A questão três pedia que eles escrevessem uma regra que atendesse os dois primeiros exercícios e, por último, eles deveriam verificar o número de músicas feitas com quatro notas e quatro batidas utilizando a regra que eles criaram.

Para começar a fazer a atividade, Manuela e Omi discutiram sobre qual dispositivo móvel eles iriam usar, pois neste dia os dois alunos haviam levado seus aparelhos. Para isso, eles resolveram conferir os dois xilofones, a comparação começou pelas cores das lâminas. Ao fazer isso, perceberam que as cores não possuíam a mesma ordem e não conseguiam chegar a uma conclusão sobre qual xilofone iriam escolher. Após alguns minutos de discussão, Manuela optou por usar o aparelho de Omi. Após essa discussão, eles iniciaram a atividade, fizeram o primeiro exercício com certa rapidez e sem usar o xilofone. Acreditamos que eles resolveram rapidamente a primeira questão por ela ser idêntica à primeira questão da Atividade 1.

Manuela e Omi, então, partiram para o próximo exercício. Manuela começou a colorir o xilofone impresso na folha e observa "*peraí agora serão três batidas"*. Ela fica em silêncio e olhando fixo para um ponto e, de repente, diz a resposta "*nove*". Omi, ao ouvir Manuela, não a contesta, pois está convencido de que essa era a resposta. Contudo, essa resposta não está correta, pois com três notas e três batidas, João pode compor 27 músicas. Acreditamos que Manuela encontra essa resposta por ter raciocinado da mesma maneira que na Atividade 1, em que tínhamos sempre duas batidas. Convicta de estar certa, Manuela começa a fazer o registro das músicas e observa a dupla que está ao seu lado e em seguida chama seu parceiro.

> **Manuela***: Omi!!!!* (Ela fica olhando para cima, demonstrando estar pensando e contanto, ilustração 22).
> **Manuela***: Me empresta a caneta. Isso é três* (aponta para lista de possibilidades feita no exercício 2)
> **Omi***: Eu sei...*
> **Manuela***: Três notas e três batidas.*

Figura 22 – Manuela pensando

Fonte: acervo da pesquisa

Manuela fica, por um momento, sem muita ação, enquanto isso, Omi fica mexendo no celular. Manuela então começa a conversar com a dupla que está ao seu lado:

> **Manuela**: *Ouuu espera ai tá errado (referindo-se a solução da outra dupla) isso ai. Não é 15 ou é 15?* (ela fala isso olhando para a dupla que está do seu lado)... *É nove! ... É vinte sete! Não!... oh professora?*
> **Omi**: *Manuela olha aqui, a gente faz assim 1,2,3; 1,2,2* (Ele fica tocando no xilofone, Figura 23)

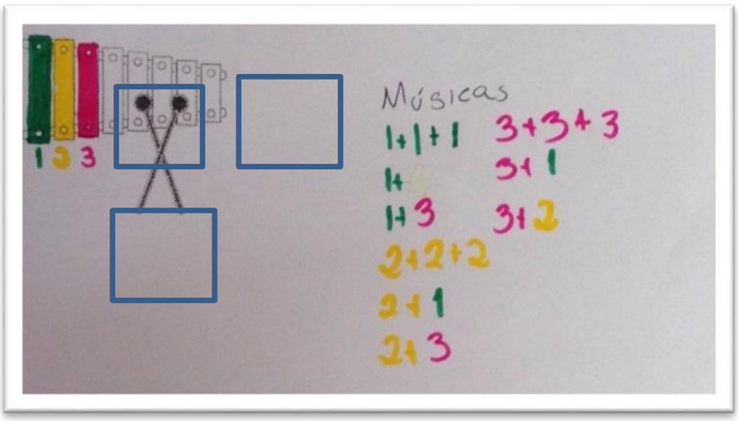
Figura 23 – Omi mostra suas músicas para Manuela

Fonte: acervo da pesquisa

Ao perceber a chegada da professora, Omi questiona:

> **Omi**: *Professora a gente errou?*
> **Manuela**: *Aqui são três não é?* (Referindo a cada uma das músicas que deveriam ser compostas por três batidas, ela aponta para a lista de possibilidades que haviam feito no item 2. Figura 24)

Figura 24 – Primeiros registros para o 2º item da atividade 2.



Fonte: acervo da pesquisa

Professora: *São três (*refere-se ao número de batidas*), então, por favor, corrijam e se precisar de outra folha é só me falar.*

Ao observar a Figura 24, podemos confirmar nossa hipótese inicial na qual Manuela estava pesando em duas batidas, principalmente, pelas partes destacadas, pois inicialmente ela só representa a combinação usando duas notas. Ela só acrescenta a terceira nota depois de conversar com a outra dupla. Manuela e Omi, então, começam a correção da atividade e a professora os observa trabalhar. Aproveitando que a docente estava perto, Manuela começa a conversar com ela sobre a atividade.

Manuela: *Ah professora! Já entendi: tem nove de cada, não é?* (referindo-se a quantidade de músicas que são feitas fixando uma cor na primeira posição).

Professora: *O que?*

Manuela: *Então, são 27 aqui, não é? (*se referindo a quantidade de músicas do exercício 2)

Professora: *Peraí, por que são 27?*

Manuela: *Porque são nove desse* (apontando para todas as músicas que começam com 1)

Professora: *Como assim nove desse, me explica melhor.*

Manuela: *Nove músicas de 1.* (ela se refere ao número 1 que está na primeira posição). *Não é 27?*

Manuela conclui que seriam nove músicas com a nota 1, pois ela já havia feito a lista de possibilidades para essa situação conforme podemos observar na Figura 25:

Figura 25 – Lista de possiblidades com a nota 1 na primeira posição

Fonte: acervo da pesquisa

Ao perceber que Manuela já havia compreendido a atividade, a professora solicita que ela termine de fazer seus registros e, caso tenha alguma dúvida, a chame. Enquanto isso, Omi toca todas as possiblidades de música no xilofone e ao contar em voz alta, após concluir suas músicas, inicia o registro.

A professora observa que muitas duplas já haviam feito os dois primeiros itens da atividade. Sendo assim, propõe a socialização dos resultados encontrados, antes de chegarem à regra.

Para a socialização, a professora chamou alguns voluntários para representar as lâminas (cores) escolhidas e, desse modo, construir com ela as possibilidades de música para cada item, como podemos ver nas Figuras 26 e 27. Na medida em que os alunos diziam as composições, ela registrava no quadro:

Figura 26 – Socialização com dois voluntários

Fonte: acervo da pesquisa

Figura 27 – Socialização com três voluntários

Fonte: acervo da pesquisa

Concluímos o primeiro item da Atividade e todos entenderam que era possível compor 4 músicas. No entanto, no segundo item houve algumas divergências. Ao questionar os alunos a quantidade de músicas que poderiam ser feitas com três notas e três batidas, obtivemos quatro respostas diferentes: 15, 18, 27 e 30. Iniciamos a “encenação” com os alunos e a professora registrou no quadro as possibilidades. Nesse momento, os alunos não se preocuparam em traçar uma estratégia para indicar as possibilidades e à medida que o número de músicas registradas foi aumentando, eles demonstraram dificuldade para apontar novas músicas.

Ao perceber que estava difícil indicar novas músicas, Manuela compartilhou sua estratégia de registro*:*

> **Manuela***: Eu primeiro fiz uma fileira de laranja.*
> **Professora**: *Vocês estão escutando o que a Manuela está falando? Ela, primeiro, fez uma fileira com o Laranja, na primeira casa.*
> **Manuela***: Aí, depois eu fui completando. Aí, depois eu fiz uma outra fileira com outra cor e depois a outra.*

Vale destacar que Manuela já sabia que para cada uma das cores que ocupasse a primeira casa, nove músicas poderiam ser tocadas, ou seja, fixando a cor da primeira casa, havia 3 cores possíveis para ocupar a segunda casa e 3 notas para a terceira casa. Observando a fala de Manuela, podemos perceber indícios do pensamento algébrico contextual.

Em determinado momento, tinham 25 possibilidades na lousa e Omi chama a atenção da classe apontando que são 27 músicas.

Os alunos passam a buscar as duas possibilidades que faltavam, porém, estavam tendo dificuldades. Após Jason localizar a vigésima sexta possibilidade, Manuela faz a seguinte observação:

> **Manuela:** *A última começa com laranja.*
> **Professora:** *Por quê?*
> **Manuela:** *Porque tem nove da rosa e nove da azul. Então, tem que ter nove da laranja também.*

A professora pede para que os alunos verifiquem se o que a Manuela falou está correto, e, imediatamente, eles confirmam que havia nove possibilidades com a cor rosa na primeira casa e nove possibilidades começando com a cor azul. Então, a professora questiona qual seria a última música a ser composta e, rapidamente, eles concluem a lista encontrando as 27 possibilidades.

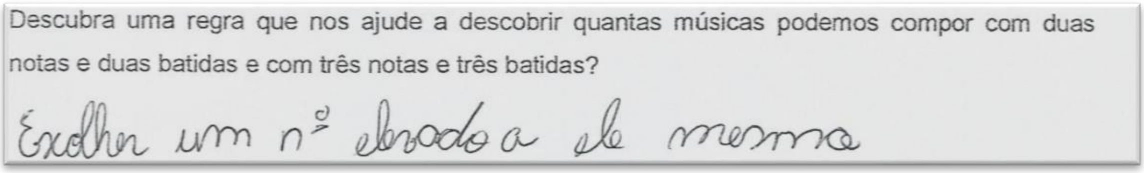
Ao finalizar os dois primeiros itens, a professora pede para que eles pensem no próximo.

Descubra uma regra que nos ajude a descobrir quantas músicas podemos compor com duas notas e duas batidas e com três notas e três batidas?

Manuela não espera a professora e responde: *"É! Tem que fazer assim: esse número elevado a ele mesmo, ou seja, três elevado a três é vinte e sete*". Porém, a professora não ouviu o que Manuela havia dito e segue pedindo para que os alunos observassem as duas primeiras questões para elaborar suas regras.

Observamos nos registros de Manuela, conforme Figura 28, que a regra escrita por ela é bem próxima da regra que ela havia falado.

Figura 28 – Registro da regra realizado por Manuela e Omi


Descubra uma regra que nos ajude a descobrir quantas músicas podemos compor com duas notas e duas batidas e com três notas e três batidas?
Escolher um nº elevado a ele mesmo

Fonte: acervo da pesquisa

Analisando o registro escrito de Manuela e Omi, percebemos que eles estabelecem relações entre notas e batidas, não se limitando a situações particulares, como nos itens um e dois da Atividade 2, o que garante uma generalização. No item três, os objetos são tratados de forma indeterminada, ou seja, são considerados para qualquer quantidade de *notas* e *batidas*.

Na resposta, a dupla utiliza a língua natural para expressar a indeterminação. Essa indeterminação é representada pela palavra *número*, que pode assumir o valor que eles quiserem. Apesar de Radford (2010) apontar que esses elementos (língua natural e a indeterminação) são características marcantes do pensamento algébrico *contextual*, acreditamos que a dupla esteja na transição entre o pensamento algébrico *contextual* e o *simbólico*. Se representamos a palavra *número* pela letra *n*, a expressão "*escolher um **nº elevado a ele mesmo***" poderia ser traduzida na expressão algébrica n^n.

No momento da socialização da regra, a professora pede para que os alunos apresentem suas respostas.

> **Manuela:** *retirar o número máximo de notas e fazer ele elevado a ele mesmo.*
> **Jason:** *Multiplicar o número de batida pelo número de notas e o resultado multiplicar pelo número de notas.*
> **Bartolomeu:** *multiplicar um número pelo número de batidas.*

> **Professora:** *Ao fazer isso (*se referindo à regra de Bartolomeu*) você vai achar as 27?* (ao falar isso a professora aponta para o item dois que estava feito no quadro).
> **Bartolomeu:** *Não*.

Percebemos que Manuela apresenta uma nova expressão, como ela já havia percebido que o número de notas e batidas eram iguais nos dois primeiros itens, ela enuncia "*retirar o número máximo de notas e fazer ele elevado a ele mesmo*", que nessa situação é uma regra válida para qualquer número de notas igual ao número de batidas. Nessa atividade, acreditamos ter evidência do que Radford (2010b) denomina processo de generalização, que transita por diferentes camadas de significação não hierárquicas, mas articuladas, permitindo raciocinar de forma geral.

Entretanto, o discurso de Jason expressa uma regra para a situação vivenciada somente no item dois da Atividade (quantas músicas João pode compor com três notas e três batidas). Ele não percebe que essa relação não é válida nem mesmo para o primeiro item. Esse comportamento Radford (2010b) define como indução ingênua, pois essa regra, induzida pelo item dois, só é válida apenas para esse caso particular. O mesmo é evidenciado na fala de Bartolomeu, pois ele apresenta uma regra que atende ao primeiro item (quantas músicas podem ser feitas com duas notas e duas batidas), mas não pode ser aplicada aos itens subsequentes.

Ao concluir as discussões, a professora pede para que todos registrem suas regras da maneira que achar melhor e que iniciem o próximo item.

Usando a regra que você escreveu, você consegue descobrir quantas músicas podemos compor com quatro notas e quatro batidas? ____ *Mostre como!*

Neste exercício, Omi fica em dúvida e questiona Manuela: *"é 4 elevado a 4 ou 4 vezes 4?"*. Manuela responde: "4 elevado 4". Contudo, ele ainda não compreende o que é para fazer e passa a observar o que Manuela está fazendo.

> **Omi***: Me ensina!*
> **Manuela***: Você vai fazer 4 x 4 e vai dar uma vez e você vai fazer 4 vezes o resultado de 4 x 4...*
> **Omi***: Ah! Então 4 x 4 é 16. 16 x 4 ,não é isso?*
> **Manuela***: (*Manuela balança a cabeça positivamente*) E assim por diante...*
> **Omi***: Até dar 4 (referindo-se ao número de vezes que você precisa multiplicar).*
> **Manuela***: Sim*

Vale ressaltar que Omi e Manuela, assim como outras duplas, conseguem resolver a atividade proposta utilizando a expressão geral em um caso particular de quatro notas e quatro batidas.

Terminamos esse encontro sem a socialização do quarto item da atividade.

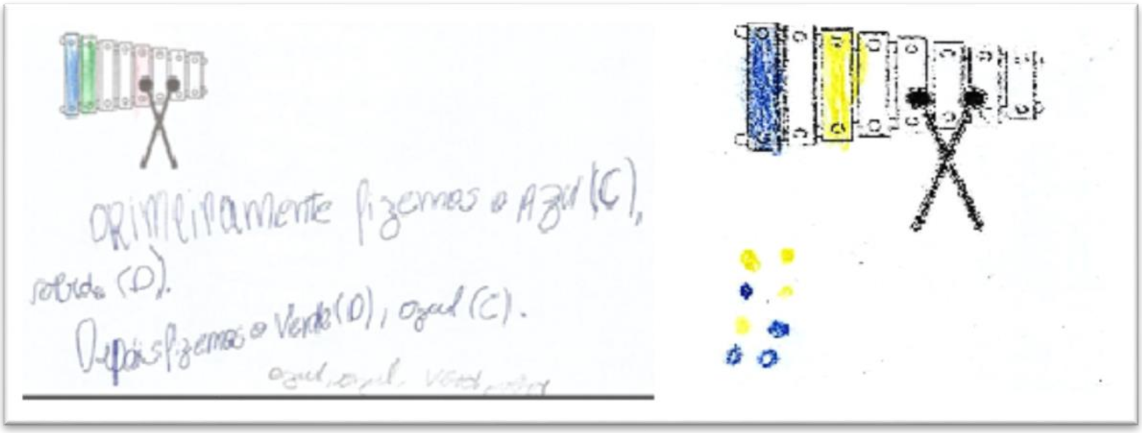
4.3.1 Síntese do segundo encontro

Nesse segundo encontro, observamos que os alunos já apresentavam certa autonomia em relação à atividade, pois já compreendiam o significado de notas e batidas. As duplas continuaram usando os dispositivos móveis para acessar o xilofone que ainda fazia parte da tarefa.

