

**UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO**

**DINÁ DA SILVA CORREIA**

**O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DE PROFESSORES QUE  
ENSINAM AS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS**

**DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**SÃO PAULO**

**2018**

**UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO**

**DINÁ DA SILVA CORREIA**

**O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DE PROFESSORES  
QUE ENSINAM AS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS**

Tese elaborada sob a orientação da Professora **Dra. Angélica da Fontoura Garcia Silva** e apresentada à Banca Examinadora do Programa de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN/SP como exigência parcial para obtenção do título de **Doutora em Educação Matemática**

**SÃO PAULO**

**2018**

Ficha Catalográfica elaborada por:  
Bibliotecária Roselaine R. de Bastos Novato CRB/8 9676

C847d Correia, Diná da Silva.

O desenvolvimento profissional de professores que ensinam as estruturas multiplicativas. / Correia, Diná da Silva. – São Paulo, 2018.

199 f.: il.; 30 cm

Tese (Programa de Pós-graduação em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós-graduação - Universidade Anhanguera de São Paulo, 2018.

Orientadora: Profa. Dra. Angélica da Fontoura Garcia Silva

1. Estruturas multiplicativas. 2. Desenvolvimento profissional docente. 3. Grupo de estudos. 4. Processo formativo. I. Título. II. Anhanguera Educacional

CDD 372.7

**DINÁ DA SILVA CORREIA**

**O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DE PROFESSORES  
QUE ENSINAM AS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS**

Aprovada em 30 de agosto de 2018

**Banca Examinadora**

Profa. Dra. Angélica da Fontoura Garcia Silva (Orientadora)  
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN/SP

Profa. Dra. Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana  
Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC/BA

Profa. Dra. Teresa Cristina Etcheverria  
Universidade Federal de Sergipe – UFS

Profa. Dra. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão  
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN/SP

Profa. Dra. Maria Elisabette Brisola Brito Prado  
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN/SP

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

*Diná da Silva Correia*

Este trabalho é resultado de  
um comprometimento diário com Deus e sua Doce companhia,  
que substituiu a ausência provocada pela distância de quem amamos.  
Por isso, o dedico à minha família:  
Ivan Carlos, meu amado esposo;  
Ivea , Dérik e Irwing, meus filhos queridos e  
bênçãos de Deus em minha vida.

## **AGRADECIMENTOS**

---

A Deus, por tudo o que me proporcionou em todos os momentos da minha vida.

Aos meus pais, José Gomes da Silva (in memoriam) e Terezinha Gonçalves da Silva (in memoriam), pelos valores éticos ensinados.

Ao meu amado esposo Ivan, que em todas as minhas idas e vindas a São Paulo, me abençoou com seu companheirismo e compreendeu minhas ausências. Obrigada.

Aos meus filhos, Iveja, Dérik e Irwing, por fazerem parte desse desafio, o qual ao vencê-lo foi fruto do cuidado de cada um de vocês. Muito obrigada.

A Universidade Anhanguera de São Paulo, aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, pela competência e compromisso com a formação de professores de matemática no país.

À Banca examinadora composta pela Profa. Dra. Angélica da Fontoura Garcia Silva, Profa. Dra. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão, Profa. Dra. Maria Elisabette Brisola Brito Prado, e seus membros externos a Profa. Dra. Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana a Proa. Dra. Teresa Cristina Etcheverria, por aceitarem o convite e contribuírem com o aprimoramento desta pesquisa.

A orientadora, Profa. Dra. Angélica da Fontoura Garcia Silva, que, ao longo da minha trajetória no Doutorado, acreditou no meu potencial e depositou, em mim, a confiança na escrita desse trabalho, se tornando uma pessoa amiga, parceira e justa nas suas avaliações e estímulo na minha caminhada. Muito obrigada por ter me orientado.

À Anália e Luzimar, com muita gentileza e profissionalismo, atendem a secretaria da UNIAN/SP. Muito obrigada.

Aos colegas de curso que encontrei na minha caminhada em São Paulo, em especial no final dela, Isabel, Lucia, Rosália, José Fernandes, Gisela, Leiliane Ramos, Rosângela Ando, Mirian, Olenêva. Obrigada por fazer parte das minhas horas de solidão.

A querida Gracilene Pinheiro, que me recebeu em sua casa e em seu coração em todo o tempo que precisei dela. Minha eterna gratidão.

A Universidade Estadual de Santa Cruz, em Ilhéus – Bahia, pela liberação das minhas atividades docentes para cursar o doutorado.

Ao Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, Ciências e Estatística – GPEMEC – que desde o início de suas ações, caminha com seus pesquisadores na busca do fortalecimento contínuo da Educação Matemática no estado da Bahia.

Ao Programa Observatório da Educação (OBEDUC), por meio do Projeto de Pesquisa Estruturas Multiplicativas (E-Mult) que me oportunizou a desenvolver minha pesquisa durante e após as suas ações formativas. Obrigada a todos, em particular, sua coordenadora, a Professora Doutora Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana.

Aos professores participantes do grupo de estudos – Alice, Gerson, Graça, Jamile, Janaína, Larissa, Raíssa, Roberta, Rosa e Sintia - que, com muito esforço, se organizavam para estarem juntos, colaborando com minha pesquisa.

Ao Centro Educacional Cristo Redentor, por meio de sua gestora, Lucivânia Ribeiro, que abriu suas portas para nossas atividades como pesquisadora.

Meu muito obrigada a todos aqueles, mesmo sem citá-los aqui, apoiaram e torceram por mim.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. O meu muito obrigada.

.

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar as possíveis contribuições de um processo formativo sobre o ensino das estruturas multiplicativas para o desenvolvimento profissional de professores ao participarem de um grupo de estudos. Esses docentes estavam envolvidos em um processo formativo mais amplo desenvolvido no âmbito do Programa OBEDUC – Observatório da Educação por meio do projeto de pesquisa em rede intitulado “Um estudo sobre o domínio das estruturas multiplicativas no ensino fundamental – E-Mult. Para alcançar esse propósito, o aporte teórico fundamentou-se, principalmente, na Teoria dos Campos Conceituais, em específico nas estruturas multiplicativas, de Vergnaud (1983, 2009) e nos teóricos como Ball, Thames e Phelps (2008) que discutem os conhecimentos necessários à docência e em Day (2001) e Ponte (1995; 1998) para analisar o desenvolvimento profissional dos participantes do grupo de estudos. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, conforme a abordagem de Garnica (2004) e desenvolvida a partir das análises de transcrições de áudio e vídeo sobre as reflexões realizadas durante os encontros do grupo. Além disso, foram também investigadas as informações coletadas nas observações de aulas ministradas por duas professoras e em protocolos de questionários respondidos durante o processo. A investigação foi estruturada em três etapas. Na primeira, foi realizado *um Estudo Diagnóstico* com o objetivo de obter um perfil dos participantes, quanto a seus conhecimentos e concepções acerca das estruturas multiplicativas. A Etapa 2, a *Pesquisa de Campo*, foi desenvolvida por meio do processo formativo na realização de doze encontros do grupo de estudos com dez professores sobre o ensino das estruturas multiplicativas. Na Etapa 3, *Discussão e Interpretação dos Dados*, foram analisados protocolos do Programa OBEDUC/E-Mult, e depoimentos gerados nas discussões em grupo na busca das respostas à questão que norteou esta investigação. Os resultados indicam que os professores apresentaram características de desenvolvimento profissional em suas ações práticas a partir dos seguintes pressupostos: i) da ampliação dos seus conhecimentos quanto ao ensino das estruturas multiplicativas; ii) do conhecimento acerca das dificuldades de seus estudantes, a partir do olhar diferenciado aos seus esquemas; iii) das reflexões explicitadas coletivamente sobre o que o grupo de estudos proporcionou, por meio de um diálogo aberto e das discussões a respeito do uso de novas estratégias de ensino das estruturas multiplicativas; iv) da elaboração de diversidade de situações multiplicativas elaboradas ao final da Formação OBEDUC/E-Mult em relação ao enfoque apenas aos procedimentos de cálculos observados no primeiro momento da elaboração das situações, no início das ações formativas do Programa OBEDUC/E-Mult. Portanto, evidenciamos que o grupo de estudos, enquanto processo formativo proporcionou aos seus participantes reverem, renovarem e ampliarem, de forma individual e coletiva, os conhecimentos necessários para o ensino das estruturas multiplicativas, favorecendo por meio de sua (re)significação, a promoção do desenvolvimento profissional dos professores participantes.

**Palavras-chave:** Estruturas multiplicativas; Desenvolvimento profissional docente; Grupo de estudos; Processo formativo.

## ABSTRACT

The main aim of this research is to analyze the possible contributions of a study group with collaborative characteristics for the professional development of teachers when they study the teaching of multiplicative structures during and after they participate in a centralized development process. In order to achieve this aim, the theoretical basis was mainly founded on the Conceptual Fields Theory, more specifically on the multiplicative structures as defined by Vergnaud (1983, 2009) and on theoreticians such as Ball, Thames and Phelps (2008), who discuss the required knowledge for teaching, and on Day (2001) and Ponte (1995;1998) to analyze the participants' professional development. This research used a qualitative approach developed from the analysis of audio and video transcripts of reflections performed during the study sessions. Besides these recordings, the research used information collected at the observed classes conducted by two teachers and in questionnaire protocols answered throughout the development process. The research was structured in three stages. On the first stage, a *Survey Study* was carried out to obtain a profile of the participants as far as years of teaching and their knowledge and conceptions about multiplicative structures. Stage 2, *Field Research*, was developed through 12 study group sessions about the teaching of multiplicative structures at the school premises, with the participating teachers. Stage 3, *Data Analysis*, assessed the protocols and testimonial samples generated in group discussions in search of answers to the questions formulated in this research. Results show that the teachers presented characteristics of professional development in their practical actions from the following principles: i) the expansion of their knowledge regarding the teaching of multiplicative structures; ii) the knowledge regarding their students' difficulties, by having a different look at their schemes; iii) the reflections collectively shared about what the study group provided, through open dialogs and discussions about the use of new strategies for teaching multiplicative structures; iv) the elaboration of a diversity of multiplicative situations at the end of the centralized development process, as opposed to the initial ones whose emphasis was solely on calculus procedures. Therefore, we showed that a study group with collaborative characteristics enables its participants to review, renew and expand, both individually and collectively, the essential knowledge for their reflection, planning and, hence, for exercising an effective practice that promotes the professional teaching development through the (re) signification of these knowledge concept.

**Key words:** Multiplicative Structures. Professional teaching development. Study groups. Collaborative work.

## RÉSUMÉ

L'objectif de cette étude est d'analyser les contributions possibles d'un groupe d'études présentant des caractéristiques de collaboration pour le développement professionnel des enseignants, lorsqu'ils étudient l'enseignement des structures multiplicatives pendant et après avoir participé à un processus de formation centralisé. Pour atteindre cet objectif, la contribution théorique s'est surtout fondée sur la Théorie des Champs Conceptuels, en particulier sur les structures multiplicatives de Vergnaud (1983, 2009) et sur des théoriciens tels que Ball, Thames et Phelps (2008) qui discutent les connaissances nécessaires à l'enseignement et Day (2001) et Ponte (1995; 1998) pour analyser le développement professionnel des participants. Il s'agit d'une recherche qualitative développée à partir des analyses de transcriptions audio et vidéo sur les réflexions réalisées lors des séances d'étude. De plus, les informations recueillies pendant les observations en salles de cours par deux enseignantes et sur les protocoles des questionnaires distribués tout au long du processus ont été examinées. La recherche a été structurée en trois étapes. Pendant la première étape, une *Étude Diagnostique* a été menée dans le but de tracer le profil des participants, par rapport à leur temps d'expérience en salle et leurs connaissances et conceptions sur les structures multiplicatives. La deuxième étape a consisté en une *Recherche sur le Terrain* réalisée au cours de 12 séances d'études de groupe sur l'enseignement des structures multiplicatives, dans les installations de l'école, avec les enseignants participants. La troisième étape, *Analyse de Données*, a examiné les protocoles et témoignages produits lors des discussions de groupe dans la recherche de réponses aux questions formulées pendant cette recherche. Les résultats indiquent que les enseignants ont présenté des caractéristiques de développement professionnel dans leurs actions pratiques sur la base des hypothèses suivantes: i) l'amélioration de leurs connaissances concernant l'enseignement des structures multiplicatives; ii) la perception des difficultés de leurs élèves, de part une approche différente de leurs schémas; iii) les réflexions collectives sur ce que le groupe d'étude a produit, à travers un dialogue ouvert et des discussions sur l'utilisation de nouvelles stratégies d'enseignement des structures multiplicatives; iv) l'élaboration de différentes situations multiplicatives à la fin du processus de formation centralisé, élaborées au début exclusivement avec un accent sur les procédures de calcul. Par conséquent, nous mettons en évidence qu'un groupe d'études ayant des caractéristiques de collaboration permet à ses participants d'examiner, de renouveler et d'élargir, individuellement et collectivement, les connaissances essentielles à leur réflexion, à leur planification et à l'exercice d'une pratique efficace qui favorise, moyennant la (re)signification de ces connaissances, la promotion du développement professionnel des enseignants.

**Mots-clés:** Structures multiplicatives. Développement professionnel des enseignants. Groupe d'études. Travail collaboratif.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 01	Malha decomposta em quadrados dispostos em linhas e colunas.	38
Figura 02	Esquema de proporcionalidade simples envolvendo largura e área.	39
Figura 03	Esquema de resolução de situação de proporcionalidade simples – Análise vertical	45
Figura 04	Esquema de resolução de situação de proporcionalidade simples – Análise horizontal	46
Figura 05	Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo.	65
Figura 06	Movimento da Formação OBEDUC/E-Mul e da inserção do grupo de estudos	77
Figura 07	Movimento do processo formativo no interior do grupo de estudos, durante e após a Formação OBEDUC/E-Mult	78
Figura 08	Situação elaborada envolvendo a operação de divisão	97
Figura 10	Proposta de resolução da Situação 1 por meio do escalar multiplicativo	99
Figura 11	Proposta de resolução da Situação 2 por meio do escalar multiplicativo	102
Figura 12	Retomada da proposta de resolução da Situação 1 por meio do escalar multiplicativo	103
Figura 13	Situação utilizando a relação funcional como esquema para sua resolução	103
Figura 14	Esquema 1 analisado pelos professores	110
Figura 15	Esquema 2 analisado pelos professores	110
Figura 16	Esquema 3 analisado pelos professores	111
Figura 17	Esquema 4 analisado pelos professores	111
Figura 18	Esquema 5 analisado pelos professores	113
Figura 19	Esquema 6 analisado pelos professores	113
Figura 20	Esquema 7 analisado pelos professores	114
Figura 21	Esquema 8 analisado pelos professores	114
Figura 22	Esquema 9 analisado pelos professores	115
Figura 23	Esquema 10 analisado pelos professores	115
Figura 24	Esquema 11 analisado pelos professores	116
Figura 25	Esquema 12 analisado pelos professores	116
Figura 26	Esquema 13 analisado pelos professores	116
Figura 27	Esquema 14 analisado pelos professores	117
Figura 28	Atividade 1 apresentada aos participantes do grupo de estudo	118
Figura 29	Atividade 2 apresentada aos participantes do grupo de estudo	121
Figura 30	Primeira tela apresentada aos participantes do grupo	143
Figura 31	Situações apresentadas aos participantes do grupo de estudos	146
Figura 32	Cartela de comprimidos em formato retangular	147
Figura 33	Slides referentes ao esquema do Escalar Multiplicativo	148
Figura 34	Slides referentes ao esquema utilizando a Relação Funcional	150
Figura 35	Desempenho dos estudantes de uma das professoras acerca das situações de divisão por partes e divisão por quota	152
Figura 36	Representação da divisão por partes, com a ideia de distribuição	155
Figura 37	Imagens do dinheirinho de papel representando a Centena, a Dezena e a Unidade, respectivamente	156
Figura 38	Esquema 1 apresentado em slides	162
Figura 39	Esquema 2 apresentado em slides	164
Figura 40	Esquema 3 apresentado em slides	165
Figura 41	Escala de Cuisenaire apresentado em slides	167
Figura 42	Slides com duas situações de Divisão e suas classes, resolvidas utilizando as categorias de Vergnaud (1983, 2009) em sua resolução	170

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 01</b>	Subclasses de situações elementares de isomorfismos de medidas	33
<b>Quadro 02</b>	Categorias de conhecimentos propostos por Ball, Thames e Phelps (2008), a partir das categorias de conhecimentos propostos por Shulman (1986) .....	42
<b>Quadro 03</b>	Cronograma da Formação OBEDUC/E-Mult (2015) e do processo formativo no interior do grupo de estudos (2015/2016) .....	74
<b>Quadro 04</b>	Estratégias de ação nos encontros presenciais da Formação OBEDUC/E-Mult.....	75
<b>Quadro 05</b>	Perfil dos participantes do grupo de estudos no ano da Formação OBEDUC/E-Mult.....	81
<b>Quadro 06</b>	Instrumentos utilizados na pesquisa, objetivos e responsáveis pela elaboração.....	82
<b>Quadro 07</b>	Totalidade de situações elaboradas pelos participantes do grupo de estudos.....	87
<b>Quadro 08</b>	Situações elaboradas pela professora Alice.....	88
<b>Quadro 09</b>	Situações elaboradas pelo professor Gerson.....	89
<b>Quadro 10</b>	Situações elaboradas pela professora Graça.....	90
<b>Quadro 11</b>	Situações elaboradas pela professora Janaína.....	91
<b>Quadro 12</b>	Situações elaboradas pela professora Raíssa.....	92
<b>Quadro 13</b>	Professor e Situações categorizadas – Resumo .....	92
<b>Quadro 14</b>	Situações, categoria envolvida e quantidade de acertos.....	105
<b>Quadro 15</b>	Situações elaboradas pela professora Alice após a Formação OBEDUC/E-Mult.....	133
<b>Quadro 16</b>	Situações elaboradas pelo professor Gerson após a Formação OBEDUC/E-Mult	134
<b>Quadro 17</b>	Situações elaboradas pela professora Graça após a Formação OBEDUC/E-Mult.....	135
<b>Quadro 18</b>	Situações elaboradas pela professora Janaína após a Formação OBEDUC/E-Mult.....	136
<b>Quadro 19</b>	Situações elaboradas pela professora Raíssa após a Formação OBEDUC/E-Mult.....	137
<b>Quadro 20</b>	Quadro comparativo das situações elaboradas pelos participantes do grupo de estudos antes e após a Formação OBEDUC/E-Mult	138
<b>Quadro 21</b>	Análise de depoimentos dos professores acerca dos temas estudados.....	173
<b>Quadro 22</b>	Síntese dos aspectos de (re)significação de conhecimentos, segundo Ball, Thames e Phelps (2008) que apontam para o desenvolvimento profissional dos participantes do grupo de estudos	174

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO.....</b>	17
<b>CAPÍTULO 1: APORTE TEÓRICO.....</b>	26
1.1 A Teoria dos Campos Conceituais .....	26
1.1.1 Conceito.....	27
1.1.2 Campo Conceitual.....	28
1.1.3 Esquema, Teorema em ação e Conceito em ação.....	28
1.1.4 Situações e Representações.....	30
1.2 Estruturas Multiplicativas.....	32
1.2.1 Isomorfismo de Medidas	32
1.2.2 Produto de Medidas e Proporção Múltipla	
1.3 Conhecimentos para a formação docente e para o ensino da matemática...	40
1.3.1 Tipos de Conhecimentos para o ensino da matemática e para o ensino das estruturas multiplicativas.....	43
1.4 A formação reflexiva do professor que ensina matemática.....	48
1.5 Desenvolvimento profissional docente.....	50
<b>CAPÍTULO 2: REVISÃO DE LITERATURA.....</b>	54
2.1 A Teoria dos Campos Conceituais e a formação continuada: o que dizem as pesquisas.....	54
2.2 Os grupos de estudos e o desenvolvimento profissional dos participantes: o que dizem as pesquisas.....	58
2.3 Estudos sobre a formação continuada de professores realizados no âmbito do Programa OBEDUC/E-Mult.....	63
<b>CAPÍTULO 3: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....</b>	69
3.1 Caracterização metodológica da pesquisa.....	69
3.2 Cenário da Investigação.....	71
3.2.1 O Programa OBEDUC/E-Mult.....	71
3.2.2 A Formação OBEDUC/E-Mult no núcleo UESC e o grupo de estudos	72
3.2.3 A Escola.....	79
3.2.4 Perfil dos professores participantes do grupo de estudos.....	79
3.3 Percurso desta Investigação.....	82
3.4 Instrumentos de pesquisa.....	83
<b>CAPÍTULO 4: ANÁLISE E DISCUSSÃO DA PESQUISA DE CAMPO REALIZADA NO ANO 2015.....</b>	86
4.1 Estudo Diagnóstico.....	87
4.1.1 Sobre as concepções dos professores a respeito das Estruturas Multiplicativas.....	87
4.2 – Discussão e Interpretação dos dados referente aos coletados no interior do grupo de estudos no ano de 2015	94
4.2.1 Isomorfismo de Medidas: Proporcionalidade simples: Divisão	94
4.2.2 Produto de Medidas: Configuração Retangular.....	107
4.2.3 O Conhecimento Especializado analisado na elaboração de situações: o	

antes e o depois dos participantes da Formação OBEDUC/E-Mult e de um grupo de estudos.....	132
4.3 Analisando indícios de desenvolvimento profissional dos professores, a partir do ocorrido nas sessões de estudos.....	140
<b>CAPÍTULO 5: ANÁLISE E DISCUSSÃO DA PESQUISA DE CAMPO REALIZADA EM 2016.....</b>	<b>142</b>
5.1 Reflexões sobre o ensino da categoria Isomorfismo de Medidas – Proporcionalidade Simples – Divisão: algumas inferências sobre a prática docente .....	142
5.2 Relação entre as diferentes categorias do conhecimento para o ensino da categoria Isomorfismo de Medidas – Proporcionalidade simples – Divisão.....	145
5.3. Do grupo de estudos para a sala de aula e da sala de aula para o grupo de estudo: a prática em foco.....	150
5.4 Analisando indícios de desenvolvimento profissional dos professores, a partir do ocorrido nas sessões de estudos do ano 2016.....	172
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>174</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>183</b>
ANEXO A – Perfil do Professor.....	190
ANEXO B – Instrumento Diagnóstico a partir de elaboração de situações antes e após a Formação OBEDUC/E-Mult.....	191
ANEXO C - Esquemas de estudantes utilizados para resolução de uma situação.....	193
ANEXO D – Relatório de Atividade Planejada.....	194
ANEXO E – Relatório de Atividade Desenvolvida.....	195
APENDICE 01 – Cenário de Ensino.....	197
APENDICE 02 – Situações envolvendo a operação de Divisão e suas classes – Por partes e por Quota.....	198
APENDICE 03 – Instrumento de avaliação do grupo de estudos – segunda fase – 2016.....	199

## **INTRODUÇÃO**

---

O presente estudo insere-se no contexto da linha de pesquisa Formação de professores, Currículo e História do Programa de Pós-Graduação da Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN/SP), e tem como objetivo analisar as possíveis contribuições de um processo formativo sobre o ensino das estruturas multiplicativas para o desenvolvimento profissional de professores ao participarem de um grupo de estudos. Esses docentes estavam envolvidos em um processo formativo mais amplo desenvolvido no âmbito do Programa OBEDUC – Observatório da Educação por meio do projeto de pesquisa em rede intitulado “Um estudo sobre o domínio das estruturas multiplicativas no ensino fundamental – E-Mult.<sup>1</sup>. Nesse Programa os professores participaram de sessões de formação continuada – Formação OBEDUC/E-Mult<sup>2</sup>– e de sessões de estudo em grupo<sup>3</sup> desenvolvidas na própria escola em que trabalhavam. Entretanto, cabe ressaltar que mesmo considerando que o foco desta investigação tenha sido, sobretudo para as discussões e reflexões ocorridas no interior do grupo de estudos, temos consciência de que os resultados obtidos aqui apresentados foram fruto de todo o processo formativo mais amplo desenvolvido no Programa OBEDUC – E-Mult, por isso também nos valem de observações de aula dos participantes e de seus depoimentos acerca de atividades desenvolvidas nesse grupo e explicitados durante as sessões de Formação OBEDUC/E-Mult.

Para melhor entendimento do formato desta investigação, iniciamos descrevendo nossa trajetória profissional como professora da formação inicial de um curso de Licenciatura em Matemática e pesquisadora de um programa de formação continuada de professores, o que entendemos ser, de certa forma, o que nos impulsionou a buscar caminhos para traçar o percurso desta investigação. Apresentamos, ainda, a justificativa da escolha do tema e sua relevância. Descrevemos o objetivo, questão de pesquisa e, de forma sucinta, os procedimentos metodológicos escolhidos. Ao final, expomos o que será

---

<sup>1</sup> Programa Observatório da Educação – OBEDUC, 2013/2017. Financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), sob o número 15.727, e desenvolvido nos estados da Bahia, de Pernambuco e do Ceará. Neste estudo, o denominaremos como Programa OBEDUC/E-Mult.

<sup>2</sup> A formação OBEDUC/E-Mult refere-se a um processo de formação continuada em caráter mais amplo, que envolveu professores de mais de uma escola e foi realizada de duas formas, encontros presenciais e encontros virtuais, detalhadas no capítulo dos Procedimentos Metodológicos desta investigação.

<sup>3</sup> O grupo de estudos nesta investigação, refere-se a um grupo de professores que participavam da formação OBEDUC/E-Mult e aceitaram o convite para reunir-se em outros horários com o objetivo de compartilhar as experiências vivenciadas em sala de aula, geradas durante e após sua participação nesta formação.

discutido em cada um dos capítulos posteriores.

#### **Antecedentes e motivações<sup>4</sup>**

Ingressei como docente no ensino superior em um curso de licenciatura em matemática, no ano 1991, dois anos depois da minha graduação nesse mesmo curso, nesta instituição de ensino superior. Enquanto discente, ministrei aulas de geometria e matemática no ensino fundamental e médio, nas escolas privadas do município onde resido, o que me possibilitou observar as duas realidades ao mesmo tempo, a de ensinar e a de aprender a ensinar. Tal fato me mostrou o grande distanciamento entre os dois contextos de ensino, em relação ao conteúdo matemático e sua forma de ensinar. Desde então, a temática formação de professores sempre esteve presente na minha trajetória profissional. Um dos motivos se deu por ministrar no ensino superior, algumas matérias que estavam diretamente ligadas à formação pedagógica dos licenciandos em matemática, a saber: Estágio Supervisionado, Metodologia do Ensino, Didática da Matemática, entre outros.

Em 2006, assumi a coordenação do colegiado do curso de matemática, no momento em que todos os cursos de licenciatura no país estavam passando por um processo de reformulação em seus projetos pedagógicos, segundo propostas das Diretrizes Curriculares Nacionais e resoluções encaminhadas pelo Ministério da Educação para a reestruturação curricular desses cursos em todas as instituições do ensino superior (IES) brasileiras.

Minha preocupação e dos demais membros do colegiado foi reformular, de acordo com nossos estudos e vivências, um curso com as características que uma licenciatura em matemática deveria ter para formar um professor que pudesse atuar no ensino fundamental e médio e gerar a possibilidade de fomentar a identidade profissional dos futuros professores. Isso ocorria, visto que era notório perceber que a maioria dos alunos ingressantes eram oriundos do ensino público e, por já estarem inseridos no mercado de trabalho, optavam por um curso superior noturno, que, em muitos casos, não seria sua primeira opção profissional. Daí, observamos que, em sua maioria, não expressavam o desejo de ser professor no futuro.

---

<sup>4</sup> Optamos, excepcionalmente, por escrever a primeira subseção deste capítulo na primeira pessoa do singular por tratar-se de experiências exclusivas da autora. O restante do capítulo será escrito na primeira pessoa do plural, uma vez que acreditamos que este estudo contou com diversas contribuições.

Esse contexto foi desafiante na minha trajetória como docente e coordenadora de curso, pois expressava minhas preocupações iniciais, na posição de formador de futuros professores de matemática, que teriam que contar com uma profunda e avançada formação voltada para as necessidades da educação escolar básica. O projeto do curso, mesmo com lacunas a serem revistas, foi reformulado e aprovado pelo Conselho de Ensino Superior, Pesquisa e Extensão (CONSEPE) da instituição, mas o desafio maior naquele momento era colocar na prática o que foi proposto e aprovado. Entendi, então, que seria possível vencer esses desafios apenas por meio do conhecimento da realidade da escola do ensino básico, o envolvimento dos estudantes de licenciatura na sua formação inicial e o compromisso com a formação continuada de professores de matemática que estão inseridos nesse contexto.

Para isso, fiz parte de uma equipe de professores do curso que, com a mesma preocupação com os licenciandos e com os professores dos anos iniciais e finais do ensino fundamental, criaram um Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, Estatística e Ciências (GPEMEC). Esse grupo tem a finalidade de promover diversas ações voltadas ao ensino de matemática, mobilizando os núcleos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM/Bahia) e as escolas do ensino básico no entorno desses núcleos. Entre essas ações, em 2008, foi aprovado, por meio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB), o Projeto PEA (Projeto Estruturas Aditivas) intitulado “Um estudo sobre o domínio das estruturas aditivas nas séries iniciais<sup>5</sup> do ensino fundamental no estado da Bahia”, no qual participei como vice coordenadora.

O PEA tinha como objetivo principal desenvolver uma formação com caráter colaborativo com os professores da escola básica, estudantes do curso de licenciatura e pesquisadores das IES, visando à construção de propostas possíveis de serem implementadas no ensino e na aprendizagem da adição e da subtração, nos anos iniciais do ensino fundamental.

Entre as propostas desenvolvidas no PEA, destaco:

- 1) investigar a prática dos professores no ensino das estruturas aditivas, propiciando, com isso, a ação do professor no desenvolvimento de estratégias de ensino que possibilitassem a expansão e apropriação desse campo conceitual pelos estudantes;

---

<sup>5</sup> Na época, o termo utilizado era séries iniciais para o segmento de ensino destinado a crianças de 7 a 10 anos. O termo utilizado hoje é anos iniciais para esse mesmo segmento

2) formar um grupo de trabalho no qual estivessem envolvidos professores das escolas básicas, estudantes dos cursos de licenciatura e pesquisadores, na perspectiva de um trabalho colaborativo.

O PEA fundamentou-se em teorias como a Teoria dos Campos Conceituais, defendidas por Vergnaud (1982); em estudos teóricos que defendem o trabalho colaborativo, como Ibiapina (2008) e as que nortearam a formação de professores nos anos iniciais por meio da reflexão, como Schön (1992) e Zeichner (1998, 2002).

O meu envolvimento com o PEA foi gerado com a descoberta de um possível caminho a ser trilhado para o resgate do aprendizado de conceitos matemáticos por meio de resolução de situações-problema. Durante o seu desenvolvimento e enquanto formadora, eram mantidos contínuos diálogos entre os professores, com os licenciandos envolvidos e com os pesquisadores em relação às estratégias de ensino do campo aditivo, suas reflexões em relação à sua prática, seus desafios quanto ao seu próprio aprendizado e a aprendizagem dos seus estudantes.

Após o encerramento da pesquisa do PEA, no ano 2011, e diante de um envolvimento com os estudantes de licenciatura em congressos e eventos de educação matemática, no país, como fator positivo para a sua participação contínua em atividades de pesquisa e de extensão, os pesquisadores e professores envolvidos com o GPEMEC organizaram-se na elaboração de um projeto envolvendo as estruturas multiplicativas a ser encaminhado para o Programa Observatório da Educação, da CAPES.

Em 2013, por meio ao atendimento do Edital 049/2012, no âmbito do Observatório da Educação (OBEDUC), foi aprovado na modalidade em rede, o projeto nº 15.727, intitulado “Um estudo sobre o domínio das estruturas multiplicativas no ensino fundamental – (E-Mult)” envolvendo grupos de pesquisadores em três estados, Bahia, Pernambuco e Ceará, e três IES desses estados. O objetivo central do projeto era investigar e intervir na prática de professores do ensino fundamental no que tange às estruturas multiplicativas, e o início de suas ações deu-se em agosto do ano 2013.

Escolhi desenvolver o trabalho no âmbito do Programa OBEDUC/E-Mult, apresentando para a seleção de Doutorado em Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação da Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN/SP) a proposta para a linha de pesquisa Formação de professores, Currículo e História. Em 2014, ingressei no doutorado e, no ano 2015, acompanhei a Formação OBEDUC/E-Mult e em conjunto com professores de uma das escolas envolvidas, constituímos um grupo de estudos de forma concomitante, e em 2016, continuamos com as ações do processo formativo no interior

desse grupo. Cabe ressaltar que será tratado no capítulo dos Procedimentos Metodológicos todo o processo formativo, de forma mais detalhada.

Os pressupostos definidos no Programa OBEDUC/E-Mult, aliados ao compromisso que busco ter com a educação básica por meio da manutenção de um diálogo contínuo com os professores dessas escolas, contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa de forma que favoreceram as discussões e reflexões sobre o ensino no campo das estruturas multiplicativas. A escolha do tema desta investigação faz parte da manutenção desse diálogo e, com isso, busca analisar as possíveis contribuições de um processo formativo sobre o ensino das estruturas multiplicativas para o desenvolvimento profissional de professores ao participarem de um grupo de estudos.