Ao final dessa atividade, decidimos fazer algumas modificações na dinâmica da socialização. Ao invés de simularmos as composições musicais através da participação de voluntários, escolheríamos um aluno para registar no quadro as respostas. Realizamos essa modificação para criar uma nova expectativa nos alunos e não deixar os encontros monótonos.

Em relação à resolução das atividades, algumas duplas modificaram a forma de registar a lista de possibilidades (Figura 29).

Figura 29 – Comparação entre os registros

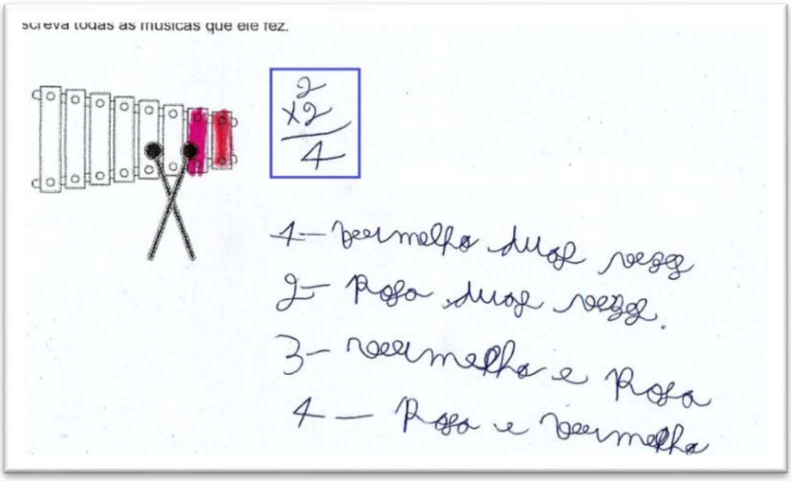


Fonte: acervo da pesquisa

Eles abandonaram seus registros iniciais e passaram a registrar da mesma maneira que a professora registrava no quadro. Essa situação já era esperada, pois sabemos que muitas vezes os alunos tendem a repetir seus professores.

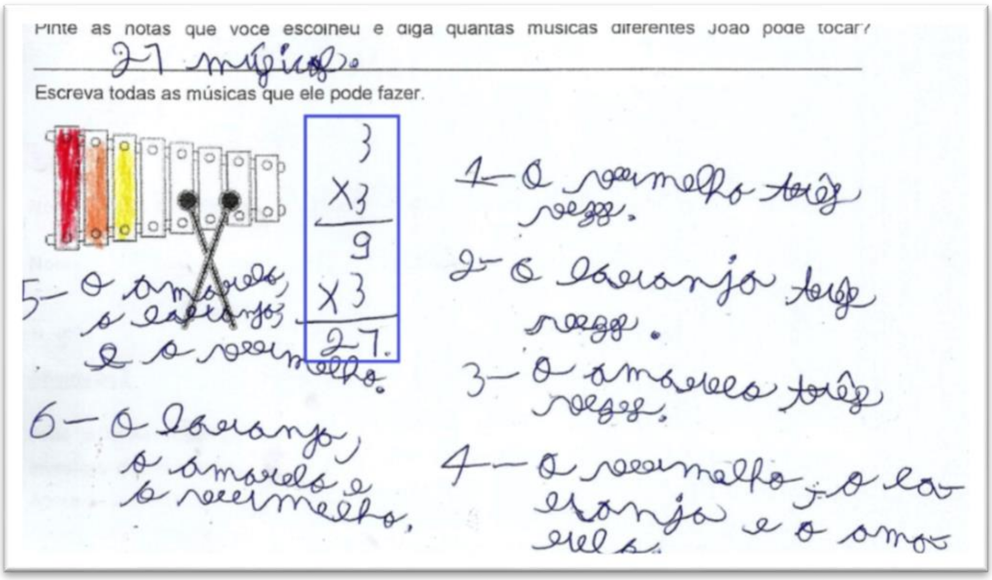
Em relação à resolução das atividades, observamos que um aluno, Mart, apresentou um raciocínio diferenciado nas resoluções. Percebemos que ele havia compreendido a situação apresentada no início da atividade, pois além de registar as músicas feitas em cada situação, ele também apresentou um cálculo, conforme foi destacado nas Figuras 30 e 31. Isso nos leva a crer que Mart já estava usando uma regra antes de fazer as representações que foram exigidas pela professora.

Figura 30 – Registro da Atividade 2 - 1º item



Fonte: acervo da pesquisa

Figura 31 – Registro da Atividade 2 - 2º item



Fonte: acervo da pesquisa

Apesar da Figura 31 não apresentar todas as músicas possíveis, vemos que Mart responde 27 possibilidades e representa seis delas por solicitação expressa da professora e ainda apresenta o cálculo 3 x 3 = 9 x 3 = 27 com o intuito de comprovar sua resposta sem a necessidade discriminar todas as composições. Observamos que antes mesmo da Atividade solicitar a regra, Mart a apresentou para sua companheira de trabalho. Considerando as falas e os registros escritos de Mart, observamos indícios do pensamento algébrico *contextual*.

Reiteramos que durante a realização dessa atividade, houve envolvimento, participação e interação dos alunos em todo o processo.

A seguir, apresentaremos as análises relativas a Atividade 3 que apresenta a mesma estrutura das Atividades 1 e 2, contudo, não será permitido a repetição de notas nas músicas.

4.4 ATIVIDADE 3

Iniciamos o nosso encontro, retomando alguns combinados sobre o desenvolvimento das atividades, como não se esquecer de colocar os nomes nas atividades, responder as questões propostas com canetas e realizar as correções com caneta vermelha. Após as orientações, relembramos o que havíamos realizado no encontro anterior.

Ao perceber que os alunos conseguiam se lembrar da regra da Atividade 2, que envolvia números de notas e batidas iguais, a professora começou a explicar a Atividade 3, pois nesse encontro teríamos um novo personagem: o Marcos, amigo de João.

A Atividade 3 (ver apêndice C) era composta por cinco itens, dos quais nos quatro primeiros o número de notas mudava, variando de dois a cinco e a composição musical era formada sempre por duas batidas, sem repetição de notas. No quinto item, os alunos deveriam escrever uma expressão que permitisse calcular o número de músicas para qualquer número de notas (*n)* em que o número de batidas era sempre dois.

Mais uma vez, Manuela e Omi, antes de começarem a realizar a atividade, conversaram sobre qual *smartphone* usariam. Dessa vez, eles tentaram resolver esse impasse por meio da sorte. Como estavam demorando muito, a professora sugeriu que eles alternassem, em cada encontro, o aparelho de Manuela e Omi. Eles acataram a sugestão e iniciaram a atividade colorindo o xilofone impresso. Em seguida, Manuela e Omi começaram a conversar sobre o primeiro item.

> **Manuela**: (...) *que não tivesse notas repetidas. Ou seja, não vai poder repetir. Só vai ser duas músicas.*

> **Omi**: *É! Azul verde; verde Azul.* (Ao mesmo tempo em que ele fala as composições, ele movimenta sua lapiseira como se estivesse tocando o xilofone, conforme Figura 32).

Figura 32 – Omi tocando a música no ar

Fonte: acervo da pesquisa

Percebemos que Omi dispensa o uso de xilofone como artefato. Consegue realizar o primeiro item e simula as batidas nas lâminas com movimentos no ar. Além disso, quando ele diz "*Azul verde; verde Azul"* e movimenta sua lapiseira representando as composições obtidas, evidencia a coordenação entre fala e gesto, o que para Papert (1980) indica sintonicidade corporal, ou seja, indica compatibilidade entre as composições registradas no xilofone e as percepções do aprendiz. Nesse sentido, Radford (2012) relaciona o corpo com o pensamento quando o define a partir da prática social materializada no corpo (visualização), no uso de sinais (no caso, gestos e fala) e em artefatos de diferentes tipos (xilofone).

Dessa forma, a dupla conclui que poderiam ser compostas duas músicas por meio da lista de possibilidades. Em seguida, vão para o item dois que apresentava o seguinte enunciado:

Agora, você escolhe três notas para Marcos compor músicas com duas batidas. Lembre-se que uma música não pode ter notas repetidas. *Quantas músicas Marcos poderá compor?*

Após a leitura, Manuela conclui que nesse item teriam mais músicas e pega o xilofone (Figura 33) para mostrar a Omi como seriam as composições, seguindo o que o item pedia.

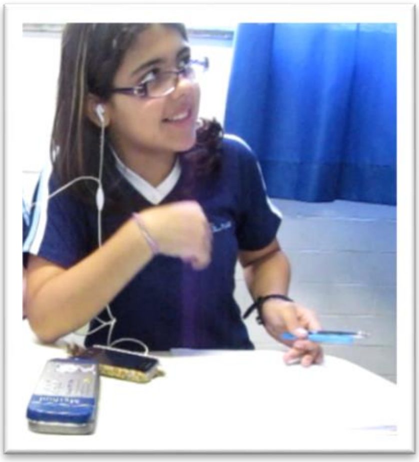
Figura 33 – Manuela tocando o xilofone

Fonte: acervo da pesquisa

Ao terminar de tocar, Manuela responde que seriam nove músicas, o que evidencia uma associação feita entre essa tarefa e a Atividade 1. Antes mesmo que Omi chegue à resposta, Manuela se antecipa e chama a professora.

Manuela: *Professora, aqui na de três são 9 músicas, não é?* (Manuela aponta para a segunda questão 3)
Professora: *Ah! Não sei Manuela, não lembro.*
Manuela: *Ah, não! É com duas batidas*.
Professora: *É.*
Manuela: (olha para a professora e responde, Figura 34) *Então vão ser 6.*

Figura 34 – Manuela conversando com a professora



Fonte: acervo da pesquisa

A professora, então, se afasta e deixa a dupla trabalhar. Agora, mais interessado em descobrir o número de músicas, Omi pega o xilofone (Figura 35), toca e conta em voz alta as composições feitas, independente, da explicação de Manuela.

Enquanto isso, já convencida de que eram seis, Manuela faz, individualmente, o registro das músicas.

Figura 35 – Omi testando suas composições

Fonte: acervo da pesquisa

> **Omi**: *São seis e não nove. Você tinha falado nove.*
> **Manuela**: *Mas Omi! Ah! É, são seis...*
> **Omi**: *São seis.*

Ao perceber que o número de músicas era diferente do que Manuela havia dito, inicialmente, Omi tem a iniciativa de discutir o resultado encontrado. Após o diálogo, ele passa para o registro finalizando este item e imediatamente começa a leitura do próximo exercício.

Escolha quatro notas e pinte as lâminas com as cores que você escolheu. Quantas músicas diferentes Marcos poderá compor com quatro notas e duas batidas?

Ao terminar a leitura da tarefa, Omi tenta mais uma vez usar o xilofone para criar as músicas, mas é impedido por Manuela. Para ele, o artefato oferece apoio para refletir sobre a situação.

> **Manuela**: *O que você está fazendo?*
> **Omi**: *É que eu ia ver o xilofone.*
> **Manuela**: *É oito.*
> **Omi**: *É?*
> **Manuela**: *São*
> **Omi**: *Como é que você sabe?*
> **Manuela**: *Não sei.*

Omi não fica satisfeito com a resposta dada por Manuela e procura outra estratégia de resolução utilizando o registro escrito do xilofone. Escolhe uma lâmina, de cor azul, e faz as composições com a cor azul fixada na primeira casa. Ele repete esse procedimento para as outras cores escolhidas. Ressaltamos, nesse contexto, a concepção de Radford (2012) em relação ao pensamento e ao corpo, pois encontramos ações cenestésicas, gestos, visualização, sinais como a fala e o artefato (xilofone).

Podemos observar isso na Figura 36, pois ele vai com a caneta apontando as teclas que estariam sendo tocadas e, além disso, vai contanto alto cada música feita.

Figura 36 – Omi tocando o xilofone mentalmente

Fonte: acervo da pesquisa

Tempos depois, Manuela questiona sobre a própria resposta.

Manuela: *Peraí, são oito?*
Omi: *São nove.*

Omi tenta dialogar com Manuela para mostrar sua resolução, mas ela parece não estar convencida do seu resultado e não lhe dá atenção. Ele, então, resolve escrever a lista de possibilidades e conclui que "*são três para cada*", ou seja, fixando uma nota na primeira posição teremos três possibilidades. Manuela, então, acena positivamente com a cabeça e continua escrevendo todas as possiblidades de forma sistemática, alternando as notas e as posições para chegar ao número total de doze músicas.

Manuela*: São 12 músicas.*
Omi*: Não são.*

Omi discorda dela e tenta, mais uma vez, mostrar como ele havia pensado, porém Manuela não lhe dá atenção. Nesse contexto, outro aluno, Jubileu, observa a situação e confirma para Omi que serão 12 músicas. Omi volta para a atividade e observa que não havia representado as músicas que começavam por uma das quatro notas escolhidas. Ele retorna para o xilofone impresso e fica simulando as composições como se estivesse tocando (Figura 37).

Figura 37 – Omi fazendo as composições com o xilofone impresso

Fonte: acervo de pesquisa

Ele comprova que sua resposta inicial estava errada e completa sua lista de possibilidades, passando para o quarto item.

O desafio para você agora é responder quantas músicas João poderia compor escolhendo cinco notas e duas batidas?

Para essa Atividade, Omi não usa o xilofone que está no smartphone. Ele traça a mesma estratégia usada, anteriormente. Após um pequeno período tentando descobrir quantas músicas seria possível fazer, Omi começa a conversar novamente com Manuela sobre o quarto item.

Omi: *Quatro vezes quatro é? Dezesseis?*
Manuela: *Peraí.*
Omi: *É dezesseis, não é?*
Manuela: *Acho que sim.*

Como Manuela não deu uma resposta muito conclusiva, ele retoma, individualmente, o exercício e volta a ficar "tocando" suas músicas, mentalmente.

Omi: *É 20.*
Manuela: *Tem certeza?*
Omi: balança a cabeça positivamente.

Ao perceber que as duplas tinham uma reposta para os quatro primeiros itens da atividade, a professora iniciou a socialização, que foi diferente das anteriores. Não fizemos a encenação das possibilidades, na qual alguns voluntários usavam chapéus representando as cores das notas. Para essa atividade, pedimos um voluntário para substituir a professora. Para coordenar este momento, Manuela foi escolhida.

Eles começaram escolhendo as cores que seriam utilizadas no quadro para

representar as lâminas do xilofone e, em seguida, foram dizendo as músicas possíveis para cada situação. Durante a construção da lista de possibilidades do item dois, os alunos começaram a usar sempre a cor azul na primeira casa. Diante disso, a professora questionou a estratégia utilizada.

> **Professora**: *Por que você está usando sempre o azul primeiro, Jubileu?*
> **Jubileu**: *Para ficar mais fácil de achar a resposta* (nesse finalzinho a sala inteira respondeu junto com Jubileu).