### **Justificativa da escolha do tema e sua relevância**

Entendemos que a ação docente e a reflexão do professor *na e sobre* sua prática de forma contínua, configura uma das molas propulsoras no processo do seu desenvolvimento profissional. Sob nosso ponto de vista, uma ação formativa de professores que ensinam matemática não significa apenas suprir lacunas deixadas na sua formação inicial, torna-se necessário, ainda, que os formadores considerem o que esse professor também reflete cotidianamente no seu ambiente escolar, com seus pares, com seus alunos, no desenvolvimento da aula, quando busca estratégias a fim de atender todas as demandas oriundas das lacunas de aprendizagem dos seus alunos e que, muitas vezes, de forma isolada, ele busca caminhos para a melhoria desse ensino, mas todo esse movimento pode ser potencializado pelo processo formativo.

Segundo Fiorentini e Crecci (2013),

o desenvolvimento profissional docente (DPD) remete também ao processo ou movimento de transformação dos sujeitos dentro de um campo profissional específico. Nesse sentido, o termo desenvolvimento profissional (DP) tende a ser associado ao processo de constituição do sujeito, dentro de um campo específico. Um processo, portanto, de vir a ser, de transformar-se ao longo do tempo ou a partir de uma ação formativa (FIORENTINI; CRECCI, 2013, p.13).

Portanto, uma ação formativa objetivando o desenvolvimento profissional docente, precisa estar atrelada a um campo específico de estudo e, mesmo sendo de forma coletiva, ao refletir sobre sua prática junto aos seus pares, o professor poderá desenvolver-se profissionalmente, na ampliação dos seus conhecimentos quando ao ensino deste campo.

Santos (2012) caracteriza a formação continuada de professores em dois grupos: um que a compreende como um processo compensatório para suprir as lacunas da formação inicial e, ainda, atualiza um repertório de conhecimentos superados ou como uma forma de aprimorar conhecimentos que o professor já sabe e que, no entender desse grupo, precisa ser aperfeiçoado. O outro grupo, segundo o autor, concebe a formação continuada pautada no trabalho reflexivo da prática docente, sendo a escola valorizada como *locus* de produção de conhecimentos e que assegura aos seus professores que sejam eles mesmos os sujeitos da construção desses conhecimentos e saberes, por meio da reflexão sobre a prática, assumindo, assim, o papel de transformadores da realidade. Santos (2012) também destaca a importância de valorizar o pensamento proposto no segundo grupo que remete à ideia da valorização do protagonismo do professor por meio da vivência em sala de aula. Nesse contexto, esta investigação foi concebida com características do segundo grupo valorizando a participação ativa do professor no próprio contexto em que desenvolve seu trabalho.

Quanto a aprendizagem das estruturas multiplicativas, temática escolhida para desenvolver esta investigação, diversos estudos como os de Nunes (2002, 2010), por exemplo, afirmam que as crianças a partir de seis anos de idade, já são capazes de resolver situações envolvendo noções de multiplicação e divisão. Diante desse fato, o professor dos anos iniciais do ensino fundamental precisa organizar diferentes situações com seus alunos, fazendo-os desenvolver competências imediatas a partir do que eles já sabem, além de oferecer uma base teórica dos conceitos matemáticos essenciais para serem utilizados nos anos finais. É nesse caminho que entendemos a relevância do tema que propomos nesta pesquisa e que, ao mantermos esse diálogo contínuo em sessões de estudo na própria escola, o protagonismo do professor, sugerido por Santos (2012) acontece. Além disso, é por meio da análise de conhecimentos explicitados pelos participantes que poderemos compreender as especificidades do ambiente escolar, suas necessidades, e contribuir de uma forma coletiva e não isolada, para o desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática nos anos iniciais. Nesse sentido, esta investigação procura valorizar e se apoia nas ideias expostas pelo autor, referenciando-se ao segundo grupo por ele descrito.

Dessa forma, as abordagens teóricas e os pressupostos metodológicos deste estudo convergem para responder a seguinte questão norteadora: *Quais são as possíveis contribuições de um processo formativo sobre o ensino das estruturas multiplicativas para o desenvolvimento profissional de professores quando participam de um grupo de*

*estudos?*

Buscando responder a essa questão, foram realizadas, na própria escola dos professores investigados, concomitantemente com a formação OBEDUC/E-Mult, encontros para a realização de estudos em grupo. Tal grupo foi constituído pela pesquisadora e por professores envolvidos.

### **Escolhas metodológicas**

Na busca por alcançar o objetivo desta investigação e responder a questão proposta, convidamos os professores que faziam parte, concomitantemente, da Formação OBEDUC/E-Mult, para formarmos um grupo de estudo na escola aonde trabalhavam. Dez professores aceitaram o convite e a pesquisa foi desenvolvida neste cenário, influenciado pelo movimento formativo organizado pelo Programa OBEDUC/E-Mult em que estavam inseridos.

Vários são os elementos que interagiram nos encontros de estudos, ou seja, as influências oriundas da Formação OBEDUC/E-Mult, a constituição e organização do grupo, o desenvolvimento de estratégias de ensino construídas ao longo das discussões e das reflexões geradas nas sessões de estudos, o olhar dos professores ao analisar os esquemas e a análise do desempenho dos seus alunos na resolução de situações das estruturas multiplicativas, dentre outros. Acreditamos que isso nos permitiu entender que se trata de uma pesquisa com uma abordagem qualitativa, pela similaridade das características apontadas por Garnica (2004) que são:

- (a) a transitoriedade de seus resultados;
- (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar;
- (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar;
- (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e
- (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARNICA, 2004, p. 86).

Para a análise dos depoimentos coletados durante os encontros de estudos com os professores, utilizamos os procedimentos descritos por Bardin (2016). O autor organiza as fases da análise de conteúdo em três polos cronológicos, que denomina por: 1) a pré-análise; 2) a exploração do material e 3) o tratamento dos resultados, as inferências e a interpretação.

As características definidas por Garnica (2004) e o método escolhido descrito por

Bardin (2016) serão detalhados posteriormente no capítulo de Procedimentos Metodológicos, o qual procuramos explicitar a abordagem qualitativa como a escolhida para definir o percurso desta investigação, relacionando-a com o grande número de dados obtidos com os professores durante os encontros de estudos no grupo e na Formação OBEDUC/E-Mult.

Incrementamos os procedimentos de análise, trazendo os resultados apresentados nos documentos diagnósticos do Programa OBEDUC/E-Mult, valendo-se da sua análise qualitativa em sua fase inicial e no fim das ações formativas. Esses instrumentos contribuíram também para respondermos nossa questão de pesquisa.

### **Organização da pesquisa**

Nossa pesquisa está organizada em cinco capítulos e uma seção para considerações finais, conforme descritos a seguir:

No primeiro capítulo, destacamos o aporte teórico no qual se ancora este estudo. De um lado, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), no que diz respeito às estruturas multiplicativas de Vergnaud (1983; 2009) por outro, as ideias de autores como Day (2001), Ponte (1995; 1998), Schön (1987; 1997), Zeichner (1993; 2008), Serrazina (1999, 2012), Shulman (1986) e Ball, Thames e Phelps (2008) para tratar, respectivamente, de questões relativas ao desenvolvimento profissional de professores, as suas reflexões *na* e *sobre* a ação docente e os conhecimentos profissionais necessários para o ensino.

O segundo capítulo, apresenta a revisão de literatura com os principais resultados de pesquisas relacionadas à TCC e às contribuições de processos de formação continuada para o desenvolvimento profissional de professores, destacando trabalhos voltados para a reflexão *na* e *sobre* a prática docente, assim como resultados de pesquisas que enfatizam os conhecimentos necessários para o ensino desse campo conceitual, dentro de um contexto de grupos de estudos.

No terceiro capítulo, descrevemos os procedimentos metodológicos, o contexto da pesquisa, ressaltando a proposta de trabalho desenvolvida em cada um dos encontros do processo formativo. Expomos também, alguns aspectos da Formação OBEDUC/E-Mult, no qual os professores do grupo de estudos participaram concomitantemente. Por fim, apresentamos o método e os critérios adotados para a análise dos dados, justificando as escolhas feitas na busca de obter os resultados esperados.

No quarto e no quinto capítulo, apresentamos a discussão dos dados coletados

referente aos participantes do grupo do estudo, objetivando explicitar suas reflexões geradas durante as discussões e que apontaram para o seu desenvolvimento profissional docente ao estudarem sobre o ensino das estruturas multiplicativas.

Nas considerações finais, objetivamos responder à questão norteadora proposta inicialmente, traçando uma síntese sobre o percurso investigativo realizado, levando em conta nossas percepções sobre o ocorrido na pesquisa, destacando os resultados, limitações e sugestões futuras. Finalmente, nos apêndices e anexos, disponibilizamos os materiais utilizados para o desenvolvimento desta investigação.

Assim, apresentamos, no próximo capítulo, os aportes teóricos que subsidiaram a pesquisa.

# CAPÍTULO 1

## APORTE TEÓRICO

Apresentamos neste capítulo as ideias que subsidiam o aporte teórico no qual nos apoiamos para o desenvolvimento da pesquisa. Iniciamos com o que trata o objeto matemático, que são as estruturas multiplicativas, e utilizamos Vergnaud (1983; 2009). Para uma abordagem sobre o desenvolvimento profissional docente, adotamos os estudos de Day (2001) e quanto aos conhecimentos necessários ao ensino das estruturas multiplicativas, as ideias de Ball, Thames e Phelps (2008). A formação continuada de professores, em específico a questão da reflexão *na* e *sobre* a prática, subsidiamo-nos, entre outros, em Schön (1987) e, a reflexão como prática social, em Zeichner (1993, 2008) e Serrazina (1999; 2012).

Por fim, para nos subsidiar acerca das contribuições de um processo formativo para o desenvolvimento profissional docente, em um contexto de grupo de estudos, adotamos autores como Nacarato (2013), Ibiapina (2008), Fiorentini e Crecci (2013).

### **1.1 A Teoria dos Campos Conceituais**

As pesquisas nacionais e internacionais que discutem o estudo da Teoria do Campo Conceitual (TCC) têm sido foco de atenção dos educadores matemáticos. As estruturas multiplicativas estudadas por Vergnaud (1983; 2009) dentro da TCC apresentam, em seu escopo, discussões sobre a resolução de situações envolvendo proporcionalidade simples e múltipla, comparação multiplicativa, e produto de medidas.

Entre as décadas de 1970 a 1980, Vergnaud desenvolveu a TCC objetivando propor uma abordagem teórica que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos em crianças e adolescentes. A partir de então, essa teoria encontrou, em diversos países, pesquisadores, que a utilizaram e ainda o fazem para fundamentar seus trabalhos em que abordem a inter-relação entre conceitos matemáticos e a sua aprendizagem nos diferentes níveis de ensino. Entre eles, encontramos Nunes e Bryant (1997, 2010), Moreira (2004), Garcia Silva (2007), Santana (2010), Gitirana, Campos, Magina e Spinillo (2014) e Etcheverria (2014).

A TCC possibilita estudar a relação entre os conceitos a partir da análise de conhecimentos explicitados e de invariantes operatórios que estão implícitos nos esquemas e comportamentos das crianças e adolescentes observados em diferentes

situações. E, ainda, o conhecimento emerge a partir da resolução de problemas e da ação do sujeito sobre a situação (VERGNAUD, 1991).

Para uma melhor compreensão da TCC, torna-se necessário buscar o entendimento do que significam alguns dos seus componentes, como: conceito, campo conceitual, esquemas, teorema em ação, conceito em ação, situações e representações.

### 1.1.1 *Conceito*

Vergnaud (1991) considera o *conceito* como uma terna de conjuntos  $C = (S, I, s)$  na qual:

**S** é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência);

**I** é o conjunto de invariantes nas quais assenta a operacionalidade dos esquemas (objetos, propriedades e relações) desenvolvidos para lidar com essas situações (o significado);

**s** é o conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante) (VERGNAUD, 1991, p. 166).

O autor afirma ser necessário considerar esses três conjuntos, ao mesmo tempo, para o estudo do desenvolvimento e funcionamento de um conceito e, que, precisam ser levados em conta quando analisamos os processos de ensino e de aprendizagem. É importante notar que, em um campo conceitual, um conceito nunca se refere a um único tipo de situação e sim a vários tipos (Vergnaud, 1991). Além disso, em cada situação, vários tipos de conceitos são percebidos, envolvidos e interligados. E, ainda, cada conceito está intimamente ligado a outros, por meio dos diferentes tipos de situações-problemas.

Nesse contexto, concordamos com Gitirana et al (2014) quando afirmam, apoiadas em Vergnaud (1987), que o conhecimento conceitual é percebido a partir da resolução de situações de caráter teórico ou prático. Para as autoras: “(...) um indivíduo não forma um conceito a partir da resolução de um único problema (ou situação ou situação-problema<sup>6</sup>) nem tampouco de problemas similares. Cada problema traz em si vários conceitos embutidos, os quais precisam ser dominados para que cheguemos a uma solução” (GITIRANA et al., 2014, p. 9). Todavia, se os conceitos tornam-se significativos por meio de situações, decorre naturalmente que as situações constituem a principal entrada de um campo conceitual (MOREIRA, 2004, p.6).

---

<sup>6</sup> Para esta pesquisa, adotamos situação ou situação-problema ao nos referirmos aos problemas matemáticos a serem trabalhados.

### 1.1.2 *Campo Conceitual*

Vergnaud (1983, p.127) considera o “*campo conceitual* como sendo um conjunto de problemas ou situações, cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais encontram-se em estreita conexão uns com os outros”. Como exemplo, o autor denomina:

[...] o campo conceitual das estruturas aditivas, como o conjunto das situações que requerem uma adição, uma subtração, ou uma combinação dessas operações; para as estruturas multiplicativas, o conjunto das situações que requerem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas operações [...] o campo conceitual das estruturas multiplicativas é, ao mesmo tempo, o conjunto de situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações: proporções simples e proporção múltipla, função linear e n-linear, razão escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fração, razão, número racional, múltiplo e divisor, etc. (VERGNAUD, 1983, p.127).

Portanto, mesmo não sendo específica da matemática, a TCC começou a ser elaborada com o propósito de explicar o processo de conceituação progressiva das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações número-espço e da álgebra. É nesse entendimento que, na busca de analisar como ocorre esse processo, o esquema aparece como essencial para a compreensão de como a criança constrói um determinado conceito.

### 1.1.3 *Esquema, Teorema em ação e Conceito em ação*

Vergnaud (1998) adota a seguinte definição: um *esquema* é a organização invariante de comportamento para uma certa classe de situações. Segundo o autor, ele é composto das invariantes operatórias, que são os conceitos e os teoremas em ação e considera que os conceitos em ação dos sujeitos devem ser procurados nos esquemas, isto é, os elementos cognitivos que permitem a ação do sujeito ser operatória.

Nas definições adotadas por Vergnaud (1998), os invariantes operatórios de esquema são:

- *teorema em ação* é uma proposição utilizada na ação que pode ser verdadeira ou falsa;
- *conceito em ação* é um objeto, um predicado; ou uma categoria que é considerada relevante.

Vergnaud (1988) também define o *teorema em ação* como relações matemáticas que são levadas em consideração pelos estudantes quando eles escolhem uma operação ou sequência de operações para resolver um problema. E, ainda, segundo o autor, um

teorema em ação pode ser considerado como tendo aplicação apenas em um conjunto de problemas.

Santos (2012) interpreta o conceito de esquema e seus invariantes apresentados por Vergnaud.

O esquema atende uma organização feita pelo próprio sujeito aprendiz, que tem como conduzir o processo de resolução de uma dada situação. Sendo assim, é possível destacar duas classes dessas situações: (a) uma em que o sujeito dispõe em seu repertório de competências necessárias para o seu tratamento imediato; (b) outra em que o sujeito não dispõe em seu repertório de competências necessárias para o seu tratamento (SANTOS, 2012, p. 90).

Na primeira classe, explica Santos (2012), o estudante lança mão de um esquema que possui e está internalizado e, na segunda, esses esquemas não são suficientemente adequados para um tratamento imediato de uma dada situação e ele é desafiado a descobrir novos esquemas e novas formas de conduzir o surgimento deles.

É possível observar que o *teorema em ação* faz parte dos invariantes operatórios na terna descrita no item 2.1.1, no que se refere à formação de um conceito. A primeira ideia pensada por Vergnaud (1998) ao estabelecer a TCC é que, para que se possa formar um conceito, é necessário que o indivíduo interaja com esse conceito em diversidade de situações. A segunda ideia do autor é que, cada situação envolve vários conceitos. No caso das situações de estruturas multiplicativas, dentre eles, temos: multiplicação, divisão, proporção, razão, função linear, combinatória, fração, a representação do número racional e o conceito do próprio número.

Segundo Santana (2012, p.185), os conceitos e os teoremas em ação não são verdadeiramente científicos, pois, em geral, são usados de maneira implícita pelos estudantes, não sendo por eles discutidos e nem explanadas a sua veracidade e pertinência. Não se constitui numa verdade universal.