Percebemos, assim, que com o passar das atividades, os alunos foram procurando estratégias para facilitar a resolução e, assim, conseguirem determinar o número de músicas feitas.

Manuela organizou, no quadro, as composições de todas as duplas, abandonando sua representação que consistia em representar as lâminas por meio de números coloridos e usando o modelo de listas de possibilidades, apresentado pela professora nas atividades anteriores (Figura 38).

Figura 38 – Manuela registra as possibilidades no quadro
Fonte: acervo da pesquisa

Durante a socialização, os alunos construíram a lista de possibilidades para os 3 primeiros itens. No quarto, que solicitava as composições obtidas com cinco notas e duas batidas, Hércules afirmou, antes do registro, que seriam 20 músicas e teve a anuência da turma. Após a afirmação, a professora questionou o resultado. Alguns alunos se prontificam a explicar:

> **Jubileu**: *Primeiro, você tem que multiplicar o número de notas pelo número de batidas que vai dar vinte e cinco.*
> **Professora**: *Peraí, mas se você multiplicar o número de notas pelo número de batidas, dá cinco vezes dois.*
> **Jubileu**: *Não tem que multiplicar... aqui, oh! Você multiplica o número de notas, não. Eleva ao número de batidas que, aí vai dar vinte e cinco. Mas só que não pode repetir, então, você tira as cinco notas que vão repetir, aí vai dar vinte.*
> **Jack**: *o número de notas, que é cinco vezes ele mesmo, que dá vinte e cinco, menos o número de notas.*
> **Manuela**: *A gente, primeiro, tem que ver as combinações da primeira nota* (nesse momento, ela se refere ao número de combinações que podem ser feitas fixando uma cor na primeira casa) *e como são quatro notas, temos, por exemplo, três combinações para cada nota, então fica três vezes quatro.* (Ela utiliza o terceiro item da atividade para exemplificar sua regra).

A explicação de Jubileu evidencia a utilização da generalização obtida na Atividade 1, n^2 (*n* representa o número de notas e 2 o número de batidas) para responder um caso particular, que seria cinco notas e duas batidas. O que, inicialmente, poderia ser uma indução ingênua, contudo, ele percebe que é preciso excluir as possibilidades que têm notas repetidas apresentando, assim, um pensamento sofisticado. Já o diálogo de Jubileu com a professora e a subsequente manifestação de Jack, oferece indícios da manifestação de uma *zona de emergência do pensamento algébrico,* conforme define Radford (2010a) um espaço (não físico) envolvendo o diálogo e a tarefa realizada que pode permitir ao aluno pensar algebricamente, mesmo sem recorrer a símbolos alfanuméricos. Jack propõe para esse caso específico, a expressão geral, utilizando a língua oral, ou seja, sem fazer uso do simbolismo algébrico.

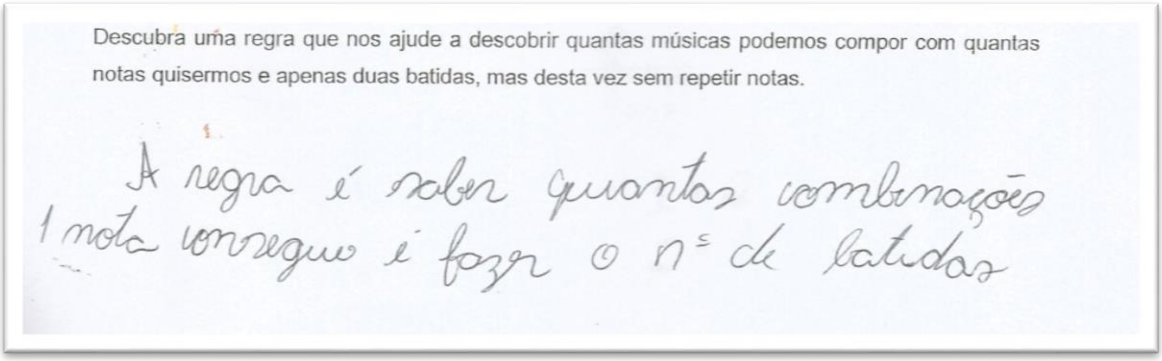
A resposta, apresentada por Manuela e pelos demais colegas, mostra uma generalização relacionada ao procedimento empírico. Contudo, sua resposta está atrelada a outras ações desencadeadas pela atividade. Um aspecto que nos chamou a atenção foi o fato dela escolher o exemplo do terceiro item para justificar o resultado.

Após perceber que os alunos já haviam compreendido a atividade, a professora concluiu a socialização e pediu que eles retomassem a partir do quarto item que solicitava:

Descubra uma regra que nos ajude a dizer quantas músicas podemos compor com duas notas e duas batidas e, três notas e três batidas, sem que as músicas tenham notas repetidas?

Referente aos registros da regra, destacamos os de Manuela e Omi, uma vez que eles não os expressaram de forma clara, conforme a Figura 39.

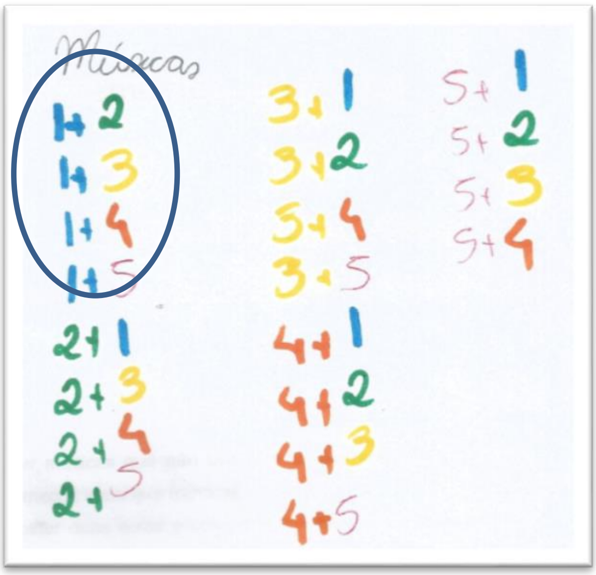
Figura 39 – Registro escrito da regra de Manuela e Omi



Fonte: acervo da pesquisa

Para compreender melhor a regra escrita, é necessário observar a maneira pela qual a dupla respondeu as músicas nas tarefas anteriores (Figura 40)

Figura 40 – Lista de músicas

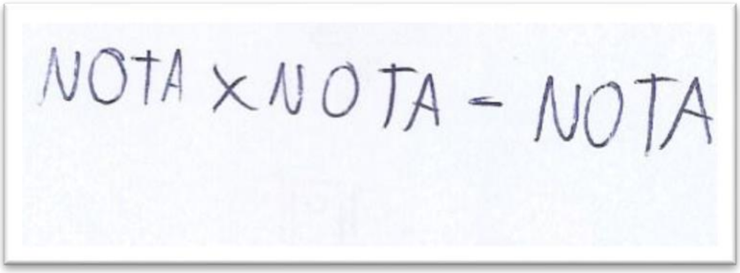


Fonte: acervo da pesquisa

A expressão “*quantas combinações 1 nota”*, refere-se, na verdade, a quantas músicas foram feitas começando com a nota 1. Ao fixar a nota 1 na primeira casa, teremos quatro músicas. Em seguida, a dupla multiplica pelo número de notas escolhidas, que nesse caso são cinco. Para determinar o número de músicas nessa situação, era necessário fazer 4 x 5. É importante pontuar que na hora de escrever a regra, a dupla confunde batidas com notas que nessa atividade não são iguais.

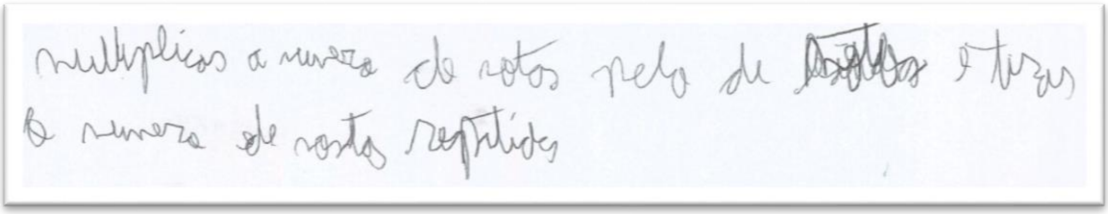
Levando em consideração os três estilos de pensamento (*factual, contextual e o simbólico)* propostos por Radford (2001, 2010) e a existência de *camadas de significação* usadas para raciocinar e expressar formas gerais (sistema alfanumérico, a língua natural dentre outros), acreditamos que Manuela e Omi estivessem nessa atividade entre o pensamento algébrico *factual* e o *contextual.* Prova disso, é a necessidade de recorrer à parte da lista de possibilidades (uma nota era tomada em uma determinada posição) para conseguir identificar as músicas feitas que atendessem às condições de não repetir notas na mesma composição (pensamento algébrico *factual*, caracterizado pela necessidade do concreto). Em seguida, esse resultado era multiplicado pelo número de notas, o que poderia substituir a representação de toda a lista de possibilidades (pensamento algébrico *contextual*). É interessante destacar também o pensamento algébrico envolvendo a atividade de Jack. Assim como Manuela e Omi, ele utiliza termos do exercício (*notas*) para expressar sua regra, que está representada na Figura 41. Contudo, percebemos que ele parece estar envolvido no estilo de pensamento algébrico *contextual*, uma vez que não precisa escrever as possibilidades como Manuela e Omi. O pensamento algébrico contextual é caracterizado pela indeterminação, que, neste caso, está diretamente relacionada ao número de notas que é um elemento da atividade. Destacamos que outras duplas também apresentaram indícios do pensamento algébrico *contextual*, porém utilizaram outras sentenças conforme os registros indicados nas Figura 41, 42 e 43 a seguir:

Ilustração 41 – Registro da regra de Jack



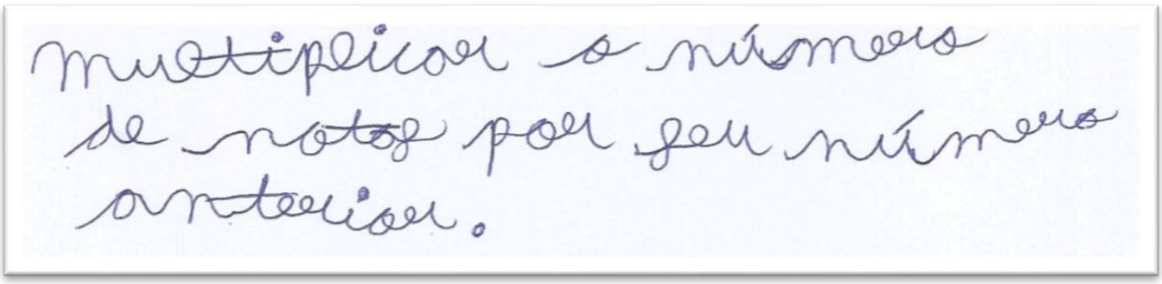
Fonte: acervo da pesquisa

Ilustração 42 – Registro da regra de Jubileu



Fonte: acervo da pesquisa

Ilustração 43 – Registro da regra de Mart



Fonte: acervo da pesquisa

Ao analisar os registros das duplas, percebemos que a Atividade 3 foi a que mais apresentou diferentes registros para a mesma situação, utilizando a língua natural para expressar a regra.

4.4.1 Síntese do terceiro encontro

Ao final desse terceiro encontro, observamos que algumas duplas já não usavam o dispositivo móvel com a mesma frequência. Alguns já faziam as composições usando lápis e papel. Contudo, eles continuavam motivados a realizar a atividade e conseguiram responder a todos os itens dentro do prazo estabelecido que era de duas horas aulas (1h 40 min.), mesmo tendo um fator novo que era a não repetição de notas.

O fato de não ser permitido o uso de notas repetidas, trouxe um novo desafio e levou, consequentemente, a algumas dúvidas para expressar a regra geral. Isso porque a relação existente entre a Atividade 1 e 3 não foi percebida pelos alunos. A primeira envolvia o número de batidas igual a dois e a possibilidade de repetição de notas. A Atividade 3 mantinha o número de batidas igual a 2, porém não era permitida a repetição de notas na mesma música. Sendo assim, dos resultados obtidos na Atividade 2, bastava retirar as músicas que apresentavam repetição de notas que conseguiríamos determinar o número de músicas para a Atividade 3.

Vale ressaltar que a mudança na estratégia de socialização presente nas Atividades 1 e 2, que usava alunos com chapéus coloridos representando as cores das notas do xilofone, gerou um desapontamento momentâneo, pois os alunos gostavam de se apresentar perante aos demais. Entretanto, a escolha de um representante para registar, no quadro, as listas de possibilidades, renovou as expectativas relativas às atividades. Em todas as Atividades desenvolvidas, os alunos utilizaram a língua natural para representar as expressões gerais.

No encontro seguinte, trabalhamos com a Atividade 4, que manteve a condição de não permitir a repetição de notas na mesma música. Contudo, o número de notas foi o mesmo que o número de batidas.

4.5 ATIVIDADE 4

Neste último encontro, a professora começou os trabalhos retomando pela primeira atividade. Foi perguntando aos alunos o que havia acontecido nas estratégias escolhidas e nos resultados obtidos. À medida que eles falavam, ela mudava para a atividade seguinte até chegar à Atividade 3 e, juntos, lembraram que não poderiam repetir as notas em uma mesma música.

Os alunos tiveram dificuldades para lembrar a regra, porém a professora foi perguntando quantas músicas foram feitas com duas notas e duas batidas, depois com três notas e três batidas, até que Jubileu lembrou como havia feito para descobrir o número de músicas com três notas e três batidas. Em seguida, um aluno respondeu que era "*nota vezes notas menos notas*". Com isso, a professora sentiu segurança e iniciou a Atividade 4, fazendo a leitura em voz alta com os alunos. Ela ressaltou que nesta atividade também não seria permitido repetir notas nas composições.

A Atividade 4 (ver apêndice C) foi composta por cinco itens, dos quais os três primeiros solicitavam, respectivamente, que os alunos determinassem quantas músicas poderiam ser compostas com duas notas e duas batidas, três notas e três batidas e quatro notas e quatro batidas, sempre sem repetição de notas. O quarto item pedia para que eles escrevessem uma regra que atendesse aos três primeiros exercícios e, por fim, eles deveriam verificar o número de músicas feitas com quatro notas e quatro batidas utilizando a regra que eles criaram.

Manuela e Omi começaram a atividade colorindo o xilofone impresso. Enquanto estão colorindo, Manuela já diz para Omi a resposta do primeiro item.

> **Manuela**: *São duas músicas.*
> **Omi**: *O quê?*
> **Manuela**: *Duas músicas.*

Omi não responde a princípio, deixando transparecer concordar com a respostada encontrada por Manuela. Porém, alguns minutos depois ele lê novamente o enunciado da questão:

> *Quantas músicas diferentes Marcos poderá compor com duas notas e duas batidas?*

Ele pega o xilofone, chamando a atenção de Manuela, que o observa e começa a compor as músicas. Ao verificar o que Omi estava fazendo ela diz:

> **Manuela**: *Não pode repetir*. (Olha para ele e balança a cabeça negativamente).

Ela então mostra no xilofone quais seriam as músicas que poderiam ser compostas com as notas escolhidas. Omi faz as composições usando o xilofone. Ambos fazem seus registros e seguem para a segunda questão.