Apoiado na definição, Vergnaud (1998) aponta a diferença entre um *teorema em ação* e um *conceito em ação*. Segundo o autor, o que os diferencia é que o *teorema em ação* pode ser verdadeiro ou falso, mas continua sendo um *teorema em ação* e o *conceito em ação* pode ser relevante, mais ou menos relevante ou não relevante, o que é diferente de ser verdadeiro ou falso. Vergnaud (1998) afirma que:

[...] alguns conceitos já existentes como o conceito de triângulo, ou o conceito de um número, ou de simetria, ou de operador escalar já tem a garantia de não ter sentido a verificação de ser verdadeiro ou falso, pois são considerados conceitos relevantes para mostrar características da representação e da ação nas tarefas matemáticas (VERGNAUD, 1998, p.174).

Portanto, consideramos que a TCC fornece elementos para analisar os esquemas dos estudantes e perceber as suas dificuldades na resolução das situações que envolvem

as estruturas multiplicativas constitui em uma ferramenta poderosa para o professor no planejamento e desenvolvimento de estratégias que privilegiem o maior número de situações. Nessa perspectiva, os professores são mediadores. Sua tarefa é ajudar seus estudantes a desenvolverem seu repertório de esquemas e representações (VERGNAUD, 1988).

#### 1.1.4 *Situações e Representações*

O autor chama a atenção para quando se utiliza do termo *situação* aproximando-se mais da psicologia do que dos estudos apresentados por Guy Brousseau. Nesse contexto, trazemos para nossa investigação, as duas ideias principais acerca de situações propostas por Vergnaud (1991) em relação aos processos cognitivos e às respostas do sujeito como função das situações com as quais ele se confronta.

1.A ideia de variedade: existe uma grande variedade de situações num campo conceitual, e as variáveis de situação são um meio de gerar de forma sistemática o conjunto das classes possíveis:

2.A ideia da história: os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que eles enfrentaram e que progressivamente dominaram, nomeadamente pelas primeiras situações susceptíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que se pretende ensinar-lhes (VERGNAUD, 1991, p.171).

Segundo o autor, a utilização dessas duas ideias na prática de investigação não é imediata para o pesquisador, já que a primeira o orienta para análise, decompondo os elementos simples do esquema e combinando os que são possíveis de serem combinados, enquanto a segunda o direciona para a procura de outras situações funcionais, quase sempre compostas por várias relações, observando a importância de o professor perceber com que frequência essas situações acontecem.

Alguns questionamentos que podem ser feitos por uma criança de seis anos nas atividades de comprar algo como frutas ou bombons são utilizados por Vergnaud (1993, p.12) para exemplificar a ideia de variedade de situações. São elas: tenho dinheiro suficiente para comprar isso? E para comprar isso e aquilo? Quanto me sobrar, se eu comprar isso? Quanto falta? É melhor comprar isso ou aquilo? Qual a diferença de preço? Esses questionamentos são favoráveis à criança para o desenvolvimento das suas conceituações matemáticas relativas a número, à comparação, à adição e à subtração. Segundo Vergnaud (2009), os meios utilizados pela criança para atingir um objetivo em uma determinada tarefa escolar têm as suas raízes na representação que faz da situação que está sendo posta para ela resolver.

Reafirmamos que Vergnaud (1991) associa a terna que sustenta a formação de um

conceito, defendida por ele (C = S, I, s ou R) com os elementos básicos da função simbólica. Gitirana et al. (2014), baseados nessa associação e utilizando-se da Psicologia, expressam essa terna da seguinte forma:

- **S** (conjunto de situações) está relacionado à realidade, quando se lança mão da função simbólica, pode-se dizer que **S** é o referente;
- **I** e **R** (respectivamente, conjunto de invariantes e conjunto de representações simbólicas) estão relacionados à representação. (GITIRANA et al., 2014, p. 14).

Como exemplo que permita diferenciar representação (significado, significante) de realidade, apresentamos uma situação que envolve a operação de divisão:

*Celso comprou uma caixa de lápis coloridos com 12 unidades. Quer distribuir, de forma igual e independentemente de cor, essa quantidade com seus três filhos. Quantos lápis cada filho receberá?*

Ao buscar resolver essa situação, o estudante poderá representar a solução, entre outras representações, por:

$$12 \div 3 =$$

ou utiliza-se a representação fracionária para a divisão:  $\frac{12}{3}$

ou, ainda, o algoritmo da divisão, 12  $\underline{3}$

As respostas possivelmente registradas pelos estudantes apresentam três símbolos (“ $\div$ ”, “ $-$ ” e “ $\underline{\quad}$ ”) diferentes para um mesmo significado da divisão, que é o da partição. Os três símbolos estão representando a situação em que se devem distribuir os 12 lápis. Portanto, o que permite a identificação do significado assumido por cada símbolo é o contexto em que ele está inserido. É importante destacar, ainda, que a noção de representação não se reduz ao uso adequado desses símbolos. Portanto, para Gitirana et al (2014), a representação pode ser considerada como a interação entre esses dois aspectos de pensamento, o significado (**I**) e o significante (**R**).

Apresentamos, portanto, em linhas gerais a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1983,2009), e a seguir, nos deteremos à discussão das Estruturas Multiplicativas, campo específico desta teoria e que foi o foco da nossa investigação na Formação OBEDUC/E-Mult e no interior do grupo de estudos.

## 1.2 Estruturas Multiplicativas

Vergnaud (1983, p.128), assumindo as estruturas multiplicativas como um conjunto de problemas, identificou três subgrupos diferentes: (a) Isomorfismo de medidas. (b) Produto de medidas e (c) Proporcionalidade múltipla. A seguir, trataremos cada subgrupo em particular.

### 1.2.1 Isomorfismo de Medidas

Segundo Vergnaud (1983), o Isomorfismo de medidas é uma estrutura que consiste em uma proporção de medidas simples entre duas variáveis ( $M_1$  e  $M_2$ ), sendo uma relativa à outra. O autor aponta tipos de variáveis ou grandezas como pessoas e objetos, mercadorias e custos, duração e distâncias, entre outras.

Vergnaud (2009) define também o Isomorfismo de medidas como uma relação que envolve quatro quantidades, sendo duas quantidades de medidas de certo tipo e, duas outras, de outro tipo e a considera como uma relação quaternária.

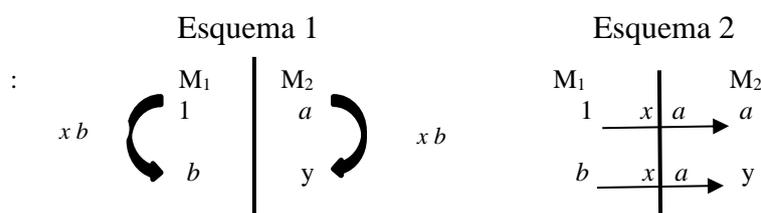
Vergnaud (1983) identifica, na relação quaternária, quatro subclasses principais de situações que são: i) multiplicação; (ii) divisão do primeiro tipo (divisão por partes); (iii) divisão do segundo tipo (divisão por quota) e (iv) regra de três: caso geral (quarta proporcional). Apresentamos no Quadro 01 a ilustração dos esquemas e os exemplos propostos por Vergnaud (1983, p.129-133).

**Quadro 01** – Subclasses de situações elementares de Isomorfismos de Medidas

<p style="text-align: center;">Multiplicação</p> <p>Esquema: <math>M_1</math>      <math>M_2</math></p> $\begin{array}{c c} 1 & a \\ \hline b & x \end{array}$ <p><b>Exemplo 1:</b> Ricardo compra 4 bolos a 15 centavos cada. Quanto ele tem que pagar?</p> <p><math>a=15</math>   <math>b=4</math>   <math>M_1</math>= número de bolos   <math>M_2</math>= custo</p>	<p style="text-align: center;">Divisão do primeiro tipo (por partes)</p> <p>Serve para encontrar a unidade de valor <math>f(1)</math></p> <p>Esquema: <math>M_1</math>      <math>M_2</math></p> $\begin{array}{c c} 1 & x = f(1) \text{ (unidade de valor)} \\ \hline a & b = f(a) \end{array}$ <p><b>Exemplo 2:</b> Connie quer dividir seus doces com Jane e Susan. Sua mãe lhe deu 12 doces. Quantos doces cada uma receberá?</p> <p><math>a=3</math>   <math>b=12</math>   <math>M_1</math> = n° de crianças   <math>M_2</math>= n° de doces</p>
<p style="text-align: center;">Divisão do segundo tipo (por quotas)</p> <p>Serve para encontrar o <math>x</math>, conhecendo o <math>f(x)</math> e o <math>f(1)</math></p> <p>Esquema: <math>M_1</math>      <math>M_2</math></p> $\begin{array}{c c} 1 & a = f(1) \\ \hline x & b = f(x) \end{array}$ <p><b>Exemplo 3;</b> Peter tem R\$15 para gastar e ele gostaria de comprar carrinhos em miniatura, que custam R\$3 cada. Quantos carrinhos ele pode comprar?</p> <p><math>a=3</math>   <math>b=15</math>   <math>M_1</math>= n° de carrinhos   <math>M_2</math> = custos</p>	<p style="text-align: center;">Regra de três (caso geral) ou quarta proporcional</p> <p>Esquema: <math>M_1</math>      <math>M_2</math></p> $\begin{array}{c c} a & b \\ \hline c & x \end{array}$ <p><b>Exemplo 4:</b> Quando vovó faz geleia de morangos, ela usa 3,5 kg de açúcar para 5 kg de morangos. Quanto de açúcar ela precisa para 8 kg de morangos?</p> <p><math>a=5</math>   <math>b=3,5</math>   <math>c=8</math>   <math>M_1</math> = peso dos morangos   <math>M_2</math> = peso do açúcar</p>

**Fonte:** Vergnaud (1983, p.129-133).

Os esquemas utilizados para os Exemplos 1, 2, 3 e 4 do Quadro 01 tratam de correspondência entre duas espécies de quantidades (número de bolos e o custo deles, número de doces e número de crianças, número de carrinhos e o custo deles e, por fim, o peso do açúcar para o peso dos morangos). No exemplo 1, se a criança considerar apenas números a serem multiplicados para encontrar a solução, ou seja, 4 vezes 15 ou 15 vezes 4, teremos uma composição binária. Mas, se forem considerados 4 bolos por 15 centavos, o resultado será centavos por bolos. Segundo Vergnaud (1983), para essa situação, é provável que as crianças extraíam uma *operação unária* ao invés de uma *lei binária de composição*. O autor sugere duas operações de pensamentos diferentes, uma utilizando o operador escalar  $b$ , no Esquema 1 e, a outra, um operador funcional  $a$ , no Esquema 2,



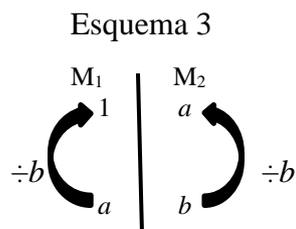
No Esquema 1, as crianças podem usar o operador escalar ( $a$  vezes  $b$ ) que consiste em transportar para  $M_2$ , partindo de  $a$  para  $y$ , o operador que liga 1 a  $b$  em  $M_1$ . No Esquema 2,  $a$  é considerado um operador funcional porque representa o coeficiente da função linear de  $M_1$  para  $M_2$ . Sua dimensão é o coeficiente de duas outras dimensões (centavos por bolo). As crianças podem usar o operador funcional ( $b \xrightarrow{x a} y$ ) que consiste em transportar para a linha abaixo, partindo de  $b$  para  $y$ , o operador que liga 1 a  $a$  na linha de cima. (VERGNAUD, 1983, p.130, tradução nossa)<sup>7</sup>.

Nesse sentido, corroboramos a afirmação de Gitirana et al. (2014) que diz ser importante enfatizar a multiplicação como uma relação quaternária com as propriedades utilizadas pelo aluno, que aproxima os problemas de multiplicação por um escalar (a razão) e, com isso, segundo as autoras, a propriedade da proporção é compreendida por ele.

Em relação ao Exemplo 2 do Quadro 01, em que temos uma divisão por partes, que se refere a uma das maneiras sugeridas por Vergnaud (1983) para identificar a taxa que relaciona  $M_1$  e  $M_2$ , na qual apresenta uma situação que se resume em identificar o valor numérico ( $f(1)$ ) que corresponde ao valor da unidade e pode ser resolvida com a propriedade linear da relação de proporção, o autor sugere como resolução a aplicação do

<sup>7</sup> The children can use a function operator ( $b \xrightarrow{x a} y$ ) that consists of transposing on the lower line, from  $b$  to  $x$ , the operator that links 1 to  $a$  on the upper line (VERGNAUD, 1983, p.130).

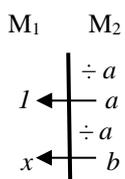
operador escalar  $\div b$  (dividir por b) de acordo com o Esquema 3



O estudante obterá o resultado identificando a razão entre  $1$  e  $a$  e usando essa razão para ver qual é o número multiplicado, porque  $a$  dá o valor de  $b$ .

Quanto ao Exemplo 3 do Quadro 01, a situação apresenta uma forma de divisão que precisa ser identificada pelo estudante sem o valor da unidade e que é encontrado ao se fazer a divisão em que o valor de  $x$  representa a quantidade de cotas de carrinhos que pode ser comprado por R\$  $b$ . (*b valores em Reais*). O Esquema 4 poderá ajudar o estudante nessa compreensão.

Esquema 4

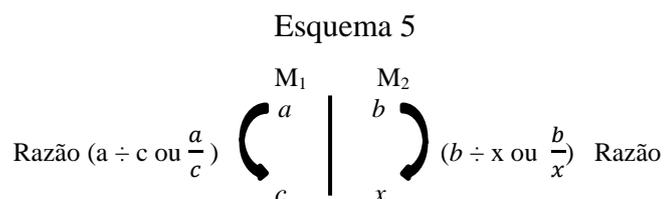


É frequente, principalmente quando os números não são inteiros e de baixo valor. Vergnaud (1983) afirma que as crianças preferem descobrir quantas vezes  $a$  cabe dentro de  $b$  (ideia de cotas), achar o operador escalar e transpô-lo para  $M_1$ , evitando, assim, o raciocínio de dimensões e coeficientes inversos (VERGNAUD, 1983, p. 132, tradução nossa)<sup>8</sup>.

No Exemplo 4 do Quadro 01, observamos tratar-se de uma classe de situações que pode ser resolvida por diferentes procedimentos, utilizando as propriedades da relação de quatro termos. Gitirana et al. (2014, p.65) contribui com este pensamento ao analisar uma situação semelhante dessa classe que, torna-se mais fácil – ou difícil – dependendo de serem múltiplos um do outro (ou não serem) os dois valores dados de uma mesma grandeza. Um bom começo desse entendimento, segundo as autoras, é lembrar sempre da razão que se mantém numa proporcionalidade. Observando-se a proporcionalidade, a razão entre duas grandezas de mesma natureza é igual à razão entre as grandezas

<sup>8</sup> *Frequently, especially when the numbers are not small whole numbers, children prefer to find out how many times  $a$  goes into  $b$ , get the scalar operator, and transpose it in  $M_1$ . This avoids reasoning on inverse quotients of dimensions* (VERGNAUD, 1983, p. 132).

correspondentes. (GITIRANA et al., p. 69) O Esquema 5, sugerido pelas autoras, apoiadas em Vergnaud (1988), poderá favorecer a sua resolução pelo estudante.

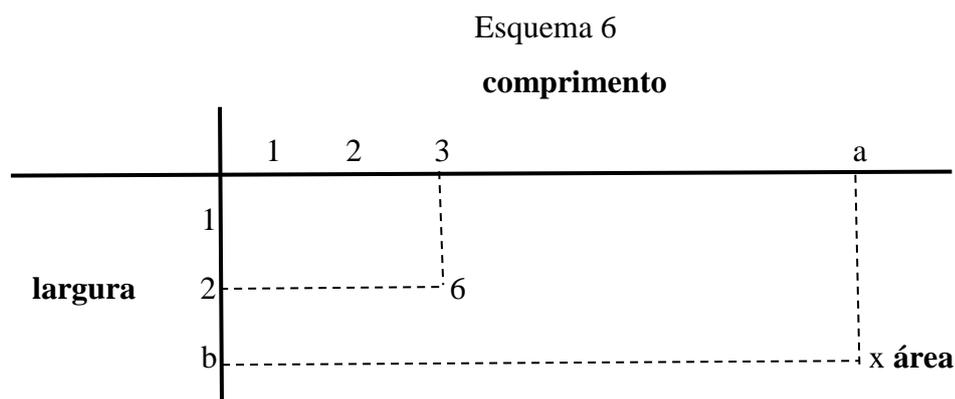


Gitirana et al. (2014, p. 69) afirmam que essa estratégia da regra de três pauta-se no fato de as razões serem iguais, ou seja,  $\frac{a}{c} = \frac{b}{x}$  e, ao adotar a regra, o estudante aplica uma das propriedades da proporcionalidade, na qual o produto dos meios é igual ao dos extremos. Isso, sem buscar o seu significado, o que torna a resolução desse tipo de situação uma forma de memorização de uma regra ou de uma propriedade.

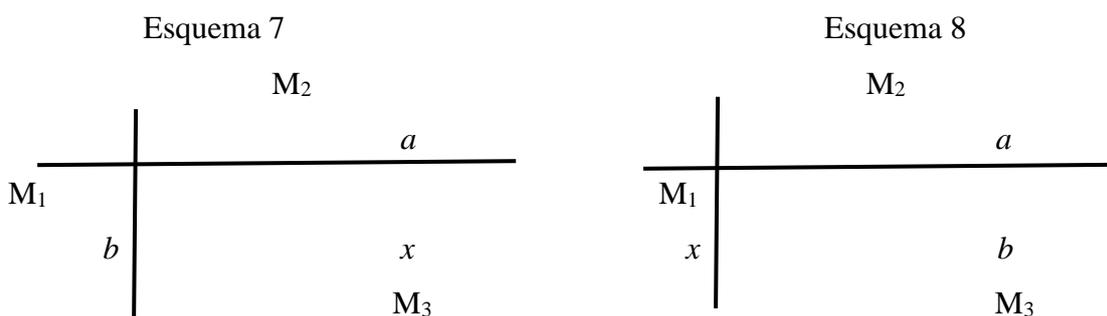
Diante disso, percebemos a diferença no tratamento das situações de proporcionalidade simples que envolvem apenas duas variáveis e que tem como modelo de resolução a função linear, daquelas situações de produto de medidas e proporção múltiplas, que envolvem três (ou mais) variáveis e um modelo de resolução que difere da função linear, conforme afirma Vergnaud (1983) e que descrevemos no próximo tópico.

### 1.2.2 Produto de Medidas e Proporção Múltipla

Vergnaud (1983, p.134) define a classe produto de medidas como uma estrutura que consiste de uma composição de duas medidas espaciais,  $M_1$  e  $M_2$ , dentro de uma terceira  $M_3$  e que descreve as situações referentes a área, volume, produto cartesiano, trabalho e muitos outros conceitos físicos. Diferentemente do Isomorfismo de medidas, essa estrutura não pode ser resolvida apenas por uma simples tabela de correspondência, por estar envolvendo, pelo menos, três variáveis e é representada por uma tabela de dupla correspondência, como no caso do cálculo da área de um retângulo, exemplificado a seguir pelo Esquema 6, proposto por Vergnaud (1983, p.134).



Vergnaud (1983, p.134) analisa o Esquema 6 como a representação de uma proporção dupla da área para o comprimento e largura de forma independente. O autor afirma que as operações de multiplicação e divisão são identificadas em situações da classe de produto de medidas. No caso das situações envolvendo área de um retângulo, temos: i) a multiplicação, dado o valor das medidas elementares para encontrar o valor da medida-produto, conforme sugerido por Vergnaud (1983, p.135), no Esquema 7, e ii) a divisão, quando dado o valor do produto e o valor de uma medida elementar para encontrar o valor da outra medida, sugerido pelo Esquema 8 de Vergnaud (1983 p.135).



Em relação à proporção múltipla, Vergnaud (1983, p.138) afirma ser uma estrutura muito parecida com o produto de medidas do ponto de vista das relações aritméticas: uma medida (grandeza)  $M_3$  é proporcional a duas medidas (grandezas)  $M_1$  e  $M_2$ , diferentes e independentes. O autor exemplifica essa classe com duas situações:

- 1) A produção (mensal ou quinzenal ou outro período que queira considerar) de leite ( $M_3$ ) de uma fazenda é (sob certas condições) proporcional ao número de vacas ( $M_1$ ) e ao número de dias ( $M_2$ ) do período considerado;
- 2) O consumo de cereal ( $M_3$ ) num acampamento de escoteiro é proporcional ao número de pessoas ( $M_1$ ) e ao número de dias ( $M_2$ ).

Portanto, na proporção múltipla, ao alterar-se o valor de qualquer uma das grandezas envolvidas, alteram-se todas elas, ou seja, no 1), ao alterar o número de vacas e o número de dias do período estipulado, alteraria a produção de leite e, analogamente, no 2), ao alterar o número de pessoas ou número de dias no acampamento, alteraria o consumo de cereal pelos escoteiros.

Os esquemas sugeridos por Vergnaud (1983) para a resolução de situações envolvendo a ideia de proporção múltipla são similares aos da proporcionalidade simples, vistos no item 2.1.5.1 e analisados a partir dos exemplos 1, 2 e 3 desse mesmo tópico.

Nesse tipo de situação – proporção múltipla –, são considerados como um fator de proporcionalidade sempre que a grandeza for relacionada a tempo (ou período).

O que difere o eixo de produto de medidas e a proporção múltipla, segundo o autor, é a escolha e a expressão das unidades. No produto de medidas, existe um modo canônico de escolher as unidades. Por exemplo, para se encontrar a área de um quadrado, temos: (unidade de comprimento) x (unidade de comprimento) = (unidade de área), ou seja, as unidades do produto são expressas como produtos de unidades elementares (centímetros ou metros quadrados, centímetros ou metros cúbicos, entre outros), enquanto na proporção múltipla as unidades geralmente não têm propriedades específicas, conforme declara Vergnaud (1983, p. 134).

Concernente a este tópico, nesta investigação trataremos apenas a respeito da ideia da medida de área (ou de uma superfície), dentro do aspecto de uma configuração retangular, utilizando-se da análise de exemplos com a utilização da malha e das operações de multiplicação e divisão.

*Exemplo 5: Qual é a área de um terreno de forma retangular que tem 7 m de comprimento e 4 m de largura?*

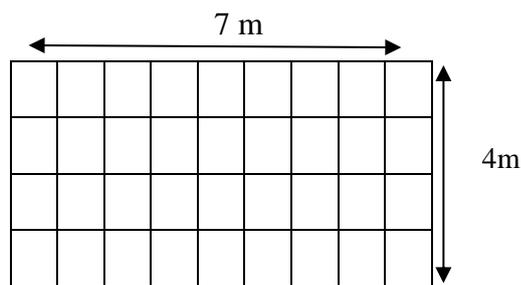
Na visão de Vergnaud (2009), para medir a superfície de um terreno (nesse caso específico) não se esquadriha o solo e ele não é recoberto por “metros quadrados” em cartolina. O autor referiu-se aos seus escritos acerca das medidas diretas de uma superfície e a noção de enquadramento. Nesse sentido, Vergnaud (2009) continua a sua análise acerca da noção da área afirmando:

O exemplo da área do retângulo é evidentemente o mais simples para se fazer compreender como se procede indiretamente [...] Ele coloca bem em evidência que a medida de uma superfície é o produto de um comprimento por uma largura e que, então, trata-se de uma medida composta, redutível a uma composição de medidas mais elementares (VERGNAUD, 2009, p. 157).

Vergnaud (2009) explora o seu estudo do conceito de área, a partir de duas grandezas de mesma natureza e que, por meio da multiplicação entre elas, obtém-se outra grandeza produto, a área. Portanto, podemos calcular a área desse terreno, por meio de dois métodos, a saber:

*Primeiro método:* medida direta pela aplicação de um quadriculado de unidades de área e contagem dessas unidades: por exemplo, 28. sugerido na Figura 01

**Figura 01** - Malha decomposta em quadrados dispostos em linhas e colunas.



**Fonte:** Adaptado de Vergnaud (2009).

Esse tipo de resolução, segundo Vergnaud (2009, p.157), esbarra em “graves dificuldades” quando o recobrimento não é exato e é necessário, então, usar o procedimento de aproximações para resolver a situação.

*Segundo método:* medida das duas dimensões do retângulo em unidades de comprimento, multiplicação desses dois números. Por exemplo:  $7 \times 4 = 28$ .

Um retângulo não é outra coisa senão o resultado de uma certa construção geométrica com quatro segmentos de reta e ângulos (a figura é fechada e convexa, os ângulos são todos retos, os segmentos são iguais dois a dois, e dois segmentos iguais estão em oposição um ao outro). Em decorrência, a medida da superfície do retângulo deve ser deduzida da medida dos objetos que serviram à sua construção. É o que a fórmula traduz: Medida de área = comprimento x largura (VERGNAUD, 2009, p. 157-158).

Tendo como análise a que foi proposta por Vergnaud (2009), podemos observar também que o terreno em forma retangular, quando decomposto em quadrados (linhas e colunas de um metro de comprimento), sugere que o comprimento dos lados dos quadrados adjacentes a ela, tanto no plano das dimensões como no plano numérico.

Para os números 7 e 4 da situação do exemplo 5, representada na malha da Figura 01, ao multiplicar, temos 28 e para as dimensões metros vezes metros, temos metros quadrados ( $m \times m = m^2$ ). Portanto, a área do terreno retangular será igual a 28 metros quadrados. É essa relação que, segundo o autor, dá sentido à escrita simbólica das unidades de área:  $m^2$ ,  $cm^2$ ,  $km^2$  etc. (VERGNAUD, 2009 p. 255).

Analisaremos a situação do Exemplo 5 a partir da representação de Gitirana et al (2014, p,74), apoiados em Vergnaud (1988), como mostra a Figura 02

**Figura 02:** Esquema de proporcionalidade simples envolvendo largura e área

<p>a)</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">1</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">7</td> <td style="padding: 5px;"><b>comprimento</b></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">1</td> <td colspan="3" style="border-top: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><b>largura</b></td> <td colspan="3"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">4</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;"><b>x</b></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;"><b>área</b></td> <td></td> </tr> </table>		1	7	<b>comprimento</b>	1				<b>largura</b>				4	<b>x</b>	<b>área</b>		<p>b)</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">largura</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">área</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">1</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">7</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">4</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">x</td> </tr> </table>	largura	área	1	7	4	x
	1	7	<b>comprimento</b>																				
1																							
<b>largura</b>																							
4	<b>x</b>	<b>área</b>																					
largura	área																						
1	7																						
4	x																						

**Fonte:** Adaptado de Gitirana et al (2014, p.74).

Na Figura 02 a, temos um diagrama que possibilita o entendimento descrito por Vergnaud (2009) como uma dupla proporcionalidade. Uma vez fixado o comprimento, obtêm-se uma proporcionalidade simples entre a largura e a área. Por exemplo, fixando-se o comprimento em 7 metros, obtêm-se a proporção (Figura 02b).

Compreendemos o que Vergnaud (2009) designa como dupla proporcionalidade quando, utilizando como exemplo, o caso da medida da área de um terreno retangular (exemplo 5), podemos dizer que essa área, de um lado é proporcional ao comprimento (quando a largura permanece constante) e à largura (quando o comprimento permanece constante).

Pode-se mesmo considerar que o produto de medidas não é bem compreendido pelas crianças a não ser quando elas o analisam como uma dupla proporcionalidade”. Em todo o caso, é esta dupla proporcionalidade que justifica em física a identificação de uma dimensão a um produto de dimensões mais simples. Ocorre da mesma forma para os conceitos de superfície e de volume (VERGNAUD, 2009, p.259).

A esse respeito corroboramos a afirmação de Lima (2016, p.65) quando diz que “a compreensão de situações da configuração retangular não é fácil para as crianças, por isso uma possibilidade é fazer uso da Proporção Dupla, o que justifica entender uma dimensão pelo produto de outras duas”.

Concordamos também com Souza Santos (2017) que, ao analisar o tema configuração retangular nessa mesma perspectiva, afirmou ser “possível perceber que não existe uma relação entre o comprimento e a largura, haja vista que podemos alterar o valor do comprimento, influenciando diretamente na mudança do valor da área, mas não da largura, ou podemos alterar o valor da largura influenciando a área e não o comprimento” (SOUZA SANTOS, 2017, p.78).

O tema configuração retangular, ao ser explorado nos anos iniciais do ensino fundamental, pode dar significado à multiplicação e ao trabalhar com o produto cartesiano para esse fim, o professor tem em mãos uma variedade de situações que o possibilitem trabalhar essa operação e suas propriedades.

Para a ampliação dos estudos acerca do ensino das estruturas multiplicativas, buscamos teóricos como Shulman (1986; 1987) e Ball, Thames e Phelps (2008) que tratam dos conhecimentos necessários para a professor ensinar. Apresentamos suas ideias no tópico seguinte.

### **1.3 Os Conhecimentos para a formação docente e para o ensino da matemática**

Partimos do pressuposto de que é importante investir na formação continuada do professor que favoreça a (re)significação do conhecimento profissional na relação teoria-prática. Interessa-nos, portanto, centrar o olhar no trabalho docente e nos processos de ensino empreendidos pelo professor que leciona matemática nos anos iniciais. Para isso, abordaremos neste tópico, os estudos de Shulman (1986; 1987) que citam os conhecimentos necessários à formação docente; Ball, Thames e Phelps (2008) sobre os conhecimentos para o ensino da matemática.

Shulman (1986;1987) discute a dicotomia entre as diferentes concepções de ensino. Para o autor, é comprovado historicamente que a pedagogia e o conteúdo eram tidos como componentes dissociados em relação ao conhecimento dos professores. Com o desenvolvimento de pesquisas sobre o tema, o autor idealizou a construção de uma visão mais compreensiva do ensino, a partir de uma base de conhecimentos (Knowledge Base Theory), na qual ele destaca a um repertório profissional que contém categorias de conhecimento que subjazem à compreensão que o professor necessita para promover aprendizagens dos alunos (SHULMAN, 1986). O autor explicita várias categorias dessa base que são:

- Conhecimento de conteúdo,
- Conhecimento pedagógico geral,
- Conhecimento do currículo,
- Conhecimento pedagógico do conteúdo,
- Conhecimento dos alunos e de suas características,
- Conhecimentos dos contextos educacionais,
- Conhecimento dos fins, propósitos e valores educacionais

Que podem ser agrupados em:

- Conhecimento do conteúdo;
- Conhecimento pedagógico do conteúdo;
- Conhecimento curricular.

Shulman (1986) descreve-os da seguinte forma:

- Conhecimento do Conteúdo: “(...) o professor necessita não somente entender que alguma coisa é assim; o professor deve mais ainda compreender porque ele (o conteúdo) é assim, em que base sua garantia pode ser assegurada, e sob quais circunstâncias nossas crenças em suas justificativas podem ser enfraquecidas, e até mesmo negadas” (SHULMAN, 1986, p. 13);
- Conhecimento pedagógico de conteúdo: [vai] “além do conhecimento do conteúdo da matéria pela dimensão do conteúdo da matéria para ensino” (SHULMAN, 1986, p. 14);
- Conhecimento curricular: “é o conhecimento que o professor detém acerca das indicações curriculares para o ensino, ou seja, é o conhecimento dos materiais curriculares alternativos para o ensino de um determinado conteúdo. Nesse tópico, podem ser incluídos conhecimentos de teorias e pressupostos relativos aos processos de ensino e aprendizagem indicados no currículo” (SHULMAN, 1986, p.15).

Ainda em relação ao *conhecimento do conteúdo*, refere-se a conteúdo específico da matéria que o professor leciona. Inclui tanto as compreensões de fatos, conceitos, processos, procedimentos etc. de uma área específica de conhecimento quanto aquelas relativas à construção dessa área.

Quanto ao *conhecimento pedagógico do conteúdo* a ser ensinado ao aluno, Shulman (1986) investigou o “pensamento do professor” e o “conhecimento do professor”, partindo da constatação de que as pesquisas não levavam em conta questões relativas ao conteúdo específico a ser lecionado e, sobretudo, não investigavam de que forma o conhecimento adquirido pelo professor transforma-se em conhecimento necessário para o ensino. Esse tipo de conhecimento é construído constantemente pelo professor, ao ensinar, e enriquecido quando se amálgama com os outros tipos de conhecimentos e incorpora os aspectos do conteúdo mais relevantes para o ensino.

O *conhecimento curricular*, considerado não menos importante que os outros, Shulman (1986) considera um tipo de conhecimento que é capaz de dar uma visão ampla de programas designados e instituídos ao ensino de temas e tópicos particulares no dado nível e à variedade de materiais instrucionais disponíveis em relação aos programas. O professor, ao dominar esse conhecimento e compreender tais alternativas, pode realizar boas escolhas.

Apoiados em Shulman (1986, 1987), os pesquisadores do Grupo da Universidade de Michigan – EUA – Deborah L. Ball, Mark H. Thames e Geoffrey Phelps (2008) refinaram as categorias *conhecimento do conteúdo* e *conhecimento pedagógico do conteúdo*. Ball e sua equipe definiram domínios específicos para cada uma delas, levaram em consideração os conteúdos de matemática e os nomearam “conhecimento matemático para o ensino” como aquele conhecimento necessário para levar adiante o “trabalho de ensinar matemática” (BALL, HILL, BASS, 2005).