> *Quantas músicas diferentes poderemos compor com três notas e três batidas, lembrando que não podemos repetir notas em uma mesma música?*

Para determinar quantas músicas seriam feitas nesse segundo exercício, Manuela não utiliza o xilofone para testar suas composições. Ela elabora sua lista fixando sempre uma cor na primeira casa. Nesse item, ela começou usando a cor verde, representada pelo número um, em seguida, falou em voz alta quem ficaria na segunda e terceira casa. Novamente, escreveu o número um (verde) na primeira casa e disse quem estaria na segunda e terceira casa. Empregou esse mesmo procedimento até usar todas as cores escolhidas na primeira posição. Enquanto isso, Omi testava suas músicas no xilofone (Figura 44).

Figura 44 – Omi tocando no xilofone
Fonte: acervo da pesquisa

> **Omi**: *São seis* (Ele fala isso olhando para o que Manuela fazia naquele momento)
> **Manuela**: *É! Nã ... é seis!* (e balança a cabeça confirmando sua resposta).

Após a confirmação de Manuela, Omi registra as músicas. Enquanto escrevem a lista de possibilidades, conversam sobre outros assuntos.

Observando os registros de Manuela, Omi toca as composições no xilofone (Figura 45).

Figura 45 – Manuela observando Omi

Fonte: acervo da pesquisa

Depois de executar as músicas, ele volta a observar os registros de Manuela e, por um tempo, observa e volta novamente a tocar o xilofone. Em seguida declara:

> **Omi**: *São três*. (Enquanto ele fala Manuela faz um gesto negativo com a cabeça)
> **Omi**: *São três notas e três batidas* (Manuela faz um aceno positivo com a cabeça). Então olha. (Omi pega o xilofone e toca para Manuela. Figura 46)

Figura 46 – Omi mostrando para Manuela suas composições

Fonte: acervo da pesquisa

Manuela percebe que, para convencer Omi, teria que usar o xilofone para mostrar as possibilidades que havia feito (Figura 47).

Figura 47 – Manuela tocando para Omi

Fonte: acervo da pesquisa

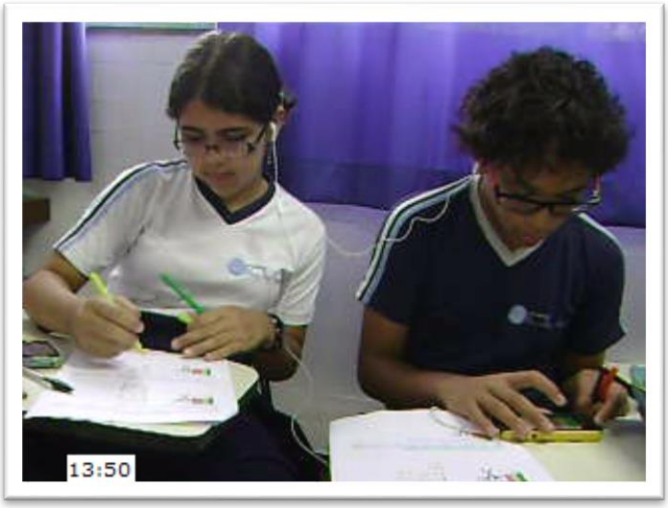
> **Manuela**: *Aqui tem duas, três, quatro, cinco e seis.* (Ela toca todas as músicas para Omi).
> **Omi**: *Ah! Entendi.*

Assim, Omi termina o item dois e vai para o próximo, que apresentava o seguinte enunciado:

Escolha quatro notas e pinte as lâminas com as cores escolhidas. *Quantas músicas diferentes poderemos compor com quatro notas e quatro batidas, lembrando que não podemos repetir notas em uma mesma música?*

Manuela já havia começado a fazer esse item. Mais uma vez, Omi pega o xilofone para criar as músicas que atendam aos requisitos do terceiro item. Enquanto isso, Manuela compõe suas músicas sem a necessidade de usar o xilofone e aplica a mesma estratégia do item anterior (Figura 48).

Figura 48 – Omi novamente verificando as possibilidades



Fonte: acervo da pesquisa

> **Manuela**: "*Esse vai ser confuso para mim".*
> **Omi**: Nossa! Vai ser muita coisa.
> **Manuela**: Vai ser muita coisa.
> **Omi**: A gente tem que inventar a regra agora. Porque aí a gente usa e fica mais fácil.

Observamos na fala de Omi o que Pessoa e Santos (2012) apontam em seus trabalhos sobre a generalização. Segundo as autoras, os alunos só buscam essa estratégia quando percebem que o problema tem muitas possibilidades. Por acreditar que o item apresentaria muitas possibilidades, Omi tenta buscar uma regularidade nos itens anteriores que permitisse resolver o problema. Nessa passagem, podemos observar indícios da emergência do pensamento algébrico proposto por Radford (2010), pois Omi, ao afirmar que é necessário encontrar uma regra, percebe a necessidade de trabalhar analiticamente com os objetos para obter uma expressão geral que facilite a resolução da tarefa. Manuela ainda não convencida de que essa estratégia seria a mais indicada, prefere manter a lista de possibilidades.

> **Omi**: *O que a gente tem que fazer aqui?* (apontando para o exercício 2, interrompendo Manuela)
> **Manuela**: *Três mais três. Agora, não vai ser oito aqui* (apontando para o item 3). *Não vai ser oito, porque não vai ter duas músicas de cada uma*. (Manuela está dizendo que não terá só duas músicas começando com uma mesma nota)
> **Omi**: *A gente fez três vezes três* (se referindo ainda ao segundo item da Atividade)
> **Manuela**: *Não porque dá nove*.

> **Omi**: *Verdade! O que a gente fez*?
> **Manuela**: *Três mais três. Não vai dar oito aqui, não vai* (Nesse último trecho ela está se referindo ao item 3 da atividade).
> **Omi**: *Peraí que estou pensando. Eu acho que vai dar dezesseis.*
> **Manuela**: *Eu acho que vai dar 16 mesmo*.

Ao finalizar a discussão, eles retomam a lista de possibilidades, pois não haviam conseguido encontrar um padrão que pudesse atender a atividade proposta. O fato de eles voltarem a escrever a lista de possibilidades já era esperado, pois Pessoa e Santos (2012) apontam que essa é uma maneira segura de identificar as respostas e, como nesse caso, não estavam seguros da estratégia que apresentaria uma expressão geral, recorrem novamente à lista. Após alguns registros, Manuela fica observando o que já havia feito e demonstra estar bem pensativa. Em seguida, diz:

> **Manuela**: *Vai dar oito músicas de cada, eu acho* (se referindo à quantidade de músicas feitas fixando uma cor na primeira casa).
> **Omi**: *4, 8...* (Omi está contando quantas músicas teriam com uma cor fixa)
> **Manuela**: Tá *errado. Tem mais*.
> **Omi**: *Eu sei.* (e continua sua contagem) *4, 8, 12 e 16. São quatro notas. Dezesseis vezes quatro? Nossa! Vai dar muito*.

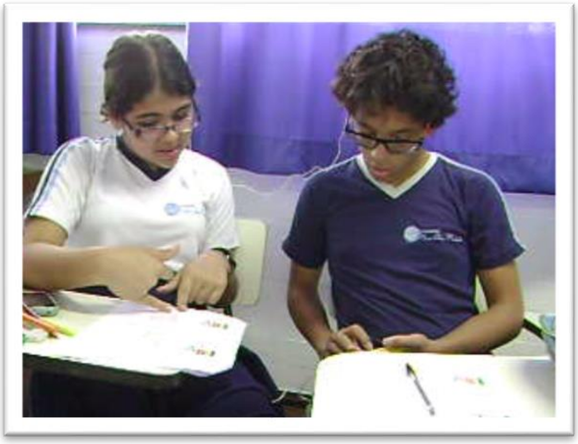
Eles, então, começam a calcular quanto é dezesseis vezes quatro. Manuela diz sessenta e quatro e Omi acha que esse será o número de músicas. Manuela e Omi discutem sobre o resultado adequado do exercício. Por não chegarem a um acordo, Omi chama a professora.

> **Manuela**: *Vai dar trinta e duas aqui?* (apontando para o exercício 3)
> **Omi**: *Vai dar dezesseis*.
> **Professora**: *Por quê?*
> **Manuela**: *São quatro batidas e quatro notas. 1,2,3,4; 1,3,2,4* (Manuela mostra para a professora, como compôs as músicas). *São trinta e dois aqui.*

A professora solicita que eles observem a atividade e conversem mais um pouco. Eles, então, resolvem pegar o xilofone e tocam as músicas. A dupla fica um bom tempo mexendo no xilofone. Contudo, ao usarem o xilofone, se perdem nas músicas que já foram feitas e repetem várias vezes a mesma composição. Assim, não conseguem avançar muito sobre o número de músicas que serão feitas, pois Omi e Manuela continuam discordando. Manuela, então, tenta mostrar para Omi.

> **Manuela**: *Mas aqui vai dar mais. Omi, olha aqui!* (apontando para a lista que ela havia começado). *Vão dar mais notas (*Figura 49).

Figura 49 – Manuela mostrando para Omi sua lista



Fonte: acervo da pesquisa

> **Omi**: *Não vai não! São quatro casas.*
> **Manuela**: *Mas como? Olha aqui, 1+2+3+4, 1+2+4+3...* (ela fala em voz alta as músicas que foram feitas com o número 1 na primeira casa)

Ao observá-los, a professora se aproxima deles.

> **Omi**: *São dezesseis, né professora?*
> **Professora**: *Vocês já fizeram todas as músicas com essa cor*? (apontando para a lista de possibilidades feita com a nota 1 na primeira casa, Figura 50).

Figura 50 – Professora conversando com a dupla

Fonte: acervo da pesquisa

> **Manuela**: *Tá vendo, vai dar mais de dezesseis.*
> **Omi**: *Não vai.*

Novamente, Omi volta a questionar a professora sobre o número de músicas feitas para quatro notas e quatro batidas.

> **Omi**: *Vai dar dezesseis?*
> **Manuela**: *Vai dar mais, não vai?*

A professora faz um sinal de positivo com a cabeça e se afasta deles. Eles, então, voltam para a atividade e analisam as músicas que já estavam escritas com o intuito de verificar se havia mais possibilidades. Ao completar a lista com uma determinada cor na primeira casa, eles retomam a conversa.

> **Manuela**: *Eu já fiz todas com essa* (aponta para a lista, mostrando que fez todas as músicas com uma determinada cor na primeira posição).
> **Omi**: *Nenhum de nós acertou essa, Manuela.*
> **Manuela**: *Vinte e quatro? Vai dar vinte e quatro. Você disse que ia dar dezoito, então, nenhum de nós dois acertou*.

Ao constatar que a resposta seria, realmente, vinte e quatro, Manuela e Omi conversam sobre outras coisas, brincam um com o outro sobre o fato dela ter conseguido chegar primeiro a resposta. Ao perceberem que a professora está se aproximando, Omi resolve perguntar sobre o registro.

> **Omi**: *Professora, a gente pode não fazer isso* (se referindo à lista de possibilidades)?
> **Professora**: *Desde que vocês me expliquem como foi pensado.*
> **Omi**: *É só multiplicar. Olha, a gente fez seis* (mostrando as diferentes músicas escritas com uma mesma nota), *então, é só fazer seis vezes quatro. A gente multiplica o número de batidas pelo número de possibilidades. A gente pode fazer assim?* (Figura – 51)

Figura 51 – Registro do 3º item da atividade

Fonte: acervo da pesquisa

Mais uma vez, encontramos elementos do trabalho de Pessoa e Santos (2012), pois ao conseguirem determinar a resposta, sem a necessidade de escrever a lista, Omi questiona a professora sobre a possibilidade de dar a resposta sem ter que escrever todas as músicas.

Omi, então, volta aos exercícios anteriores e observa (Figura 52) as respostas, juntamente com as listas de possibilidades. Em seguida, ele responde para Manuela.

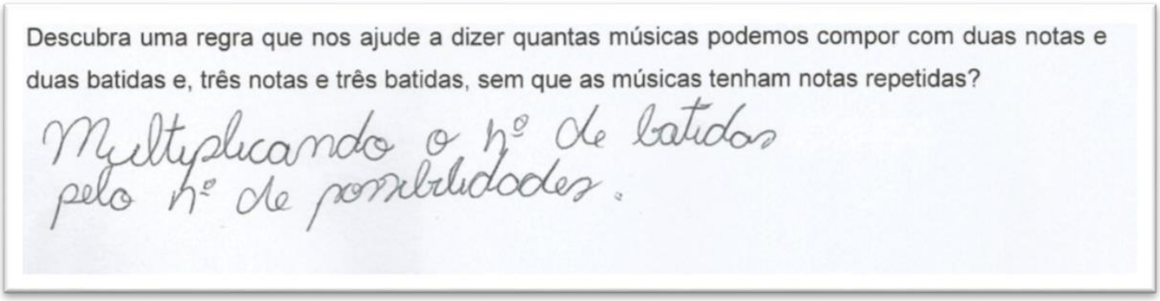
Figura 52 – Omi verificando os registros dos itens da atividade

Fonte: acervo da pesquisa

> **Omi**: *É isso mesmo*.
> **Manuela**: *Perai que estou pensando*.
> **Omi**: *Essa é a regra: multiplicar o número de batidas pelo número de possibilidades. Olha aqui*. (ele vai apontando para as listas anteriores).

Sendo assim, Manuela registra em sua atividade a regra encontrada, conforme Figura 53.

Figura 53 – Registro da regra de Manuela e Omi



Descubra uma regra que nos ajude a dizer quantas músicas podemos compor com duas notas e duas batidas e, três notas e três batidas, sem que as músicas tenham notas repetidas?

Multiplicando o nº de batidas pelo nº de possibilidades.

Fonte: acervo da pesquisa

Sob a perspectiva de Radford (2001, 2006, 2010), consideramos que Manuela e Omi apresentam como estilo de pensamento algébrico, o pensamento *contextual*. Percebemos em sua regra que a indeterminação está diretamente ligada ao termo da atividade como “número de batidas”.

Enquanto isso, Omi termina alguns registros que estavam faltando para, em seguida, registrar a regra, solicitada no quarto item. Rapidamente, ele faz isso e parte para o último item.

Agora, usando a regra descrita acima descubra quantas músicas diferentes Marcos pode fazer com cinco notas e cinco batidas?

> **Manuela**: *São quantas?*
> **Omi**: *Vamos ter que fazer o primeiro número de batidas. Igual a gente fez aqui* (apontando para o item 3 conforme Figura 54). *A gente multiplica o número de batidas pelo número de possibilidades.*

Figura 54 – Omi explicando para Manuela

Fonte: acervo da pesquisa

Na fala de Omi com Manuela, podemos constatar a manifestação de uma *zona de emergência do pensamento algébrico*, pois ele utiliza a regra que ele havia deduzido para um caso particular. Ele utiliza essa estratégia com o intuito de simplificar o trabalho e, assim, conseguir determinar a resposta de forma mais fácil. O aluno usa a língua natural para expressar esse pensamento.

Apesar da explicação de Omi, Manuela ainda não está convencida de que essa seria a regra. Ela, então, volta aos exercícios anteriores e tenta buscar um padrão entre o número de músicas feitas com uma determinada cor na primeira casa. No entanto, Manuela não consegue identificar uma regularidade, resolve, então, escrever a lista de músicas que poderiam ser feitas com a cor verde na primeira posição. Enquanto escreve, Manuela comenta "*nossa é muita possibilidade*". Nesse instante, a professora verifica o andamento da atividade e Manuela aproveita para conversar sobre o último item.

> **Manuela**: *Aqui vai dar cinquenta? Vai dar cinquenta?* (apontando para o último item da atividade)
> **Professora**: *Como você está fazendo para descobrir o número de possibilidades, Manuela?*
> **Manuela**: *São cinco notas. Cada nota vai fazer duas.*

Ao falar que “*cada nota vai fazer duas”,* Manuela refere-se ao número de músicas feitas com uma determinada cor na primeira casa. Contudo, ao terminar sua frase, ela percebe que isso não está correto e fica, por um instante, pensativa e volta a escrever as músicas seguindo sua estratégia. A cada nova música registrada no papel, Manuela observa por alguns minutos. Acreditamos que nesses momentos, ela estava buscando algum padrão para descobrir o número de possibilidades sem ter a necessidade de escrever a lista completamente.

> **Manuela**: *A resposta é cento e vinte cinco.*
> **Professora**: *Não*.
> **Manuela**: *É mais?*
> **Professora**: *Por que vocês estão fazendo isto?* (apontando para a lista de possibilidades). *Eu falei que era para usar a regra.*
> **Omi**: *Mas é a regra: multiplicar o número de possibilidades pelo número de notas.*

Manuela e Omi interrompem o diálogo sobre a última questão para participar da primeira parte da socialização. Da mesma maneira que a socialização da Atividade 3, a docente pede um voluntário para registrar no quadro as respostas encontradas. Para essa função, Omi foi selecionado.

Omi registra no quadro as possibilidades de músicas ditadas em cada item. Os alunos mantêm a mesma estratégia usada no encontro anterior, na qual escolhiam uma cor para a primeira casa e faziam todas as possiblidades, em seguida, mudavam a cor e novamente determinavam todas as possibilidades. Essa estratégia era empregada até que todas as cores escolhidas tivessem sido usadas na primeira posição.

Para os dois primeiros itens, os alunos ditam para Omi as possibilidades de músicas para criar a lista. Contudo, no terceiro item, Omi só registra a lista de possibilidades em que tinha a cor vermelha na primeira posição. Ao finalizá-la, ele conta a turma como pensou em resolver aquele item.

> **Omi**: *Oh gente, aqui, como a conta já era muito grande* (apontando para a lista do item c) *e a gente já tinha descoberto a regra, a gente só fez o primeiro pra afirmar a regra. A nossa regra é multiplicar o número de batidas pelo número de possiblidades. Então, a gente multiplicaria seis por quatro.*

Após a socialização dos três primeiros itens, a professora solicita que os alunos observem o que havia sido feito e as respostas encontradas para, em seguida, resolverem o penúltimo item, que apresentava o seguinte enunciado:

Descubra uma regra que nos ajude a dizer quantas músicas podemos compor com duas notas e duas batidas e três notas e três batidas, sem que as músicas tenham notas repetidas?

Omi volta para o seu lugar e retoma com Manuela a discussão do último item da atividade, pois eles já haviam conseguido determinar uma regra. Manuela chama atenção de Omi para a necessidade de descobrir uma maneira de verificar o número de possibilidades feitas com uma nota fixada na primeira casa sem ter que descrevê-las. Assim, eles observam o que haviam feito nos itens anteriores.

> **Omi:** *Vamos fazer uma conta.*
> **Manuela***: É cem. É cem aqui Omi, sabe por quê?*
> **Omi***: Não.*
> **Manuela***: (...) é alguma coisa com vinte e cinco. (*Não é possível compreender o inicio da explicação de Manuela, pois o áudio está ruim e ela coloca a folha na frente da câmera*).*

Acreditando que boa parte da turma já havia conseguido realizar o penúltimo item da Atividade 4 que solicitava determinar uma regra, a professora resolve retomar a socialização para verificar as respostas dadas pelos alunos. Então, volta para o exemplo que Omi havia feito no quadro para o terceiro item da atividade e pergunta se essa estratégia era válida para os itens anteriores.

> **Professora***: Omi, havia feito como? Ele pegou o número de possibilidades com a cor vermelha e multiplicou pelo número de batidas. Isso dá certo aqui? (apontando para a lista feita para o item 2).*
> ***Emily****: Não.*
> **Professora***: Por quê?*
> **Professora***: A regra que Manuela, Omi, Darthe Vader usaram dá certo aqui? (*apontando para a lista feita para o item 2*). Quantas notas eu tenho?*
> **Alunos***: Três.*
> **Professora***: Quantas possibilidades para cada cor?*
> **Alunos***: Duas.*
> **Professora***: Três vezes dois dá quanto?*
> **Alunos***: Seis.*
> **Professora***: Isso vai dar certo aqui? (Agora, apontando para a lista feita no primeiro item).*
> **Alunos***: Dá.*
> **Professora***: Tentem escrever uma regra em cima disso.*

Buscando uma maneira de conseguir fazer com que os alunos compreendam qual seria a regra, a professora solicita que Hércules explique para turma como havia feito.

> **Hércules**: *O meu jeito é pegar o número de batidas e multiplicar pelo resultado do item anterior.*

Professora: *Então, me dá um exemplo.*
Hércules: *Então, a primeira questão deu dois. A terceira era três batidas e três notas ai eu usei 3 vezes dois. A questão três era quatro notas e quatro batidas ai deu 24 que seria 6 vezes 4.*
Professora: *Então, isso também é um jeito de generalizar. Pense ai.*

Hércules consegue estabelecer uma relação entre os itens 1 e 2 da Atividade 4. Contudo, ao escrever sua regra, ele dá evidências do pensamento algébrico *factual* proposto por Radford (2001, 2006, 2010), pois para conseguir determinar o número de músicas feitas para um determinado número de notas e batidas, ele terá que determinar para uma quantidade anterior.

Enquanto a turma pensa na regra, Manuela e Omi tentam descobrir quantas músicas eram feitas com cinco notas e cinco batidas.

Manuela*: Professora, na última aula* (se referindo ao último encontro) *o Jubileu disse que a regra era número de notas vezes ele mesmo, menos número de notas? Então, cinco vezes cinco dá vinte e cinco vezes quatro.*
Professora*: Mas são cinco batidas. Vamos observar a lista que vocês fizeram para quatro notas. Quantas vezes você usaram o um nessa lista?*
Manuela*: Seis.*
Professora*: Para segunda casa, quantas cores vocês poderiam escolher?*
Manuela*: Três.*
Professora*: Agora, pensa nas outras.*

Como o tempo estabelecido para este encontro já estava se esgotando e a dupla ainda estava motivada para a resolução da atividade, a professora sugeriu o uso de canetas de cores diferentes (Figura 55).

Professora*: Para a primeira casa, quantas cores vocês podem escolher?(*a professora resolver mostrar outra estratégia que poderia ter sido usado no item com quatro notas e quatro batidas)
Manuela e Omi*: Quatro.*
Professora*: Ótimo! Como eu não posso repetir, vou tirar uma cor. Para a segunda casa irá restar quantas cores?*
Manuela e Omi*: Três.*
Professora*: E para a terceira? (*ela havia retirado mais uma cor do monte de canetas)
Manuela e Omi*: Duas.*
Omi*: Então, é só multiplicar eles?*
Professora*: Pensa sobre isso para três notas e três batidas*

Figura 55 – Professora explicando para dupla

Fonte: Acervo da pesquisa

Eles, então, começam a fazer com os lápis, da forma que a professora havia sugerido. Eles escolhem cinco lápis, determinando, assim, que para a primeira casa teriam cinco possibilidades. Em seguida, retiram um lápis, percebem então que para a segunda casa só poderiam ter quatro possibilidades. Eles fazem o mesmo raciocínio para as casas três, quatro e cinco. Para finalizar, eles multiplicam os números determinados em cada casa (5 x 4 x 3 x 2 x 1) chegando a 120. Dessa forma, eles descobrem quantas músicas seriam feitas com cinco notas e cinco batidas.

4.5.1 Síntese do último encontro

Nesse último encontro, notamos que alguns alunos já não estavam tão envolvidos nas atividades como nos encontros anteriores, porém todos fizeram e participaram ativamente de todos os momentos, inclusive, da socialização.

Para a Atividade 4, a socialização foi feita da mesma forma que na Atividade 3: um aluno foi selecionado para registar, no quadro, as listas de possibilidades de cada item. Omi registrou no quadro da mesma forma que a professora fazia, representado as lâminas por meio de bolinhas coloridas.

Assim como na Atividade 3, percebemos que o uso do xilofone por grande parte da turma foi menor. Acreditamos que, como eles já haviam compreendido o processo e com o passar das atividades, eles foram percebendo outras estratégias, independente do recurso digital.

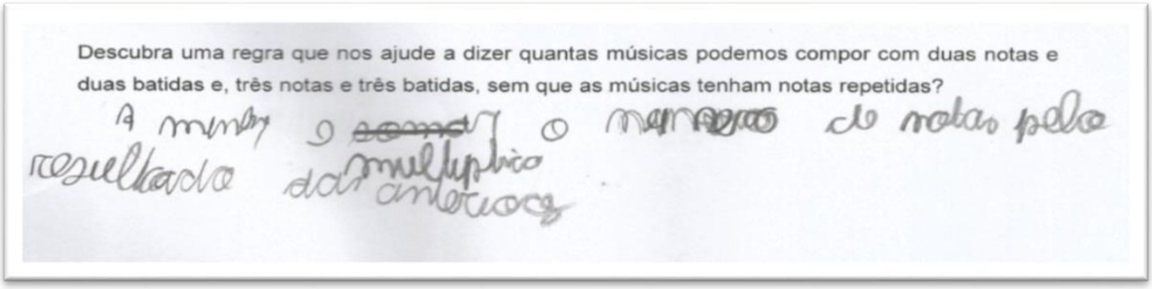
Observamos que essa atividade dispendeu um tempo maior, pois a turma apresentou dificuldades na busca de padrões e no estabelecimento de relações entre número de notas e batidas em uma situação em que não era possível repetir notas.

Acreditamos que essa dificuldade está atrelada a exercícios que apresentam um número maior de músicas. Todavia, é importante trabalhar com questões que apresentam um número maior de possibilidades, pois, assim, eles sentem a necessidade de descobrir regularidades e, a partir disso, de buscar generalizações, o que, a nosso ver, favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Vale ressaltar que não foi possível realizar a socialização do último item da atividade que pedia para determinar o número de músicas com cinco notas e cinco batidas. Essa necessidade de um tempo extra se deve ao fato de que muitos alunos escolheram regras baseando-se na lista de possiblidades em que uma cor era fixada na primeira posição e à medida que aumentava o número de notas, acrescia também o número de músicas. Contudo, a professora mostrou para Manuela e Omi uma maneira de resolver o último item sem a necessidade de usar a lista de possibilidades. Para fazer isso, ela utiliza canetas coloridas para evidenciar quantas possibilidades teríamos em cada casa. Essa estratégia poderia ter sido utilizada no xilofone, porém não sabemos se a dupla conseguiria ter a mesma interpretação.

Outro ponto de destaque foi em relação às generalizações. Diferentemente da Atividade 3, nesta atividade, os alunos só apresentaram duas maneiras de generalizar, uma delas foi a apresentada por Manuela e Omi (Figura 55) e a outra foi a que Hércules havia explicado (Figura 56).

Figura 56 – Registro da regra de Hércules


Descubra uma regra que nos ajude a dizer quantas músicas podemos compor com duas notas e duas batidas e, três notas e três batidas, sem que as músicas tenham notas repetidas?

A [illegible] o ~~soma~~ o [illegible] de notas pelo resultado da multiplicação anterior

Fonte: acervo da pesquisa

A seguir, apresentaremos nossas considerações sobre nossa pesquisa.

CAPÍTULO 5

NOSSOS PRINCIPAIS INDÍCIOS

Neste capítulo, faremos um breve relato de como foi à pesquisa, apresentando o objetivo e nossas respostas para a questão que norteou o estudo. Em seguida, apresentaremos algumas considerações destacando três aspectos: o uso do dispositivo móvel, os estilos de pensamento algébrico na perspectiva de Radford e as práticas Matemáticas para uma turma de inclusão.

5.1 INTRODUÇÃO

O movimento acerca da educação inclusiva é longo. Há, pelo menos, duas décadas, este assunto sem sendo discutido mundialmente. O marco desse movimento é a Declaração de Salamanca (1994). Este documento foi elaborado a partir da Conferência Mundial sobre Educação Especial e apresenta orientações para a inclusão de alunos com necessidades especiais em escolas regulares. A Conferência teve como objetivo discutir e planejar ações para a programação de uma “Educação para todos”.

Para garantir uma “Educação para todos” é preciso repensar nossas escolas. É necessário compreendermos cada criança como única, propiciando situações que sejam favoráveis a todos. Nessa direção, é importante que professores busquem, cada vez mais, conhecer as limitações e as potencialidades de seus alunos para que, assim, consigam desenvolver metodologias que sejam pertinentes a todos.

Dessa forma, essa pesquisa atendeu à necessidade de investigar a contribuição de recursos didáticos no processo de desenvolvimento do pensamento matemático em uma turma inclusiva. Além dessa necessidade, a pesquisa também pôde contribuir para ampliar o número de pesquisas da área, visto que há um número reduzido de pesquisas relacionadas ao ensino de Matemática para alunos com diferentes necessidades. Ao fazer a revisão de literatura, encontramos um número expressivo de pesquisas voltadas para alunos cegos e surdos, e constatamos que há estudos recentes que priorizam os conceitos aritméticos de alunos com diagnóstico de TDAH. Outro fator que merece nossa atenção é o fato de que alunos diagnosticados com Dislexia e Discalculia geram conflitos entre pesquisadores que têm visões antagônicas sobre esses transtornos funcionais específicos.

5.2 O ESTUDO

Diante desse contexto, decidimos trabalhar com uma turma do 6º ano do ensino fundamental, com os alunos organizados em duplas. Os estudantes pesquisados apresentavam diferentes necessidades especiais, dentre elas: TDAH, Dislexia, Síndrome de Irlen e Hemiparesia. Nossa proposta foi a investigação do pensamento aritmético, mais especificamente, investigamos o princípio multiplicativo, sob a perspectiva da combinatória e sua relação com o pensamento algébrico, que é recomendado pelos PCN para essa faixa etária. Para tanto, elaboramos quatro Atividades aplicadas em quatro encontros de aproximadamente 100 minutos cada. As atividades foram realizadas com o apoio do dispositivo móvel (xilofone).

Nossas análises apoiaram-se nos estudos de Radford (2010) e Papert (1980). A contribuição de Radford (2010) nos conduziu a reflexões a respeito dos estilos de pensamento algébrico e os estudos Papert (1980) nos auxiliaram em relação ao uso de tecnologias voltas aos processos de ensino e de aprendizagem.

A metodologia do *Design Experiment* permitiu realizar experimentações de modo a levantar conjecturas. Essa metodologia conta ainda com o processo *iterative design*, que possibilitou que a cada nova “aplicação” os instrumentos fossem aprimorados.

O trabalho realizado foi dividido em cinco ciclos. O primeiro ciclo foi dedicado à elaboração da Atividade e à escolha da tecnologia que seria empregada. Ao concluirmos a elaboração da atividade e escolhermos o dispositivo móvel, o próximo passo foi realizar os estudos pilotos.