Ball, Thames e Phelps (2008) desenvolveram um quadro conceitual que apresenta os diferentes tipos de conhecimento para o ensino de matemática, que pode auxiliar o professor no desenvolvimento de seu trabalho docente e na aprendizagem dos seus estudantes.

**Quadro 02** – Categorias de conhecimentos propostos por Ball, Thames e Phelps (2008), a partir das categorias de conhecimentos defendidos por Shulman (1986)

Conhecimento do conteúdo		Conhecimento pedagógico do conteúdo	
Conhecimento comum do conteúdo	Conhecimento especializado do conteúdo	Conhecimento do conteúdo e dos estudantes	Conhecimento do currículo
Conhecimento horizontal do conteúdo		Conhecimento do conteúdo e do ensino	

**Fonte:** Ball, Thames e Phelps (2008) – traduzido e adaptado.

Ball, Thames e Phelps (2008) realizam seus estudos a partir de um questionamento anterior: “o que os professores necessitam saber e serem capazes de ensinar?”, feito por Ball, Hill e Bass (2005). Para obter essa resposta, o grupo de pesquisa de Michigan-EUA, desenvolveu um trabalho considerado de “baixo para cima” e, a partir da análise da prática dos professores investigados, procuraram compreender quais seriam os conhecimentos necessários ao ensino. Os autores afirmam que, obviamente, os professores necessitam saber quais os tópicos e procedimentos que vão ensinar: multiplicação, equivalência de frações e, assim por diante, mas, para promover o ensino, tal conhecimento não é suficiente. Então, o foco passou a ser sobre *como* os professores necessitam saber aquele conteúdo acrescido de *o que mais* os professores necessitavam saber sobre matemática e *como* e *onde* eles poderiam usar tal conhecimento na prática. Com isso, Ball, Thames e Phelps (2008) expuseram suas análises da forma seguinte:

Com base em nossa análise das demandas matemáticas do ensino, nós supomos que as categorias de Shulman de *conhecimento do conteúdo e do conhecimento pedagógico do conteúdo* podem ser subdivididas em conhecimento comum do conteúdo e conhecimento especializado do conteúdo, por um lado, e conhecimento do conteúdo e dos estudantes e por outro lado conhecimento do conteúdo e do ensino. Talvez, de maior interesse para nós é a evidência da segunda categoria – conhecimento especializado do conteúdo. Como conhecimento pedagógico do conteúdo, ele é estreitamente relacionado com a prática, mas, ao contrário do conhecimento pedagógico do conteúdo, ele não requer conhecimento adicional de estudantes ou do ensino. Ele é conhecimento distintamente matemático, mas ele não é necessariamente conhecimento matemático familiar aos matemáticos (BALL, THAMES E PHELPS, 2008).

Tomando como base o nosso objetivo de estudo, descreveremos esses tipos de conhecimentos para o ensino da matemática, descritos por Ball, Thames e Phelps (2008),

e os relacionaremos com os conhecimentos sobre as estruturas multiplicativas.

### 1.3.1 Tipos de Conhecimentos para o ensino da matemática e para o ensino das estruturas multiplicativas

#### 1.3.1.1 Conhecimento comum do conteúdo

Refere-se ao conhecimento matemático utilizado em outros contextos além daqueles do ensino. É um conhecimento necessário ao professor de matemática, mas não exclusivo dele.

No que concerne ao domínio deste conhecimento para o ensino das estruturas multiplicativas, podemos citar a capacidade de o professor resolver situações que envolvem as noções de estruturas multiplicativas como as do exemplo a seguir pelo uso de, pelo menos, uma estratégia pertinente.

Exemplo 6: *Numa casa há três meninas. Cada menina tem três brinquedos. Quantos brinquedos elas têm juntos?*<sup>9</sup>

Espera-se que o professor tenha a capacidade para resolver esse tipo de situação pelo uso de, pelo menos, uma estratégia pertinente, ou seja, esse profissional pode lançar mão, por exemplo, do modelo matemático  $a \times b = c$ , na situação seria 3 vezes 3 = 9, ou utilizar-se da adição de parcelas repetidas (3 brinquedos + 3 brinquedos + 3 brinquedos = 9 brinquedos). Pode resolver, ainda, representando a situação por desenhos e figuras e realizando a contagem, que também dá conta de resolver um conjunto de situações com essa estrutura. Enfim, o professor ter o conhecimento comum das estruturas multiplicativas pressupõe que, para que ele ensine efetivamente essa temática, é preciso que esse profissional seja capaz de resolver a situação por uma dessas estratégias aqui elencadas.

#### 1.3.1.2 Conhecimento especializado do conteúdo

Conhecimentos e habilidades matemáticas exclusivos do professor. Conhecimento voltado para o ensino de matemática.

No que concerne o domínio deste conhecimento para o ensino das estruturas multiplicativas, podemos citar que, em seu campo de estudo, a resolução de situações envolvendo: Isomorfismo de medidas, produto de medidas e proporcionalidade múltipla. O professor precisa compreender as similitudes e diferenças, do ponto de vista da matemática, entre esses tipos de situação de forma que possibilite interpretar as estratégias

---

<sup>9</sup> Situação retirada do livro de GITIRANA, V; MAGINA, S; CAMPOS, T; SPNILLO, A. Repensando a Multiplicação e a Divisão: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo, PROEM Ltda. 2014.

utilizadas pelos estudantes para sua resolução, bem como justificá-las do ponto de vista matemático.

Uma concepção observada entre alunos da educação básica é que o produto de qualquer “multiplicação sempre aumenta” e o professor precisa saber que isso é fato, quando se trata de números naturais, mas é importante que ele reconheça também que o mesmo não ocorre no conjunto dos números racionais, como visto no Exemplo 7.

*Exemplo 7: Dona Joana comprou 0,50 m de tecido para fazer uma blusa para sua filha. O preço do metro custou R\$ 1,20. Quanto foi pago por Dona Joana pela compra do tecido?*

Nessa situação, ao multiplicar a quantidade de metros a ser comprada e o valor correspondente a cada metro, Dona Joana irá pagar R\$ 0,60 (sessenta centavos), um valor menor do que o estabelecido na situação, relativo a preço. Isso implica que a adição de parcelas repetidas não resolve essa situação, como a que nos referimos no Exemplo 6.

Torna-se necessário o entendimento do professor que a concepção de que “multiplicação sempre aumenta” é adquirida por meio da experimentação e vivenciada com os números naturais, mas que ela poderia ser ratificada na medida em que o estudante vivenciasse somente experiências por meio das quais a multiplicação fosse tratada apenas como adição de parcelas iguais. Nesse sentido, consideramos, assim como Ball, Thames, e Phelps (2008), que o *conhecimento especializado do conteúdo* é importante por envolver a capacidade que o professor tem de analisar e identificar concepções equivocadas dos estudantes, do ponto de vista matemático, e fazer intervenções que o ajudem a ampliar seus conhecimentos e acreditamos que isso poderá favorecer o ato de ensinar.

#### *1.3.1.3 Conhecimento horizontal do conteúdo*

Conhecimento que faz com que o professor entenda como os conteúdos matemáticos relacionam-se entre si e ao longo dos anos escolares.

No que concerne ao domínio deste conhecimento das estruturas multiplicativas, consideramos que ele se constitui no entendimento de que essas estruturas transitam entre a aritmética, a álgebra, a geometria, a trigonometria e todos os campos da matemática, favorecendo ao professor, a compreensão dos conceitos e procedimentos envolvidos, bem como a articulação entre eles.

#### *1.3.1.4 Conhecimento do conteúdo e dos estudantes*

Conhecimento que articula o conhecimento do conteúdo, assim como aquilo que os alunos apresentam a respeito desse conteúdo e o que é necessário para ajudá-los nas

suas dificuldades, cujo domínio para o ensino das estruturas multiplicativas, proporciona ao professor reconhecer os erros dos estudantes e ter a capacidade de analisá-los do ponto de vista matemático. Por exemplo, quando interpretam situações que envolvem proporcionalidade.

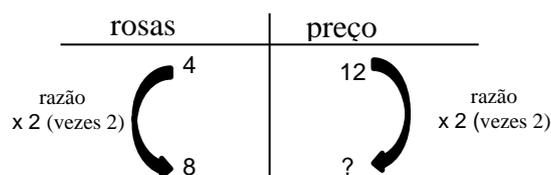
Analisemos uma situação envolvendo proporcionalidade simples no Exemplo 8.

Exemplo 8: *Quatro rosas custam R\$ 12,00. Qual é o preço de oito rosas iguais às anteriores?”*

É importante que o professor compreenda quais estratégias o aluno utilizará para resolvê-la. Ele pode utilizar lançar mão da taxa unitária ou do raciocínio proporcional. Precisa entender que não é preciso, necessariamente, saber o preço unitário da rosa (taxa unitária)<sup>10</sup> e que esse tipo de situação pode favorecer a ampliação da ideia de proporcionalidade por meio do uso de razões escalares e taxa de proporcionalidade, conforme discutido por Vergnaud (2009).

O autor afirma que a situação apresentada trata-se de uma relação quaternária com o significado de proporcionalidade simples. Interpretando Ball, Thames e Phelps (2008), consideramos ser interessante que, ao promover o ensino dessa temática, o professor compreenda também que o aluno pode resolvê-lo identificando, por exemplo, a razão entre a quantidade de rosas das quais se sabe o preço, a quantidade daquelas que se deseja saber o preço e multiplicá-la – a razão  $\frac{8 \text{ rosas}}{4 \text{ rosas}} = 2$  – para calcular o preço final, como no esquema da Figura 03, descrita a seguir

**Figura 03** -- Esquema de resolução de situação de proporcionalidade simples – Análise vertical



**Fonte:** Adaptado de Vergnaud (2009, p. 247).

Nessa estratégia mantém-se a grandeza em foco, todavia, é importante que o professor compreenda também que uma estratégia mais complexa pode ser utilizada: a da taxa proporcional. Nela, o significado seria outro: identificar que a situação apresentada – proporcionalidade simples – é um caso da função linear e que pode ser escrita como  $f(x) = a x$ , em que  $a$  é a taxa de proporcionalidade (3) que multiplica o número de rosas.

<sup>10</sup> Estudos como os de Pittalis, Christou e Papageorgiou (2003) afirmam que a utilização da estratégia de taxa unitária em situações como essa, muitas vezes é utilizada mecanicamente.

É preciso saber que não são três rosas, mas uma taxa de proporcionalidade, três reais a cada rosa. Vergnaud (2009) propõe essa representação conforme a Figura 04, a seguir, na qual é possível perceber a relação entre as duas medidas das grandezas de naturezas diferentes (quantidade de rosas e preço).

**Figura 04** - Esquema de resolução de situação de proporcionalidade simples – Análise horizontal

	taxa	
	x 3 (vezes 3)	
rosas	→	preço
4		12
8		?

**Fonte:** Adaptado de Vergnaud (2009, p. 251).

Segundo Vergnaud (2009, p.246), não é possível utilizar essa estratégia com as crianças do ensino básico, pois a noção da proporção está além do limite da capacidade dos melhores alunos no fim dessa etapa de ensino. Porém, esse tipo de estratégia permite apresentar as relações presentes em uma multiplicação e, a mais simples que seja, coloca em jogo um cálculo relacional que envolve quatro quantidades e vários tipos de operações.

#### 1.3.1.5 *Conhecimento do conteúdo e do ensino*

Configura-se como um domínio que combina o conhecimento sobre aquele conteúdo matemático e como ensiná-lo.

No que concerne ao domínio de *Conhecimento do conteúdo e do ensino* das estruturas multiplicativas, é importante o professor trabalhar com variadas situações para construir conceitos, propondo novas tarefas ou novas situações sobre as estruturas multiplicativas para o desenvolvimento dos conceitos utilizados.

Exemplos de situações envolvendo isomorfismos de medidas, com graus de dificuldades diferentes.

A) Tenho três pacotes de iogurte. Há quatro iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho? B): Minha mãe quer comprar tecido a R\$ 24,80 o metro para fazer um vestido e um paletó. Ela necessita de 3,50 metros de tecido. Quanto ela deverá gastar? B) Paguei R\$ 12,00 por três garrafas de vinho. Quanto custa cada garrafa? (VERGNAUD, 2009, p. 239).

É preciso ser do conhecimento do professor que, ao ensinar situações envolvendo proporcionalidade simples, nem todas têm o mesmo grau de dificuldade. É importante que o educador compreenda que tal dificuldade depende também das quantidades relativas à mesma grandeza utilizada na situação, por exemplo, se são representadas por

números múltiplos ou não. Se forem, é importante que ele saiba que a taxa unitária é a mais utilizada pelos estudantes e que cabe a ele, professor, ao promover o ensino, utilizar também situações com quantidades não múltiplas para estimular a “desequilibração” do conhecimento. É possível perceber, nesse exemplo, o que Ball, Thames e Phelps (2008) afirmam: haver inter-relação entre as suas categorias de conhecimentos.

#### 1.3.1.6 *Conhecimento do conteúdo e do currículo*

Conhecimento que é desenvolvido a partir de propostas curriculares e documentos oficiais ao longo do ensino fundamental.

No que se refere ao domínio do *Conhecimento de conteúdo e do currículo*, em relação às estruturas multiplicativas, podemos citar o conhecimento das indicações curriculares para o ensino do campo conceitual multiplicativo, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o ensino fundamental, no qual encontram-se evidências da influência dos estudos de Vergnaud para resolução dos problemas propostos. Esse documento oficial apresenta situações associadas à Multiplicação Comparativa (1), Proporcionalidade (2) e Combinatória (3).

Exemplos: (1) *Pedro tem R\$ 5,00 e Lia tem o dobro dessa quantia. Quanto tem Lia?* (2) *Marta vai comprar três pacotes de chocolate. Cada pacote custa R\$ 8,00. Quanto ela vai pagar pelos três pacotes?* (3) *Tendo duas saias — uma preta (P) e uma branca (B) — e três blusas — uma rosa (R), uma azul (A) e uma cinza (C). De quantas maneiras diferentes posso me vestir?* (BRASIL, 1997, p. 72; 73).

Situações como essas, sugeridas pelos PCN e por materiais didáticos, se bem exploradas, a partir dos outros conhecimentos já explicitados, podem disponibilizar ao professor uma base para suas ações docentes de preparo e vivência de aulas, contribuindo, assim, para que seu aluno aprenda.

Em relação ao conhecimento desenvolvido na utilização de materiais didáticos para o ensino de matemática nos anos iniciais, Serrazina (2012) afirma que:

Um professor tem de perceber o que é essencial numa definição e ser capaz de fazer uma análise crítica do que encontra nos livros didáticos. [...] Por exemplo, não basta ao professor saber que um número par é um número que é múltiplo de 2 e que se pode representar por  $2n$  e um número ímpar é todo o número que se pode representar na forma  $2n+1$ , é preciso que seja capaz de perceber como pode levar um aluno do 1.º ano de escolaridade a compreender quando é que um número é par ou ímpar. Assim, para além de saber as definições de modo correto, precisa perceber como adequá-las a uma determinada etapa do percurso escolar das crianças (SERRAZINA, 2012, p. 269).

A autora enfatiza também que esse tipo de conhecimento possibilita ao professor uma visão global do currículo a ser desenvolvido no ensino fundamental e um conhecimento aprofundado do ciclo de ensino em que trabalha, de modo que conheça

como as ideias matemáticas vão-se ampliando e como se relacionam.

Em suma, fundamentados nos estudos que fizemos acerca do domínio dos conhecimentos propostos por Ball, Thames e Phelps (2008) para o ensino das estruturas multiplicativas, nos anos iniciais e finais do ensino fundamental, acreditamos que o professor possuidor dessa base de conhecimentos tenha melhores condições de atingir seus objetivos na aprendizagem dos seus estudantes, ao investir em caminhos que proporcionem o seu desenvolvimento profissional. Essa trajetória está relacionada com a sua vivência em sala de aula, sua prática e sua reflexão sobre a prática, como afirma Freire (1991): *ninguém nasce professor ou é marcado para ser professor. A gente se forma como educador permanentemente na prática e na reflexão sobre a prática* (FREIRE, 1991, p.32). Para discutir a questão da reflexão *na* e *sobre* a ação e sobre a reflexão-na-ação, apoiamo-nos em Schön (1987), Zeichner (1993, 2008) e Serrazina (1999), conforme descrito no tópico a seguir.

#### **1.4 A formação reflexiva do professor que ensina matemática**

Schön (1987) considera que o saber profissional traduz-se num conjunto de competências marcadas pela prática da reflexão em diferentes níveis: conhecimento na ação – é o conhecimento que os profissionais demonstram na execução da ação; reflexão na ação – são descrições verbais ocorridas enquanto os profissionais atuam; reflexão sobre a ação – é a reconstrução mental da ação para tentar analisá-la retrospectivamente.