O segundo ciclo deu lugar a primeira aplicação das atividades. Essa primeira aplicação ocorreu com nosso grupo de pesquisa, composto por oito professores de Matemática de diferentes segmentos. Nosso objetivo era ter um *feedback* das questões propostas e da estrutura da atividade. Após esse teste, realizamos o primeiro (*re)desing*. O próximo ciclo envolveu duas aplicações, em turmas diferentes. A primeira foi com as alunas da Graduação de Pedagogia e a outra os alunos do sexto ano do ensino fundamental. Novamente, observamos que seria necessário um (*re)desing* e a atividade foi organizada para acontecer em quatro sessões. O quarto ciclo, teve a participação de uma turma do sétimo ano. Nossas análises mostraram que as atividades poderiam ser aplicadas em nosso Estudo Principal. O último ciclo foi a realização da coleta de dados.

O objetivo de nossa pesquisa é investigar os estilos de pensamento algébrico a partir da realização das atividades envolvendo o princípio multiplicativo em uma sala inclusiva. Para isso, a questão que norteou este trabalho foi: *Quais estilos de pensamento algébrico emergem a partir de atividades envolvendo o princípio multiplicativo atrelado às práticas interativas?*

Nesse contexto, é importante salientar que nossa compreensão sobre práticas interativas está relacionada à relação entre as duplas de alunos participantes da pesquisa e entre essas duplas e o xilofone, presente no dispositivo móvel utilizado para esse fim.

Gostaríamos de destacar que a metodologia adotada, nesta pesquisa, foi preponderante para alcançarmos nosso objetivo, pois o fato de podermos aprimorar as atividades antes de aplicá-las foi fundamental. Sem esse processo de (*re)desing* não teríamos conseguido que os alunos resolvessem problemas envolvendo o princípio multiplicativo e muito menos que conseguissem apresentar uma regra.

5.3 NOSSOS PRINCIPAIS INDÍCIOS

Ao realizar nossas análises, constatamos que os resultados apresentaram indícios da influência dos diferentes elementos que constituíram nosso cenário de aprendizagem. Diante disso, nossas discussões foram feitas considerando três desses elementos: o *smartphone*, os estilos de pensamento algébrico e a práticas Matemáticas para uma turma de inclusão.

5.3.1 O papel do recurso móvel – *smartphone*

Para a realização das atividades, os alunos baixaram em seus dispositivos móveis o aplicativo xilofone. Escolhemos essa ferramenta por ela apresentar recursos, como som e cores. Acreditamos que esses recursos facilitaram as reapresentações, além disso, eles validariam ou não as composições (respostas) dadas durante as atividades.

Observamos que algumas duplas utilizaram o dispositivo móvel durante toda a atividade. Ao terminarem de ler os enunciados, eles escolhiam as cores das lâminas e, em seguida, realizavam as composições obedecendo às exigências de cada atividade. Ouvir as composições e observar as repetições das notas foi muito importante, pois era nesse momento que as duplas, muitas vezes, percebiam a repetição de notas e quando isso não era permitido, eles rapidamente comunicavam ao seu parceiro que aquela música não era possível.

Houve duplas que conseguiram determinar o número de músicas feitas utilizando somente o dispositivo móvel, não sentiram a necessidade de registrar no papel suas composições, principalmente quando a atividade envolvia poucas notas musicais.

Identificamos a importância desse recurso no registro das listas de possibilidades, ou seja, os alunos representavam elementos visuais de seus xilofones (cores, letras ou números). Observamos a sintonicidade corporal apresentada por Papert (1980), pois em determinadas situações os alunos deixaram de usar o xilofone para expressar-se por meio de representações imaginárias, usando seus corpos.

Nosso estudo corrobora com o que Allan (2013) aponta sobre o uso dos *smartphones* em sala de aula, pois os dispositivos móveis contribuíram para envolver os alunos em um processo de aprendizagem. Ao levantar possibilidades sobre o uso dessa tecnologia em sala de aula, nos deparamos com o guia que a Unesco produziu e conseguimos observar a influência dos dispositivos móveis para a realização da atividade. Eles auxiliaram no processo de aprendizagem, uma vez que permitiram que os alunos testassem e validassem suas respostas, dando, assim, um *feedback* quase imediato para os alunos. Acreditamos também que foi possível estabelecer uma ponte entre a aprendizagem não formal e a formal, uma vez que, ao criar as músicas e em seguida buscar padrões, os alunos começaram a apresentar o pensamento algébrico.

Enfim, o dispositivo móvel e a sequência das atividades contribuíram para a emergência de diferentes estilos de pensamento algébrico. Fato que discutiremos a seguir.

5.3.2 Os estilos do pensamento algébrico

Radford (2001, 2006, 2010), em seus estudos, apresenta três estilos de pensamento algébrico, o *factual*, o *contextual* e o *simbólico.* Em nossa pesquisa, não esperávamos a emergência do pensamento algébrico *simbólico*, devido à faixa etária dos sujeitos envolvidos em nosso Estudo Principal. Nas atividades, detectamos os estilos de pensamento algébrico *factual, contextual* e a transição entre o *factual* e o *contextual*.

Podemos citar como exemplo da emergência do estilo de pensamento algébrico *contextual,* o envolvimento dos alunos durante a Atividade 1, 2 e 3. Para expressar suas regras, eles utilizaram a língua natural e, além disso, foi possível notar a presença de um índice de indeterminação, como aponta Radford (2001, 2006, 2010), no emprego da palavra *nota*, ou seja, a palavra *nota* é usada para indicar a possibilidade do uso de qualquer número. Radford (2001, 2006, 2010) aponta que esses elementos denotam indícios do pensamento algébrico *contextual*.

Na Atividade 4, foi possível percebermos um nível que situamos na transição do pensamento algébrico *factual* e do *contextual*. Os alunos conseguiram perceber padrões, porém, para escrever suas regras, eles precisaram recorrer à lista de possiblidades. Ou seja, para escrever suas “regras” os alunos recorreram à lista de possibilidades de músicas que começavam por determinada cor, apontando a necessidade do recurso concreto. Tal fato caracteriza o estilo de pensamento algébrico factual; contudo, os alunos identificaram que, ao determinar o número de músicas para esta cor, bastaria multiplicar esse número pelo número de batidas, procedimento relacionado ao estilo de pensamento contextual. Nessa situação, as palavras batidas e/ou notas apresentam indeterminação e, nessa atividade, os valores de ambas eram iguais.

Afora os estilos de pensamento algébrico, conseguimos identificar outros elementos que Radford (2010) aborda em suas pesquisas, como a zona de emergência do pensamento algébrico, as camadas de significação e a indução ingênua*.*

Na Atividade 3, independente das observações em relação ao estilo de pensamento algébrico, conseguimos identificar momentos em que houve a manifestação da zona de emergência do pensamento algébrico, proporcionada pelo diálogo entre as duplas e a professora, bem como pelas atividades propostas. Como no caso de Jubileu, Jack e a professora; nele Jubileu afirma ser necessário multiplicar o número de notas pelo de batidas. No entanto, a operação está incorreta, o erro cometido por ele foi multiplicar o número de notas pelo número de batidas. Naquele instante, a professora fez uma intervenção chamando a atenção de Jubileu para o resultado correto na multiplicação por ele proposta. Após refletir sobre a estratégia adotada, ele reviu seu pensamento percebendo o erro cometido para, então, corrigir e explicar corretamente todo o processo.

Além disso, acreditamos que há evidências do que Radford (2010) denomina camadas de significação não hierárquicas, porém articuladas, que contribuem para o processo de generalização. Prova disto é que Manuela expressa a mesma regra com diferentes expressões, como, por exemplo, número de notas elevado a ele mesmo e, número elevado a ele mesmo. Descobrimos duplas que chegaram à expressão geral por meio de um caso particular de forma errônea, pois suas respostas só eram válidas para casos específicos. Nesse caso, não eram, portanto, algébricas, pois se baseavam no processo de tentativa e erro, o que caracteriza a indução ingênua.

Concluímos que as atividades atreladas às práticas interativas e o uso do xilofone favoreceram a emergência do pensamento algébrico. No próximo item, discutiremos as práticas Matemáticas adotadas para essa pesquisa.

5.3.3 Práticas Matemáticas para uma turma de inclusão

Ao elaborar nossas atividades, tínhamos em mente que elas deveriam atender a um público com características específicas. Por esse motivo, tomamos muito cuidado com o vocabulário adotado, com o tamanho dos enunciados e com os resultados a serem determinados em cada item. Tivemos o foco que essas atividades deveriam ser objetivas e, acima de tudo, motivadoras, pois, de acordo com a literatura, alunos diagnosticados com TDAH tendem a ter dificuldades em realizar tarefas de longa duração e que exijam muita atenção. Os alunos com Dislexia apresentam, também, dificuldades em compreender textos longos. Ao realizar nossas análises, observamos que a duração das tarefas foi longa, aproximadamente 100 minutos, e que dependiam muito de atenção.

Apesar das atividades exigirem bastante atenção, todos os alunos as realizaram com bastante empenho e motivação, principalmente aqueles diagnosticados com TDAH. Tal fato nos leva a crer que eles perdem o interesse pelas atividades quando elas são mecânicas e quando não estimulam o pensamento criativo e livre, ou ainda quando não apresentam nenhuma novidade.

Os momentos de socialização constituíram outro fator que acreditamos que tenha sido fundamental para o sucesso das tarefas. Naquelas ocasiões, a participação dos alunos era primordial, uma vez que eles eram convidados a representar a listas por meio de encenações ou, até mesmo, eles eram os responsáveis por registar, no quadro, a resposta apresentada pelas duplas. Durante essas discussões, eles podiam validar suas respostas e, muitas vezes, corrigi-las para mais tarde encontrar uma generalização que atendesse as atividades. Foi importante respeitar o tempo de cada dupla. Alguns alunos são mais rápidos que os outros e houve compreensão mútua, pois as duplas entendiam que sem o grupo ter terminado as atividades não seria possível realizar a socialização.

O quesito tempo também foi preponderante em algumas atividades. Nas atividades 2 e 4, acreditamos que seja necessário um tempo maior para as socializações, pois a discussão entre os alunos é essencial para que eles consigam compreender como determinadas duplas chegaram aos resultados socializados. Em nossa pesquisa, nessas duas atividades, o tempo determinado não foi suficiente para discutir todas as tarefas propostas. Contudo, essa “falta” de tempo não prejudicou o entendimento dos alunos em relação às atividades.

No geral, percebemos que a estrutura e a sequência adotadas para a realização das sessões contribuíram muito para o desenvolvimento das atividades. O fato de adotarmos dois personagens, que poderiam ser qualquer aluno ou pessoa, e a eles atribuirmos a repetição ou não de notas, ajudou na realização das atividades, pois os alunos associaram rapidamente a repetição de notas ao João e a não repetição de notas a Marcos. Acreditamos também que o fato de trabalharmos primeiramente com tarefas que permitiam a repetição de notas e depois com as tarefas que não permitiam repeti-las ajudou muito. Alguns alunos conseguiram perceber as relações entre as atividades e muitas regras foram desenvolvidas pela ajuda de outras, como no caso da atividade 3. Determinados alunos observaram que a diferença entre a atividade 1 e 3 era a repetição de notas, sendo assim, a regra da atividade 3 seria a regra da atividade 1 menos o número de notas, o que gerava a repetição. Além disso, os alunos, à medida que trabalhavam nas atividades, buscavam refinar suas listas, ou seja, eles foram criando estratégias para facilitar seus registros e, desse modo, determinarem suas respostas de forma mais rápida.

5.3.4 Inclusão

Nosso trabalho foi idealizado para atender alunos com necessidades educacionais especiais. Esse atendimento foi realizado por meio de práticas interativas e pelo uso do xilofone, visando investigar os estilos de pensamento algébrico, mobilizados diante da realização de atividades envolvendo o princípio multiplicativo.

De acordo com os PCN – Adaptações Curriculares, é preciso realizar alguns ajustes para atender as demandas dos alunos, entre elas “adotar metodologias diversas e motivadoras” (BRASIL, 1998, p.18). Esse foi um dos pontos principais em nosso trabalho, pois procuramos proporcionar aos alunos atividades com uma metodologia diferenciada, que possibilitasse a criação de uma situação a ser vivenciada. Durante o estudo, observamos que investigações voltadas a alunos com necessidades educacionais especiais destacam a relevância de estimular diferentes sentidos do corpo. Razão pela qual optamos por selecionar atividades e recursos adequados que estimulassem a visão, audição e o tato, além de explorar a música que desperta, motiva e sensibiliza os alunos.

Com esse pensamento, aplicamos as quatro atividades distribuídas em quatro encontros com o mesmo período de duração. Os alunos foram agrupados em duplas aleatórias, escolhidas por afinidade entre eles, sem a intervenção da professora/pesquisadora. O fato de utilizarmos um recurso tecnológico associado à música contribuiu para a participação ativa de todos e para a motivação de todos, fatores considerados essências à aprendizagem. Este estudo trouxe à tona a perspectiva de elaborar atividades que favoreçam e estimulem mais sentidos do corpo no processo ensino aprendizagem de alunos com ou sem necessidades educacionais especiais.

Exercer as funções de professora e pesquisadora proporcionou experiências inesquecíveis e que fizeram perceber a importância de ser um professor “antropólogo” como apresentou Papert (1980). É imprescindível que nós, professores, propiciemos um ambiente rico em experiências e ferramentas; porém, é preciso deixar que os alunos tomem suas decisões e busquem estratégias para solucionar seus problemas, além de, acima de tudo, é fundamental que saibamos respeitar as diferenças de cada criança.

5.4 PRÓXIMOS DESAFIOS

Deixamos com sugestão para futuras pesquisas a continuidade deste trabalho com outros anos escolares do ensino fundamental, aumentando a complexidade das atividades. Outra possibilidade seria aplicar o estudo em um grupo maior, em que pudessem ser comparados os resultados encontrados por diferentes duplas; ou até mesmo ser explorado no ensino médio para o ensino de Análise combinatória. Além disso, sugerimos que continuem os trabalhos ligados à inclusão. A realização da pesquisa nos possibilitou deparar com um trabalho diferenciado, repleto de inúmeras reflexões, que acreditamos servirão para fomentar novas pesquisas nessa área.

REFERÊNCIAS

AMERICAN SPEECH LANGUAGE HEARING ASSOSCIATION: (Central) Auditoru Processing Disorders. Disponível em: < http://www.asha.org/policy/TR2005-00043/#sec1.3>. Acesso em 08 jul. 2015.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DO DÉFICIT DE ATENÇÃO: O que é o TDAH. Disponível em: <http://www.tdah.org.br/br/sobre-tdah/o-que-e-o-tdah.html>. Acesso em: 23 jul. 2013.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE DISLEXIA: Definição da Dislexia. Disponível em: <http://www.dislexia.org.br/2012/03/08/dislexia/>. Acesso em: 23 jul. 2013.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE PARALISIA CEREBRAL: Paralisia Cerebral – Perguntas e Respostas. Disponível em: <http://www.paralisiacerebral.org.br/saibamais05.php> Acesso em: 21 abril 2014.

ASSOCIAÇÃO DE DEFICIENTES AUDITIVOS, PAIS, AMIGOS E USUÁRIOS DE IMPLANTE COCLEAR. Conheça o DPAC – Distúrbio do Processamento Auditivo Central. Disponível em: <http://www.adap.org.br/site/index.php/artigos/161-conheca-o-dpac-disturbio-do-processamento-auditivo-central>. Acesso em 08 jul. 2015

ALVES, A. C. **Uma introdução ao pensamento combinatório no 9º ano do ensino fundamental.** 2010. 158 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

ALLAN, L.M. **A proibição do celular nas escolas faz sentido?** 30/07/2013. Disponível em: <http://porvir.org/porpensar/proibicao-celular-nas-escolas-faz-sentido/20130730> Acesso em: 13 jun. 2014.

AZEVEDO, J. **Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades:** É melhor no papel ou no computador? 2013. 127 f. Dissertação (Mestrado em Educação e Tecnologia) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

AZEVEDO, J; BORBA, R. Construindo árvores de possibilidades virtuais: o que os alunos podem aprender discutindo relações combinatórias? **Revista Eletrônica de Educação.** São Carlos, 2013. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/740 > Acesso em: 28 jul. 2014.

BASIL, Carmen. Os alunos com paralisia cerebral e outras alterações motoras. In: COLL,C. (Org.). **Desenvolvimento psicológico e educação**: Transtornos de desenvolvimento e necessidades educativas especiais. 2.ed. Porto Alegre: Artmed, 2004. cap.11, p. 215-233.

BORBA, Marcelo de C.; PENTEADO, Mirian G. **Infómática e Educação Matemática**. 5ªed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. 99 p.

BRASIL. **Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística**. Sala de Impressa. Disponível em: <http://saladeimprensa.ibge.gov.br/noticias?view=noticia&id=1&busca=1&idnoticia=2382 >. Acesso em: 13 jun. 2014.

BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Adaptações Curriculares / Secretária de Educação Fundamental. Secretária de Educação Especial. – Brasília: MEC/SEF/SEESP, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes nacionais para a educação especial na educação básica**/ Secretária de Educação Especial – MEC; SEESP, 2001.

BRASIL. Secretária de Educação Especial. **Projeto Escola Viva** – Garantindo o acesso e permanência de todos os alunos na escola – Alunos com necessidades especiais. - Brasília. MEC/SEESP, 2002.

CAPELLINI, Simone Aparecida et al. Desempenho em consciência fonológica, memória operacional, leitura e escrita na dislexia familial. **Revista Pró-Fono,** Barueri, v. 19, n.4, p. 374-380, out./dez. 2007. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-56872007000400009> Acesso em: 13 jan. 2014.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Lições de álgebra e análise.** 3. ed. Lisboa: Lisboa, 1956.

CARDOSO, Luiz Fernandes. **Dicionário de matemática.** Rio de Janeiro: Lexikon Editora Digital; Documentação Histórica Editora, 2007. 534 p.

CARVALHO, Ana Maria; REIS, Idalci; NORI, Marina. **Problemas na educação matemática no ensino fundamental por fatores de dislexia e discalculia**. Disponível em: <http://rioverde.ifgoiano.edu.br/periodicos/index.php/vidadeensino/article/view/124 > Acesso em: 06 fev. 2014.

COBB, Paul; CONFREY, Jere; diSESSA, Andrea; SCHAUBLE, Leona. Design Experiments in Education Research. **Educational Researcher**, v.32, n.1, 2003.

COLLINS, Allan; JOSEPH, Diana; BIELACZYC, Katerine. Design Research: Theoretical and Methodological Issues. **Journal of the Learning Sciences**. v. 17, nov. 2009. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1207/s15327809jls1301_2#.VFwZuPnF-So > Acesso em: 22 jan. 2014.

COELHO, Diana Tereso. **Dislexia, Disgrafia, Disortografia e Discalculia**. Disponível em < http://www.ciec-uminho.org/documentos/ebooks/2307/pdfs/8%20Inf%C3%A2ncia%20e%20Inclus%C3%A3o/Dislexia.pdf > Acesso em: 08 jan. 2014.

COSTA, A; DORNELES, B; ROHDE, L. Identificação dos Procedimentos de Contagem e dos Processos de Memória em Crianças com TDAH. **Revista Psicologia,** Porto Alegre, v.25, n.4, p.791-801, 2012. Disponível em < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-79722012000400019 > Acesso em: 2 set. 2013.

COX, Kenia Kodel. Possíveis Vantagens do uso da Informática na Escola. In:______. **Informática na Educação Escolar.** São Paulo: Autores Associados, 2003. cap.: 4, p 53-72.

DANTE, Luiz Roberto. Estatística, Combinatória e Probabilidade: Combinatória: métodos de contagem. In: DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris:** Matemática. São Paulo: Ática, 2012. Cap. 9, p. 336.

FAUSTINO, T. A. S; O desenvolvimento do pensamento algébrico em uma sala inclusiva usando uma tecnologia móvel. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIV, 2014, Recife. **Anais....** No prelo.

FERNANDES, S. H. A; HEALY, L. Expressando generalizações em Libras: álgebra nas mãos de aprendizes surdos. **Cadernos CEDES** (impresso), Campinas, v.33, n. 91, p.349 – 368, set./dez. 2013.

FERRAZ, M; BORBA, R; AZEVEDO, J. Usando software Árbol na construção de árvores de possibilidades para resolução de problemas combinatórios. In: ENCONTRO NACIONAL EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CULTURA E DIVERSIDADE, X, 2010 Salvador (BA), **Anais ....** Salvador, 2010.

GARCIA, Jesus Nicassio. **Manual de dificuldades de aprendizagem:** linguagem, leitura, escrita e matemática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998, 274 p.

GIUDICE, Patrícia. Escolas e professores se rendem aos celulares e outras mídias eletrônicas**. Jornal Estado de Minas**, Belo Horizonte, 18 nov. 2012. Disponível em <http://www.em.com.br/app/noticia/especiais/educacao/2012/11/18/internas_educacao,330468/escolas-e-professores-se-rendem-aos-celulares-e-outras-midias-eletronicas.shtml> Acesso em: 25 jun. 2014.

GUIMARÃES, Márcia. **Síndrome de Irlen**. Disponível em: <http://www.dislexiadeleitura.com.br/downloads/artigo.dra.marcia.revista.sindrome.pdf > Acesso em: 21 abril 2014.

MOURA, Adelina. Geração Móvel: um ambiente de aprendizagem suportado por tecnologias móveis para a “Geração Polegar”. In: DIAS, P.;, OSÓRIO, A.J. (Orgs.) **Actas da IV Conferência Internacional de TIC na Educação Challenges** / Desafios 2009. Braga: Universidade do Minho. 50 – 78.

MINAS GERAIS (estado). **Lei nº 14.486, de 9 de dezembro de 2002.** Disponível em: < http://www.camara.gov.br/sileg/integras/143653.pdf > Acesso em: 20 de jun. 2014.

MIRANDA, Ana; ALBA, Amanda; TAVERNER, Rafaela. **Dificuldades em el aprendizaje de matemáticas em niños com transtorno por déficit de atención e hiperactividad**. Disponível em < http://tdahcantabria.es/documentos/uS02S163.pdf> Acesso em: 15 out. 2013.

ORJALES,I. Déficit de Atenção/Hiperatividade: Diagnóstico e Intervenção. In: GONZÁLES, E. et al. **Necessidades educacionais específicas intervenção psicoeducacional**. Porto Alegre: Artmed, 2007 p.295 – 319. Cap.14 Tradução de: Daisy Vaz Moraes.

PAPERT, S. **Logo computadores e educação.** Tradução de José Armando Valente, Beatriz Bitelan e Afira V. Ripper. São Paulo: Brasiliense, 1986.

PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças:** repensando a escola na era da informática. Tradução Sandra Costa – Ed. rev. – Porto Alegre : Artmed, 2008. p. 224.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos. **Quem dança com quem:** O desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio. 2009. 267 f. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009. Disponível em <http://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4189 >. Acesso em: 15 ago. 2014.

PESSOA, C; SANTOS, L. Alunos do 5º ano do ensino fundamental resolvendo problemas de produto cartesiano e arranjo. In: VII ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2012, João Pessoa. **Anais...** João Pessoa, PB, 2012.

PESSOA, C; SANTOS, L; SILVA, M. Colar ou escrever? Alunos do 5º ano do ensino fundamental discutindo combinatória a partir da resolução de problemas com material manipulativo ou com lápis e papel. In: ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL DO NORTE E NORDESTE – XXI EPENN, 2013, Recife. **Anais…**, Recife, PE, 2013.

RADFORD, L. Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. In: **Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Matematics Education**, Marja van den Hueuvel-Panhuizen (ed.), Freudental Institute, Utrecht University, The Netherlands, Vol. 4, pp. 81-88, 2001.

RADFORD, L. Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In: ALATORRE S.,; CORTINA, J. L.;, SÁIZ, MÉNDEZ, M., A. (Eds.). **Proceedings of the 28th Conference of the International Group the Psychology of Mathematics Education**, North American Chapter, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, November 9 – 12, Vol. 1, pp. 2 – 21, 2006.

RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perpective. In: DURAND-GUERRIER, V. S.; SOURY-LAVERGNE, F.; ARZARELLO, F (Eds.), **Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 6**) (pp. XXXIII – LIII). Université Claude Bernard, Lyon, France, 2010a.

RADFORD, L. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA**, v.4, n.2, p.31-62, 2010b.

RADFORD, L. On the development of algebraic thinking**. PNA**, n. 64, v.1, 117 – 133, 2012.

SÁNCHEZ, E. A linguagem escrita e suas dificuldades: uma visão integradora. In: COLL, C. (Org.). **Desenvolvimento psicológico e educação**: Transtornos de desenvolvimento e necessidades educativas especiais. 2.ed. Porto Alegre: Artmed, 2004. cap.3, p. 90-112.

SANTOS, L; PESSOA, C. Ensinando combinatória em uma turma do 5º ano do ensino fundamental. In: ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL EM PERNANBUCO, IV, 2012, Caruaru. **Anais...,** Caruaru, PE, 2012.

SILVA, Wiliam**. Discalculia:** Uma abordagem à luz da educação matemática. Disponível em <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Silva.pdf > Acesso em 09 jan. 2014.

SIMITH, Deborah Deutsch. Deficiências Físicas e Necessidades de Cuidados Especiais de Saúde. In:______. **Introdução à educação especial**: ensinar em tempos de inclusão. 5ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2008. p. 261-295 cap. 9 Tradução de: Sandra Moreira de Carvalho.

SYPCZUK, Giselle Kubrusly. Sinais e sintomas da desordem do processamento auditivo. Disponível em: <http://www.neuropediatria.org.br/index.php?option=com_content&view=article&id=97:sinais-e-sintomas-da-desordem-do-processamento-auditivo&catid=59:transtorno-de-aprendizagem-escolar&Itemid=147 >. Acesso em 08 jul. 2015.

TUMA, Rogério. Na sala de aula, não! **Revista Carta Capital**, 30 de out. 2013. Disponível em < http://www.cartacapital.com.br/revista/772/na-sala-de-aula-nao-3798.html > Acesso em: 25 jun. 2014.

UNESCO. Diretrizes de políticas para a aprendizagem móvel**.** 2013. Disponível em: <http://www.unesco.org/new/pt/brasilia/about-this-office/single-view/news/diretrizes_de_politicas_da_unesco_para_a_aprendizagem_movel_pdf_only/#.U_K5DvldWSo> Acesso em: 20 jun. 2014.

VÍLCHEZ, Luis Fernando. Transtornos do Pensamento e da Linguagem: Tratamento Educacional. In: GONZÁLES, E. et al. **Necessidades educacionais específicas intervenção psicoeducacional**. Porto Alegre: Artmed, 2007 p.154 – 170. Cap.8 Tradução de: Daisy Vaz Moraes.

VITAL, Marisa; HAZIN, Izabel. **Avaliação do desempenho escolar em matemática de crianças com transtorno de déficit de atenção/hiperatividade** (TDAH): um estudo piloto. Disponível em: <http://www.cienciasecognicao.org/pdf/v13_3/m318301.pdf > Acesso em: 4 set. 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A – VERSÃO 1 DAS ATIVIDADES

João adora música e por isso ganhou de sua mãe um xilofone. Seu xilofone é composto por 8 lâminas (notas) e, como esperado, cada uma emite um som diferente e tem uma cor diferente.

Sendo assim é possível compor várias músicas.

Escolha duas notas. Usando apenas estas duas notas descubra quantas músicas diferentes João pode tocar. Registre todas as diferentes músicas de João.

Faça o mesmo para 3 notas.

Como vocês verificaram que tocaram todas as diferentes músicas com suas 3 notas?

Você poderia dizer quantas músicas diferentes João poderia compor com 4 notas? Registre todas as músicas diferentes

Você poderia dizer quantas músicas diferentes João poderia compor com 5 notas?

Marcos, amigo de João, pensou fazer músicas que não tivessem notas repetidas. Ele pediu emprestado o xilofone de 8 notas e começou a compor músicas.

Escolha duas notas. Usando apenas estas duas notas descubra quantas diferentes músicas Marcos pode tocar. Registre todas as diferentes músicas de Marcos

Faço o mesmo para 3 notas.

Como vocês verificaram que tocaram todas as diferentes músicas com suas 3 notas?

Você poderia dizer quantas músicas diferentes Marcos poderia compor com 4 notas? Registre todas as músicas diferentes.

Você poderia dizer quantas músicas diferentes Marcos poderia compor com 5 notas?

Desafio

Agora você é o compositor. Seu desafio é determinar quantas músicas diferentes você pode tocar usando 3 notas diferentes escolhidas entre as 8 do xilofone.

APÊNDICE B – VERSÃO 2 DAS ATIVIDADES

João adora música e por isso ganhou de sua mãe um xilofone. Seu xilofone é composto por 8 notas (lâminas) e, como esperado, cada uma emite um som diferente e tem uma cor diferente. Sendo assim é possível compor várias músicas.

Escolha duas notas. Usando apenas estas duas notas (e dois toques) descubra quantas músicas diferentes João pode tocar. Registre todas as diferentes músicas de João.

Escolhendo três notas e usando apenas estas notas (e três toques) quantas diferentes músicas João pode tocar? Registre todas as diferentes músicas de João.

Como podemos ter certeza que tocamos todas as diferentes músicas com as 3 notas escolhidas?

____

____

____

Depois de perceber que era possível compor diferentes músicas João começou a colocar algumas regras para criar suas músicas. Ele escolheu então 3 notas do xilofone e começo a criar músicas somente usando somente dois toques. Descubram quantas diferentes músicas João pode tocar. Registrem todas as diferentes músicas de João

E se com as mesmas 3 notas, quantas músicas de 4 toques poderão ser feitas? Registre todas as diferentes músicas de João

Marcos, amigo de João, pensou fazer músicas que não tivessem notas repetidas. Ele pediu emprestado o xilofone de 8 notas e começou a compor músicas.

Escolha duas notas e usando apenas estas duas notas (e 2 toques) descubra quantas diferentes músicas Marcos pode tocar. Registre todas as diferentes músicas de Marcos.

Faça o mesmo usando 3 notas para compor músicas com 3 toques.

Como vocês verificaram que tocaram todas as diferentes músicas com suas 3 notas?

____

____

Vocês poderiam dizer quantas músicas diferentes Marcos poderia compor com 4 notas? Registre todas as músicas diferentes.

Vocês poderiam dizer quantas músicas diferentes Marcos poderia compor com 5 notas?

Assim como João, Marcos resolveu fixar o número de notas que cada música poderia ter, lembre-se que as músicas de Marcos nunca tem notas repetidas. Desta forma quantas músicas de 3 notas Marcos pode compor com apenas 2 toques? Registrem todas as diferentes músicas que Marcos pode compor.

E se forem 4 notas? Registrem todas as diferentes músicas com 3 toques que Marcos pode compor.

Vocês podem dizer quantas músicas diferentes Marcos poderia compor com 5 notas e 3 toques?