Schön (1992) afirma que é possível olhar retrospectivamente e refletir *sobre* a reflexão-na-ação. Nosso trabalho busca compreender, sobretudo, a reflexão que o professor faz *sobre* a sua ação e sobre a reflexão *na* ação, por trazer elementos importantes descritos pela exigência do uso de palavras, segundo SCHON (1992, p.83).

Nesse sentido, as ideias de Schön (1987, 1992) ajudam-nos a investigar aspectos que apresentam indícios de que o professor, ao expressar, coletivamente, suas estratégias de ensino das estruturas multiplicativas, buscou refletir sobre os diferentes momentos de sua formação inicial e continuada, trazendo para a sua vivência em sala de aula, esse aprendizado.

Zeichner (1993, 2008), amplia os estudos de Schön, na medida em que defende, entre outros elementos, aquele por meio do qual a prática reflexiva consiste no compromisso em favor da reflexão enquanto prática social.

Corroboramos com as ideias de Zeichner (1993) quando discute acerca da necessidade de os professores cultivarem, de forma ativa, uma postura reflexiva e

reconhecemos que esse profissional tem muito a nos “ensinar” por meio da análise de suas experiências, suas teorias sobre o ensino, e sobre a sua reflexão coletiva a respeito dessas teorias e experiências. Para o autor, uma forma de pensar a prática reflexiva é:

[...] encará-la como a vinda à superfície das teorias práticas do professor, para análise crítica e discussão. Expondo e examinando as suas teorias práticas, para si próprio e para os seus colegas, o professor tem mais hipóteses de se aperceber das suas falhas. Discutindo publicamente no seio de grupos de professores, estes têm mais hipóteses de aprender uns com os outros e de terem mais uma palavra a dizer sobre o desenvolvimento da sua profissão. (ZEICHNER, 1993, p. 22).

A ideia da reflexão como prática social foi levada em consideração neste trabalho, para organização de um grupo de estudos com caráter colaborativo, com os professores nos anos iniciais do ensino fundamental, em sua própria escola. Para Zeichner (1993),

[...] o processo de aprender a ensinar não ocorre somente na formação inicial, se prolonga durante toda a carreira do professor e de que, independentemente do que fazemos nos programas de formação de professores e do modo como o fazemos, no melhor dos casos só podemos preparar os professores para começarem a ensinar. [...] Os formadores de professores têm a obrigação de ajudá-los a internalizarem sua disposição e capacidade de estudarem a maneira como ensinam e de melhorar com o tempo, responsabilizando-se pelo seu próprio desenvolvimento profissional” (ZEICHNER, 1993, p. 32).

Procuramos, portanto, durante as discussões no grupo de estudo com os professores, incentivar o protagonismo dos participantes, buscando criar um ambiente de estudo e discussão aberta sobre temas que interessassem ao grupo e que favorecessem a explicitação das hipóteses e teorias advindas da sua prática.

Outro estudo utilizado como aporte teórico para a constituição do grupo, planejamento dos estudos e análise dos dados coletados foi o de Serrazina (1999). A autora aponta a relação reflexão *sobre* a prática com o conhecimento profissional do professor e tal fato amplia o seu grau de consciência. Sobre o tema, a autora expõe:

[...] a ideia que mudanças nas práticas parecem ocorrer quando os professores ganham autoconfiança e são capazes de refletir nas suas práticas. Isto pressupõe um elevado grau de conscientização que os ajude a reconhecer as suas falhas e fraquezas e a assumir um forte desejo de ultrapassá-las (SERRAZINA, 1999, p. 168).

Para Serrazina (1999), o grau pelo qual o professor aceita nova informação ou mudança conceitual acontece, em grande parte, determinado por um conjunto de fatores: congruência entre as ideias pré-existentes do professor, suas perspectivas no domínio profissional e aquelas expressas na formação.

Portanto, acreditamos que o estudo e as discussões acerca das estruturas multiplicativas e sua aplicação na prática dos professores dos anos iniciais, propicia

oportunidades aos participantes de um grupo de estudos ou a ampliação do conhecimento matemático e seu ensino gerado pela reflexão individual e coletiva. Em suma, a partir desse entendimento, o conhecimento profissional docente e a capacidade reflexiva do professor também serão ampliados refletindo no seu desenvolvimento profissional docente. Para isso, apoiamo-nos em Ponte (1995) e Day (2001), segundo descrito no tópico a seguir.

### **1.5 O Desenvolvimento profissional docente**

Ponte (1995) discute o desenvolvimento profissional de professores a partir da constatação de sua importância diante de uma sociedade em constantes mudanças. O autor considera que a formação inicial do professor é insuficiente para a abordagem de todos os conhecimentos e competências que precisa para exercer sua função ao longo de toda a sua carreira. Isso decorre da grande e pesada responsabilidade imposta à escola por essa sociedade.

Day (2001) também considera a formação inicial como parte do desenvolvimento profissional docente, mas discute esse tema a partir da análise da natureza da atividade profissional do professor, parte da constatação da influência da vida pessoal do docente até a profissional, do seu envolvimento com as políticas públicas e nos contextos escolares nos quais se realizam essas atividades.

Alguns itens são elencados por Day (2001) como forma de compreender como acontece e como podemos perceber esse desenvolvimento. São eles: os contextos em que o professor está inserido, os objetivos de sua vida pessoal, sua capacidade investigativa, o desenvolvimento de suas competências e do seu saber profissional, as suas condições de trabalho – a sala de aula, as culturas de ensino e a liderança –, a avaliação, o planejamento do seu desenvolvimento pessoal e sua mudança, a sua formação continuada, os modelos de parceria e as redes de aprendizagem e aperfeiçoamento.

Portanto, o sucesso da escola, da aprendizagem e do desempenho de seus estudantes, da melhoria dos padrões de ensino, do conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo, assim como as diferentes formas de planejamento e avaliação estão intimamente ligados ao desenvolvimento profissional docente.

O que vem a ser, então, o desenvolvimento profissional docente para Day (2001)? O autor considera que:

O desenvolvimento profissional envolve todas as experiências espontâneas de aprendizagem e as atividades conscientemente planejadas, realizadas pelo benefício, directo ou indirecto do indivíduo, do grupo ou da escola e que contribuem, através destes, para a qualidade da educação na sala de aula. É o

processo através do qual os professores, enquanto agentes de mudança, reveem, renovam e ampliam, individual ou coletivamente, o seu compromisso com os propósitos morais do ensino, adquirem e desenvolvem, de forma crítica, juntamente com as crianças, jovens e colegas, o conhecimento, as habilidades, e a inteligência emocional, essenciais para uma reflexão, planejamento e prática docente eficazes em cada uma das fases de suas vidas profissionais (DAY, 2001, p.20-21).

O objetivo principal do desenvolvimento profissional, na visão de Day (2001), é possibilitar aos professores a realização desse papel dentro dos mais variados contextos em que trabalham e onde tem lugar a aprendizagem. Para esse autor, os elementos externos que influenciam esse desenvolvimento estão ligados à história de vida do professor, à realidade em que ele se insere e às políticas públicas das quais faz parte. Todos esses elementos contribuem para o desenvolvimento profissional docente e esse processo acontece em toda a sua carreira. As circunstâncias, as suas histórias pessoais, profissionais e suas diferentes aprendizagens definem como isso ocorre. Nesse contexto, analisaremos o desenvolvimento profissional a partir da participação dos professores no Programa OBEDUC/E-Mult.

Tanto para Ponte (1995) como para Day (2001), o desenvolvimento profissional docente perpassa a (re)construção de uma *identidade profissional do professor*. A construção de uma *identidade profissional do professor de matemática* permeia as ideias de diferentes pesquisadores da educação matemática nas escolas portuguesas. Day (2001) relaciona o desenvolvimento profissional a situações vivenciadas e considera que elas influenciam diretamente a sua capacidade de reflexão. Nesse sentido, tudo que é vivido pelo profissional, sejam elas produto de bem ou mal-estar emocional (avanços, limitações pessoais, constrangimentos ou superações experimentadas em determinadas situações) influenciam fortemente sobre a sua capacidade reflexiva, reelaboração da prática e a reação dos professores frente aos desafios de ensinar. Assim, com base nesses fundamentos analisaremos o desenvolvimento profissional a partir das reflexões geradas no âmbito participação dos professores no Programa OBEDUC/E-Mult.

Day (2001, p.16) afirma que, em um processo de desenvolvimento profissional, compreende aprendizagem que, em umas vezes é natural e evolutiva, em outras, esporádica, em outras ainda, o resultado de um planejamento. A aprendizagem natural e evolutiva está ligada aos anos de prática docente, a esporádica, é aquela que acontece de forma eventual e momentânea e, a que resulta de um planejamento, entendemos ser aquela em que o professor organiza-se e planeja-se na busca da sua aprendizagem contínua. Com base nos pressupostos deste autor, nos propusemos a analisar os dados desta pesquisa a partir da identificação se e quando houve (re)significação de conhecimentos e não nos

ateremos a forma como isso ocorreu (natural, esporádico ou evolutivamente).

Nesse contexto, encontramos convergências nos estudos de Ponte (1997) e Day (2001). As ideias de Ponte (1997) aproximam-se das de Day (2001), quando discute o “processo de crescimento” da competência docente. O autor não utiliza o termo aprendizagem, todavia detalha esse processo.

O desenvolvimento profissional do professor corresponde a um processo de crescimento na sua competência em termos de práticas letivas e não letivas, no autocontrole da sua atividade como educador e como elemento ativo da organização escolar. O desenvolvimento profissional diz assim respeito aos aspectos ligados à didática, mas também à ação educativa mais geral, aos aspectos pessoais e relacionais e de interação com os outros professores e com a comunidade extraescolar (PONTE, 1997, p.44).

Outra convergência diz respeito à relação entre o desenvolvimento profissional, à mudança de prática e ao protagonismo do professor quando participa de um processo de formação continuada. Ponte (1995), apoiado em Burden (1990), defende que o desenvolvimento profissional envolve muito mais do que a simples frequência de cursos de formação inicial e contínua e que esse é um processo de mudança “de dentro para fora” e isso pressupõe o envolvimento do profissional durante o curso. Day (2001) discute, da mesma forma, que não é o professor que será desenvolvido e sim ele é quem se autodesenvolverá profissionalmente e que a mudança da prática profissional docente que não “for interiorizada, provavelmente não passa de mudança cosmética e é apenas temporária” (DAY, 2001, p.97).

Para tanto, o professor precisa ser um agente ativo no seu local de trabalho, disposto a colaborar com seus colegas, seja nas atividades didáticas rotineiras ou em relação aos problemas educacionais mais gerais.

Day (2001, p.47) estabelece uma relação entre a reflexão proposta por Schön (1983,1987) e a ação investigativa do professor ao afirmar que, quando os professores refletem *na, sobre e acerca* da ação e investigam esse processo, eles vislumbram não apenas compreenderem sobre si mesmos como professores, mas como melhor ensinar. Essa reflexão é considerada por Day (2001) como fator importante de investigação no desenvolvimento profissional.

Day (2001) completa seu pensamento ao afirmar que, quando o professor se envolve individual e coletivamente em diferentes tipos de reflexão sobre o seu próprio pensamento, sobre os valores que lhe estão subjacentes e sobre os contextos em que trabalha, se torna a palavra de ordem para que ele amplie seu conhecimento sobre a prática ao longo da carreira e, assim, a possibilidade de melhorar a sua conduta profissional.

Day (2001) apresenta pontos e contrapontos dos estudos de Schön a partir de visões de estudiosos como Gore e Zeichner (1991), Carr e Kemmis (1986), entre outros, e apresenta outra modalidade de reflexão, que é acerca da ação, caracterizando como “agir profissionalmente”. Em todas as citações feitas sobre esse tópico, ele chama a atenção para a importância de se atribuir à aprendizagem, por meio da reflexão. Para o autor, ela tem papel central no pensamento crítico e no desenvolvimento dos professores. Desenvolver-se como profissional significa dar atenção a todos os aspectos da prática.

Diante disso, entendemos que os teóricos que nortearam nosso referencial quanto ao aspecto de desenvolvimento profissional docente não se contrapõem, pelo contrário, complementam-se nas suas discussões a esse respeito. Como exemplo, Ponte (1998)<sup>11</sup> afirma que existem elementos coletivo e individual no processo de desenvolvimento profissional docente. No coletivo, o autor destaca os contextos colaborativos (institucionais, associativos, formais ou informais), por meio dos quais os professores compartilham experiências e absorvem informações importantes. No individual, esse desenvolvimento é de sua inteira responsabilidade, quando ele investe na profissão, age de modo responsável, define metas para o seu progresso, faz balanços sobre o percurso realizado, reflete com regularidade sobre a sua prática e não foge das situações incômodas, mas as enfrenta. Todas essas atitudes estão sempre ao alcance de todo professor que, compartilhadas em um cenário de grupo de estudos pode vir a promover o conhecimento de diferentes aprendizagens sobre as estruturas multiplicativas e suas possíveis contribuições para o desenvolvimento profissional dos professores participantes.

No capítulo seguinte apresentamos a revisão de literatura que contribuiu com as ideias que nortearam esta investigação.

---

<sup>11</sup> Conferência plenária apresentada no Encontro Nacional de Professores de Matemática ProfMat 98, realizado em Guimarães. Publicado In *Actas do ProfMat 98* (pp. 27-44). Lisboa: APM.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO DE LITERATURA

A revisão de literatura está organizada como: 1) Estudos voltados à investigação no âmbito da educação matemática no país com o foco na formação continuada de professores que abordam a Teoria dos Campos Conceituais; 2) Estudos nacionais e internacionais voltados à formação continuada de professores de matemática e que, a partir da reflexão *na* e *sobre* sua prática em grupos de estudos, apresentaram elementos que favoreceram o desenvolvimento profissional dos participantes; 3) Estudos que apresentam resultados no âmbito do Programa OBEDUC/E-Mult que apontam dados importantes e afinidades com esta investigação.

#### **2.1 A Teoria dos Campos Conceituais e a formação continuada: o que dizem as pesquisas**

Santos (2012) descreve uma formação continuada de professores em dois grupos: o *primeiro*, como um processo compensatório para suprir as lacunas da formação inicial e, no *segundo*, o autor concebe a formação continuada pautada no trabalho reflexivo da prática docente, como uma forma de reconstrução da identidade pessoal e profissional em interação mútua com a cultura escolar, com os sujeitos do processo e com os conhecimentos acumulados sobre a área educacional. Esta investigação tem como proposta o segundo grupo descrito pelo autor, ou seja, uma proposta de estudos em que sejam promovidas ações reflexivas acerca do compartilhamento da prática docente dos participantes, no que concerne ao ensino das estruturas multiplicativas.

Santos (2012, p.284) defende que no cotidiano da escola, vivenciando os seus problemas reais, à luz de uma articulação coletiva de diversos saberes, os processos formativos podem ser gerados e o êxito dessa formação torna-se real e capaz de provocar as mudanças que venham a atender as necessidades formativas dos professores. Diante desse pensamento defendido pelo autor, entendemos que a possibilidade de vivenciar e refletir sobre a prática dos professores em seu próprio cotidiano, proporcionando o compartilhamento dessa prática em um grupo de estudos nesse mesmo espaço escolar, possibilita reconhecer aspectos do desenvolvimento profissional docente no que diz respeito a ampliação do conhecimento sobre o ensino das estruturas multiplicativas.

Alguns trabalhos como o de Merlini (2012), Merlini, Santos e Magina (2017) contribuem com esta investigação a partir da observação de outros contextos de formação

continuada, que descrevemos a seguir:

Merlini (2012) realizou um estudo de caso em sua tese de doutorado. Essa pesquisa trouxe para esta investigação um modelo de percurso metodológico para analisar a prática de uma professora em um contexto de formação continuada com o foco nas estruturas multiplicativas. Nesse estudo, a pesquisadora acompanhou uma professora do 4º ano do ensino fundamental (na época denominava-se 3ª série) em três momentos da formação: (i) durante o processo formativo; (ii) na aplicação das situações elaboradas junto aos seus alunos; (iii) em uma entrevista semiestruturada após a observação do item (ii). A pesquisa de Merlini (2012) teve como objetivo principal investigar as *contribuições* e os *limites* que um processo formativo, com dimensões colaborativas, proporciona no que tange à reflexão *na* e *sobre* a prática da professora, no âmbito do Campo Conceitual Multiplicativo.