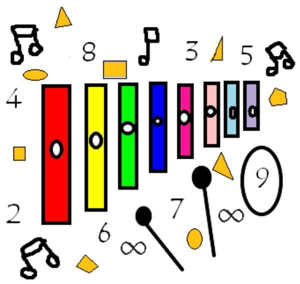
Vocês poderiam dizer quantas músicas diferentes João poderia compor escolhendo somente 4 notas (e 4 toques)?

Vocês poderiam dizer quantas músicas diferentes João poderia compor escolhendo 5 notas (e 5 toques)?

Desafio!

Agora vocês são os compositores. O desafio é determinar quantas músicas diferentes vocês podem tocar usando 3 notas diferentes (e 3 toques) escolhida entre as 8 do xilofone.

APÊNDICE C – CONJUNTO DE ATIVIDADES



Matemática e música

Nome:____ **Idade**_________

Nome:____ **Idade**_________

Atividade 1 **Data:**__________

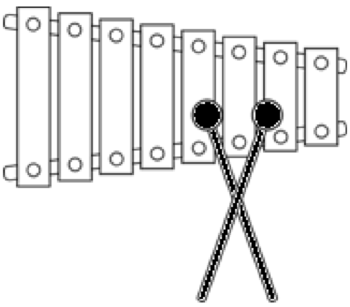
João adora música e por isso ganhou de sua mãe um xilofone. Seu xilofone é composto por 8 lâminas (notas) como o da figura. Cada uma delas tem uma cor diferente e um som diferente e, batendo nelas (tocando), João pode compor várias músicas.

Você vai ser o músico agora e fazer algumas experiências que João imaginou.

A primeira ideia que ele teve foi escolher duas notas e compor músicas com duas batidas. Pinte as lâminas com as duas cores que você escolheu no seu xilofone e faça todas as músicas possíveis. Depois responda:

Quantas músicas João poderá compor? ____

Desenhe ou escreva todas as músicas que ele poderá fazer.

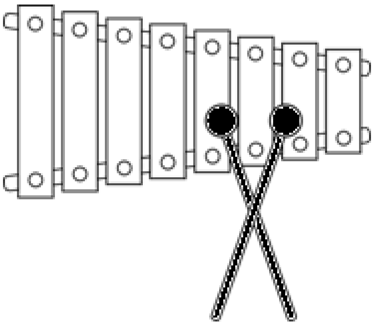


Depois ele escolheu três notas para compor **uma música com duas batidas**.

Pinte as três lâminas que você escolheu e faça todas as músicas possíveis.

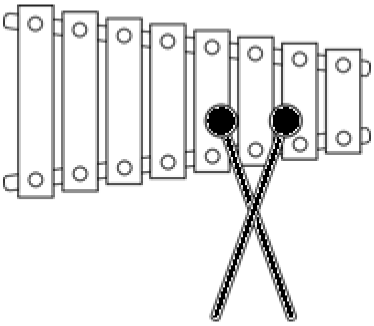
Quantas músicas João compôs agora? ____

Desenhe ou escreva todas as músicas que ele fez.



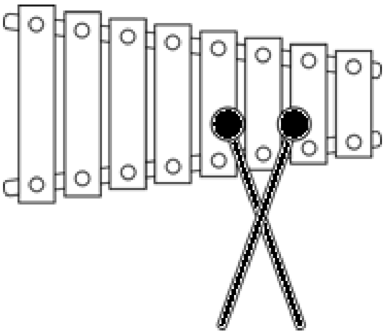
E se agora fossem quatro notas, quantas músicas diferentes, com duas batidas, João poderia compor?

____

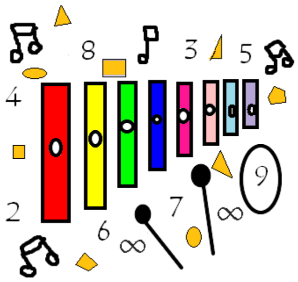


O desafio para você agora é responder quantas músicas João poderia compor escolhendo cinco notas e duas batidas? ____

Como vocês chegaram nessa resposta?



Descubra uma regra que nos ajude a dizer quantas músicas podemos compor com quantas notas quisermos e apenas duas batidas? _______________________________________



Matemática e música

Nome:____ **Idade**_________

Nome:____ **Idade**_________

<u>Atividade 2</u> **Data:**__________

João já havia descoberto quantas músicas ele poderia compor com duas batidas e resolveu investigar quantas músicas poderiam ser feitas variando o número de batidas.

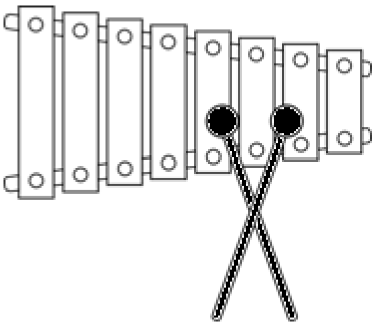
Agora é com você!

Escolha duas notas e pinte no xilofone da figura as que você escolheu.

Descubra quantas músicas diferentes João pode tocar usando essas notas e somente duas batidas. Escreva todas as músicas possíveis e depois responda:

Quantas músicas João poderá compor? ________________.

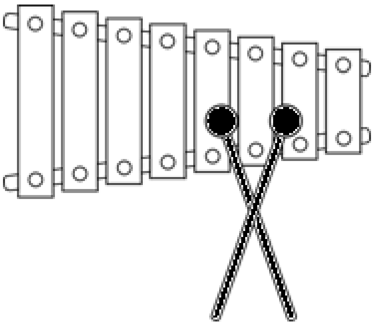
Escreva todas as músicas que ele fez.



Vamos escolher três notas agora e vamos usar três batidas.

Pinte as notas que você escolheu e diga quantas músicas diferentes João pode tocar? ____

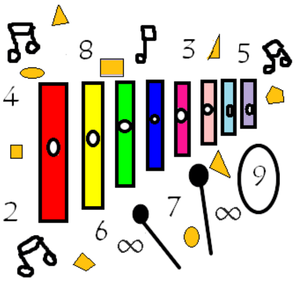
Escreva todas as músicas que ele pode fazer.



Descubra uma regra que nos ajude a descobrir quantas músicas podemos compor com duas notas e duas batidas e com três notas e três batidas?

Usando a regra que você escreveu, você consegue descobrir quantas músicas podemos compor com quatro notas e quatro batidas? ____

Mostre como!



Matemática e música

Nome:____ **Idade**________

Nome:____ **Idade**________

Atividade 3 **Data:**__________

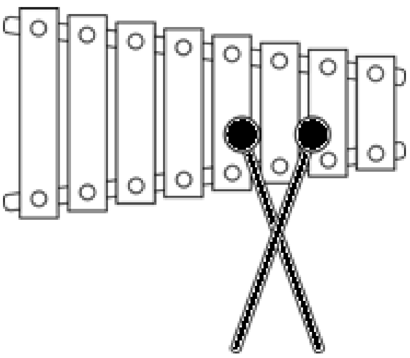
Marcos, amigo de João, pensou fazer músicas que **não** tivessem **notas repetidas**. Ele pediu emprestado o xilofone de 8 notas e começou a compor músicas.

A primeira ideia que ele teve foi escolher duas notas e compor uma música com duas batidas, mas desta vez as músicas não podem ter notas repetidas.

Pinte as lâminas com as duas cores que você escolheu no seu xilofone e faça todas as músicas possíveis. Depois responda:

Quantas músicas Marcos poderá compor? ____________

Escreva todas as músicas que ele fez.

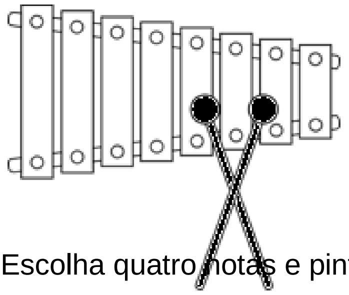


Agora você escolhe três notas para Marcos compor músicas com duas batidas. Lembre-se que uma música não pode ter notas repetidas.

Quantas músicas Marcos poderá compor?

____

Pinte as cores que você escolheu no desenho e escreva todas as músicas que Marcos fez.

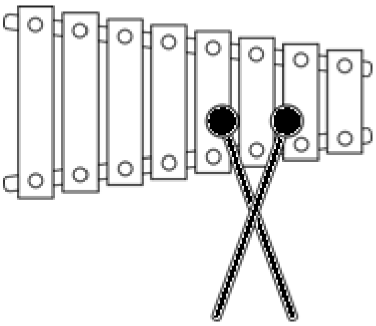


Escolha quatro notas e pinte as lâminas com as cores que você escolheu.

Quantas músicas diferentes Marcos poderá compor com quatro notas e duas batidas?

____

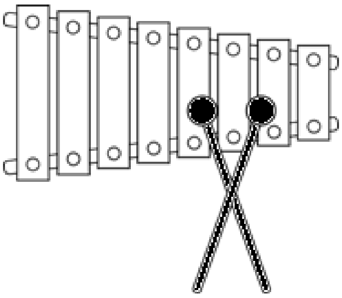
Escreva todas as músicas que ele fez.



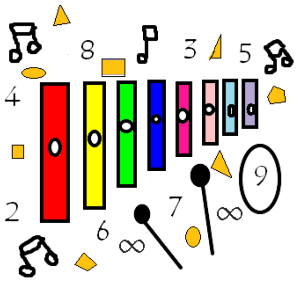
O desafio para você agora é responder quantas músicas João poderia compor escolhendo cinco notas e duas batidas?

____

Como vocês chegaram nessa resposta?



Descubra uma regra que nos ajude a descobrir quantas músicas podemos compor com quantas notas quisermos e apenas duas batidas, mas desta vez sem repetir notas.



Matemática e música

Nome:____ **Idade**_________

Nome:____ **Idade**_________

<u>Atividade 4</u> **Data:**__________

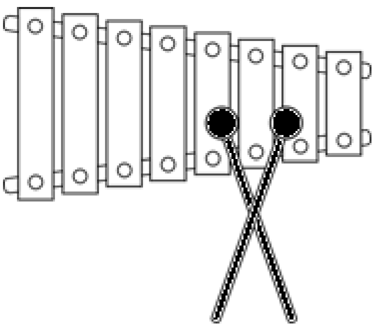
Marcos estava muito empolgado com suas composições e por isso resolveu modificar a regra. Agora ele iria compor músicas que tivessem número de batidas variadas.

Atenção!!!! Marcos não gosta de repetir notas em suas músicas

Escolha duas notas e pinte as lâminas com as cores que você escolheu.

Quantas músicas diferentes Marcos poderá compor com duas notas e duas batidas? _________________________

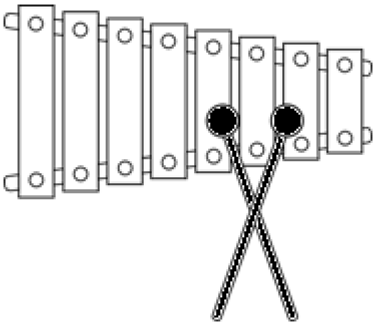
Escreva todas as músicas que Marcos poderá compor



Escolha três notas e pinte as lâminas com as cores escolhidas.

Quantas músicas diferentes poderemos compor com três notas e três batidas, lembrando que não podemos repetir notas em uma mesma música? ____

Escreva todas as músicas diferentes que você poderá compor.



Descubra uma regra que nos ajude a dizer quantas músicas podemos compor com duas notas e duas batidas e, três notas e três batidas, sem que as músicas tenham notas repetidas?

Agora usando a regra descrita acima descubra quantas músicas diferentes Marcos pode fazer com quatro notas e quatro batidas?

ANEXOS

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título da Pesquisa: ***O ensino do raciocínio combinatório utilizando celular em uma sala inclusiva***

Pesquisador Responsável: **Profa. Dra. Solange H. A. A. Fernandes**

Pesquisadora: Talita Araújo Salgado Faustino

Instituição a que pertence o Pesquisador Responsável: **Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN)**

Telefones para contato: **(11) 2967-9119**

As informações a seguir estão sendo fornecidas para sua participação neste estudo, o qual tem como objetivo desenvolver e avaliar ambientes tecnológicos para aprendizagem matemática. O projeto visa promover ambientes de inclusão nas aulas da Matemática, permitindo que alunos com necessidade educacionais especiais tenham acesso aos mesmos conteúdos matemáticos dos seus pares. Consideramos que a contribuição fundamental do projeto é o desenvolvimento de recursos e atividades de aprendizagem matemática para instrumentalizar uma matemática escolar mais inclusiva, e consequentemente produzir conhecimentos na área de Educação Matemática.

Os dados do projeto serão obtidos através de uma sessão de trabalho na qual os participantes resolverão atividades matemáticas em grupos. O material coletado durante as sessões, as atividades realizadas, as gravações de áudio e vídeo, as transcrições e os registros escritos, serão de uso exclusivo do grupo de pesquisa, podendo ser utilizados somente em publicações e eventos acadêmicos. Esse material servirá como base para procurar entender melhor a relação entre os processos de aprendizagem e os campos sensoriais.

Os participantes terão seus nomes trocados por pseudônimos preservando a identidade dos sujeitos. Menção à instituição onde as atividades serão realizadas somente mediante a autorização da mesma. O cronograma das atividades será organizado de modo que não prejudique outras atividades escolares, sendo realizadas durante as aulas de matemática. Assim, esperamos que sua participação resulte em avanços de conhecimentos, sendo positivo não apenas para os participantes como, também, para a comunidade que eles pertencem.

Os resultados dessa pesquisa poderão ser utilizados pelos pesquisadores em publicações em periódicos, livros, eventos científicos, cursos e outras divulgações acadêmico-científicas. A veiculação de imagem dos sujeitos em divulgações científicas só será realizada com consentimento dos envolvidos.

Em qualquer etapa do estudo, o sujeito participante da pesquisa terá acesso aos responsáveis pela pesquisa. Para eventuais dúvidas ou esclarecimentos sobre os procedimentos ou a ética da pesquisa entre em contato com a pesquisadora responsável na UNIBAN – Campus de Maria Cândida, sito à Rua Maria Cândida, 1.813 - São Paulo - SP, telefones (11) 2967-9119

A qualquer participante é garantida a liberdade da retirada de seu consentimento para participação da pesquisa, quando lhe convier.

Não há despesas pessoais para o participante em qualquer fase do estudo, assim como não há compensação financeira relacionada à sua participação.

Eu,____,RG nº ________________________, responsável legal por ______________________________________, RG nº ______________________ declaro estar suficientemente informado a respeito das informações que li acima, ou que foram lidas para mim, a respeito do projeto **O ensino do raciocínio combinatório utilizando celular em uma sala inclusiva**. Ficaram claros para mim quais são os propósitos do estudo, os procedimentos, as garantias de confidencialidade e autorizo a veiculação dos resultados para os usos mencionados. Está claro também que minha participação é isenta de qualquer tipo de despesas. Assim sendo, concordo em participar deste estudo e poderei retirar o meu consentimento a qualquer momento, antes ou durante o mesmo, sem penalidades ou prejuízo para mim e sem prejuízo para a continuidade da pesquisa em andamento.

Belo Horizonte, _____ de ____________ de _______

Assinatura do sujeito de pesquisa/representante legal

Assinatura da pesquisadora responsável

Assinatura da testemunha

Assinatura da testemunha

Declaro que obtive de forma apropriada e voluntária o Consentimento Livre e Esclarecido deste sujeito de pesquisa ou representante legal para a participação neste estudo.

Assinatura do responsável pelo estudo

Data ____/_____/_____