Merlini (2012) fez sua análise sob o ponto de vista de três tópicos: (a) os diagnósticos do perfil e das concepções da professora acerca dos conhecimentos sobre o Campo Conceitual Multiplicativo (b) a expansão dos conhecimentos teóricos e práticos por meio da vivência e da reflexão da professora e (c) a resignificação das concepções da professora em relação ao Campo Conceitual Multiplicativo. As *contribuições* e os *limites* do processo formativo para a prática da professora foram analisados sob os pontos de vista didático, conceitual e cognitivo, os quais Merlini (2012) descreve da seguinte forma: *didático*: a concepção de que a aprendizagem dos estudantes pode ser construída de forma compartilhada, contudo, as discussões a respeito das situações que contemplaram a operação de divisão foram insuficientes; *conceitual*: o desenvolvimento da capacidade de categorizar situações segundo os eixos trabalhados do Campo Conceitual Multiplicativo; em contraponto, a elaboração de uma situação de divisão partitiva afirmando, de forma equivocada, que se tratava de uma divisão quotitiva; *cognitivo*: a da necessidade de fazer o estudante entender a situação como um todo e que sua estratégia de resolução não estivesse atrelada a alguma palavra-chave. No entanto, não foram proporcionadas aos estudantes situações que contemplassem o modelo da divisão quotitiva, que permitissem gerar outros esquemas cognitivos para sua resolução. Na visão da pesquisadora, diante do quadro analisado e, apesar do tempo limitado do processo formativo, houve a expansão dos conhecimentos do campo conceitual multiplicativo por parte da professora.

Merlini (2012) contribui para esta investigação pelo fato de a análise dos resultados ser gerada em um processo formativo e em ações práticas com o foco nas

estruturas multiplicativas e por nos permitir relacionar, pelo menos, algumas das contribuições e limitações por ela encontradas com a que buscamos neste estudo.

Outro trabalho elencado neste tópico foi o de Merlini, Santos e Magina (2017). Os autores propuseram-se a identificar a resignificação e a transformação da prática docente de participantes de um processo formativo com o foco nas estruturas multiplicativas. Os dados foram coletados no âmbito de uma formação continuada com um grupo de 14 professoras dos anos iniciais, que atuavam do 2º ao 5º ano numa escola pública da cidade de São Paulo. O estudo foi pautado na reflexão sobre a prática que acontece no interior da escola e apoiada pelos estudiosos, como Nóvoa (1991); Sacristán e Pérez Gómez (1998); Magina (2008); Zeichner (2008); Pimenta e Ghedin (2010)<sup>12</sup>, entre outros. A essência principal desses estudiosos, segundo Merlini, Santos e Magina (2017) está no fato de o *saber* e o *fazer* reflexivo serem contextualizados, uma vez que a transformação da realidade educacional decorre do confronto entre teoria e prática. As análises permitiram sustentar uma mudança qualitativa nas práticas dessas professoras, nas dimensões: gestão da sala de aula de matemática; conhecimento didático e pedagógico do conteúdo e resignificação do currículo.

Nesse cenário, apoiados nas ideias de que todos os professores são reflexivos de alguma forma e o que é preciso considerar, de fato, é o que queremos que os professores reflitam, os autores buscaram teóricos como Pimenta e Ghedin (2010) por assinalarem que, ao se adotar a reflexão como elemento potencializador da formação docente, alguns cuidados devem ser levados em consideração: (a) o individualismo da reflexão; (b) a ausência de critérios externos potencializadores de uma reflexão crítica; (c) a excessiva ênfase nas práticas, a inviabilidade da formação nos espaços escolares e a sua restrição nesse contexto. Ainda nessa perspectiva, abordaram Zeichner (2008), quando o autor destaca a indiscutível contribuição da reflexão na perspectiva da formação de professores, na medida em que o sujeito professor, ao refletir sobre a sua prática, pode produzir conhecimentos.

Os resultados da investigação de Merlini, Santos e Magina (2017) foram oriundos de uma análise comparativa da prática do grupo de professoras em dois momentos distintos, ou seja, da prática precedente à formação (prognóstico) e da prática no processo

---

<sup>12</sup> NÓVOA, A. (Org.). Profissão professor. Porto: Porto Editora. 1991.

PIMENTA, S.G.; GHEDIN, E. Professor reflexivo no Brasil. Gênese e crítica de um conceito. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2010. p. 17-52.

SACRISTÁN, G.; PÉREZ, G., A. Compreender e transformar o ensino. 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 353-379.

MAGINA, S. (RE)Significar as Estruturas Multiplicativas a partir da formação 'Ação-Reflexão-Planejamento-Ação' do professor. Edital Universal, Projeto nº 471247/20081. CNPq. 2008.

de formação. Os autores chamam a atenção sobre o fato de que essas ações não acontecem de maneira isolada, tampouco de forma linear e, por isso, foram analisados os dados nos registros escritos (relatórios), nos extratos das falas/diálogos gravados durante os encontros do processo formativo.

Três aspectos foram observados nesse trabalho, vistos como transformações na prática dessas professoras concernentes ao conhecimento didático e pedagógico do conteúdo das estruturas multiplicativas: 1) *A dimensão ressignificação do currículo*, em que foi possível afirmar que as professoras desses anos de escolaridade romperam com a ideia de que situações que envolvem as estruturas multiplicativas só poderiam ser apreendidas com êxito pelos estudantes se eles já dominassem todas as operações matemáticas. 2) *A proposição das estratégias de ensino* explicitadas, que apontaram indícios da teoria sendo apropriadas pelo grupo. 3) *A gestão da sala de aula de matemática*, pois o grupo de professoras explicita a preocupação em garantir o entendimento da situação dando voz aos estudantes, por meio da leitura compartilhada, do raciocínio compartilhado, do trabalho em dupla, como condições didáticas e pedagógicas necessárias para gerir o ensino e a aprendizagem de um dado conteúdo.

Merlini, Santos e Magina (2017) trouxeram para nossa investigação fatos importantes ocorridos em um processo de formação continuada e que envolve o contexto de uma escola pública, um conteúdo específico e a proposta de reflexão sobre a prática dos professores participantes desse processo. Esses fatos contribuíram para nossas escolhas metodológicas na constituição do grupo e para as análises das reflexões explicitadas pelos professores nos encontros dos grupos de estudo.

Outro trabalho descrito neste tópico trata-se de uma investigação no âmbito de uma formação continuada com o foco na Teoria dos Campos Conceituais, em específico as Estruturas Aditivas. Seus pesquisadores Santana, Alves e Nunes (2015) analisaram as reflexões evidenciadas nas respostas de quatro professoras que participaram desse processo formativo e responderam um relatório final. As professoras participantes da ação formativa foram selecionadas a partir de critérios semelhantes, previamente definidos: a) possuírem formação inicial em Pedagogia; b) situação funcional: professoras efetivas das escolas participantes do processo formativo; três delas tinham mais de 20 anos de serviço e uma com três anos, procurando mostrar a relação entre professoras experientes e uma jovem professora; e c) o campo de atuação no exercício dos anos iniciais do ensino fundamental da educação básica brasileira.

A formação continuada ocorreu de forma espiralar, promovendo o ciclo de

Reflexão inicial – Planejamento em grupo – Planejamento em plenária – Reflexão em grupo – Reflexão em coletivo. Esse ciclo foi repetido sete vezes, durante o ano letivo e complementado com um encontro de encerramento. No período de oito meses, foram realizados sete encontros com essa dinâmica. O oitavo encontro objetivou refletir e avaliar todo o processo formativo. Para isso, os professores preencheram um relatório final, composto de duas partes: uma, de dez questões sobre o perfil profissional atual e, outra, de sete, objetivando que fossem feitas reflexões a respeito do processo formativo realizado.

Nesse sentido, algumas das respostas às questões do relatório trouxeram reflexões que foram analisadas por Santana e colaboradores (2015) como fator positivo na conduta dos professores em sala de aula, ou seja, a formação continuada, na perspectiva teórico-metodológica, promoveu a possibilidade de lhes dar suporte para realizar o planejamento das aulas, focando a formação e o domínio do conceito pelo estudante, a sua própria compreensão da organização desses conceitos e sua influência direta no processo de ensino, alcançando a aprendizagem de sua turma e possibilitando uma maior segurança e efetividade em sua prática docente.

A pesquisa de Santana, Alves e Nunes (2015) nos direciona na análise das manifestações de professoras dos anos iniciais, após a participação de um processo formativo, com foco na Teoria dos Campos Conceituais em que se discutem as reflexões oriundas de depoimentos dos participantes no fim do processo. Tais resultados poderão ser relacionados aos encontrados nesta investigação.

## **2.2 Os grupos de estudos e o desenvolvimento profissional dos participantes: o que dizem as pesquisas**

Diversos são os resultados de pesquisas nacionais e internacionais que apresentam elementos importantes sobre grupos de discussão (ou de estudos), que favoreceram o desenvolvimento profissional dos seus participantes e nos trouxeram contribuições para esta investigação, por ser esse o ambiente escolhido pelo qual construímos o seu percurso metodológico e a coleta dos dados para análise.

Ao analisarem os fatores que favoreceram o desenvolvimento profissional de dois professores de matemática do ensino secundário, observados durante os anos 1993 e 1997, quando trabalhavam na concretização de propostas de inovação curricular dessa disciplina, Saraiva e Ponte (2003) evidenciaram três desses fatores, os quais favoreceram o desenvolvimento profissional dos participantes de um grupo de estudo, com

características de colaboração que foram (a) o cenário de constituição de um grupo colaborativo que se mostrou favorável à experimentação e ao desenvolvimento profissional; (b) o trabalho em grupo realizado de forma reflexiva, o qual atendeu as “necessidades e interesse dos professores, no contexto natural do trabalho da escola” e (c) a vontade explicitada pelos professores de melhorar a prática e inovar o ensino.

Identificamo-nos com esses três elementos apontados por Saraiva e Ponte (2003) por: (a) constituirmos um grupo disposto a experimentar e desenvolver-se profissionalmente (b) a investigação ter sido realizada na própria escola dos professores investigados e, durante as sessões de estudo, procurarmos desenvolver discussões de caráter reflexivo que pudesse atender aos interesses dos participantes e, finalmente, (c) buscarmos envolver professores que mostrassem o desejo de (re)significar sua prática.

Etcheverria (2014) realizou seu trabalho envolvendo grupos de estudos com professores na própria escola. Foi uma pesquisa de doutoramento a qual objetivou identificar e compreender quais contribuições um estudo do Campo Conceitual Aditivo, baseado na Teoria dos Campos Conceituais e na reflexão sobre a ação docente realizado, por meio de grupos de discussão<sup>13</sup>, com professoras dos anos iniciais do ensino fundamental de uma escola municipal do interior de Sergipe. O percurso metodológico adotado pela pesquisadora foi desenhado em três estudos;

1) *Diagnóstico*: utilizando um instrumento com 10 situações aditivas a 248 estudantes do 2º ao 5º ano das 11 turmas dos anos iniciais do ensino fundamental da escola escolhida. 2) *Grupo de discussão*, com oito encontros de estudo a partir da análise dos dados coletados no Estudo Diagnóstico. Os dados referiam-se ao desempenho dos alunos e às estratégias utilizadas por eles na resolução das situações. Nessas sessões de estudos, foram feitas discussões e geradas as reflexões a respeito da classificação das situações elaboradas pelas professoras e do livro de matemática adotado pela escola. 3) *Comparativo*, no qual as mesmas situações foram aplicadas aos alunos em dois momentos, uma no mês seguinte ao encerramento dos encontros do grupo de estudo e outra, seis meses depois dos encontros. As professoras participantes da formação continuada foram convidadas a elaborar novamente seis situações envolvendo adição e/ou subtração.

Os resultados das análises dos instrumentos aplicados, segundo Etcheverria (2014), apontam para uma relação entre as situações aditivas elaborados pelas professoras, os problemas de adição e subtração do livro adotado pela escola e o

---

<sup>13</sup> Nomenclatura utilizada pela autora ao se referir a grupos de professores

desempenho dos estudantes nesse tipo de situação. Quanto aos resultados relativos às discussões e reflexões geradas nas sessões de estudo, a autora revela que, entre os fatos determinantes de contribuição para a formação continuada dos participantes do grupo, destaca-se a apropriação do conhecimento do conteúdo do campo conceitual aditivo, objeto matemático do seu estudo. A autora analisou essa contribuição pelo fato de as professoras, ao compreenderem os pressupostos que embasam o Campo Conceitual Aditivo, mostraram também um maior domínio do conhecimento especializado do conteúdo na resolução de problemas aditivos (ETCHEVERRIA, 2014).

Os registros escritos revelaram as contribuições do processo desenvolvido pelo grupo de estudo quanto ao entendimento das professoras: (i) existe uma grande variedade de situações que pertencem a um mesmo campo conceitual; apontando uma necessidade na proposição de problemas com diferentes graus de complexidade, para que seus alunos dominem os conceitos envolvidos nessas situações; (ii) deviam ser mais trabalhadas as situações nas quais os estudantes tiveram pior desempenho e que precisariam conhecer a natureza dos erros cometidos por eles no uso da representação simbólica e de esquemas de resolução.

As contribuições da pesquisa de Etcheverria (2014) para esta investigação giram em torno da análise dos conhecimentos para o ensino de matemática, defendidas por Ball, Thames e Phelps (2008). Essas contribuições estão relacionadas ao conhecimento do conteúdo das estruturas multiplicativas e ao seu conhecimento pedagógico, no que diz respeito ao trabalho do professor com situações de multiplicação, divisão e ao seu olhar quanto aos esquemas utilizados por seus estudantes na resolução das situações por eles elaboradas. Outro fato observado na análise da pesquisa de Etcheverria (2014) foi que as professoras identificaram erros na representação simbólica utilizada pelos estudantes, tais como: troca de sinal da operação e montagem errada da conta. O que nos reporta ao conhecimento do conteúdo e ao conhecimento do estudante acerca desse conteúdo, propostos por Ball, Thames e Phelps (2008).

Miranda (2014), em sua dissertação de mestrado, *Uma investigação sobre a (re)construção do conhecimento de professores participantes de um grupo que estuda o Campo Conceitual Aditivo*, analisou o processo de (re)construção de conhecimentos necessários ao ensino do Campo Conceitual Aditivo de professoras participantes de um grupo de estudos formado na própria escola. Quinze professores que lecionavam nos anos iniciais do ensino fundamental da rede pública estadual de São Paulo, participaram dessa investigação. O desenho metodológico feito pela autora foi a constituição de um grupo

de estudos nos horários destinados a Atividades de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPC). A coleta de dados ocorreu por meio de gravações diretas de cada sessão de estudos e análise dos protocolos gerados pelos professores participantes e seus alunos.

Em relação ao objeto matemático proposto pela autora para as discussões em grupo, a análise feita mostra que houve ampliação dos conhecimentos dos participantes sobre a teoria, notadamente, conhecimentos sobre as diferentes categorias propostas por Vergnaud e sobre alguns dos esquemas utilizados pelos alunos para resolver as situações apresentadas. A sugestão final do trabalho foi a continuidade do estudo, pois três das categorias de Vergnaud sobre o Campo Conceitual Aditivo que não foram estudadas pelo grupo.

Miranda (2014) evidenciou também que a formação de grupos de estudos na própria escola, cujos participantes se encontram sistematicamente durante todo o ano escolar, no qual se discutam temas de interesse dos professores, pode favorecer a (re)construção de conhecimentos profissionais dos docentes e reflexões sobre a prática.

Em relação à participação do professor nas sessões de estudos, Miranda (2014) avalia que:

Percebemos que o diálogo foi se estabelecendo no grupo de estudos, o que possibilitou às professoras participantes expressarem livremente seus anseios, suas necessidades, suas dificuldades e as concepções que permeiam o trabalho docente, quanto ao ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental (MIRANDA, 2014, p. 200).

A pesquisa de Miranda (2014) trouxe para esta investigação a importância do protagonismo do professor como necessário para o seu desenvolvimento profissional, e as dificuldades superadas em cada etapa desse desenvolvimento, concorreu, de forma significativa, com a continuação da (re)significação de seus conhecimentos.

Garcia Silva (2007), em sua tese de doutorado, contribuiu com esta investigação a partir da sua análise de fatores que pudessem inferir no desenvolvimento profissional de professores dos anos iniciais do ensino fundamental. Esses fatores foram detectados em uma formação continuada com o foco nos estudos da representação fracionária de números racionais e seus diferentes significados. A formação aconteceu em 16 encontros com quatro horas cada; a pesquisadora utilizou dois deles nas entrevistas com os professores logo após sua intervenção em sala de aula e, o último, um ano depois, para averiguar as reflexões dos docentes depois da formação.

Os fatores analisados pela autora discutiram os conhecimentos que os participantes da formação tinham em relação à compreensão do significado da representação fracionária dos números decimais, ou seja, o conhecimento do conteúdo, o

conhecimento pedagógico e o conhecimento curricular, proposto por Shulman (1986). A autora investigou, na fase diagnóstica, o conhecimento dos professores em relação aos diferentes significados dos números racionais em sua representação fracionária, quais sejam: *parte-todo*, *quociente*, *operador multiplicativo*, *medida e localização na reta numérica*. Os resultados concernentes a essa fase mostram um percentual considerável de dificuldades dos professores em relação à parte conceitual do assunto tratado.

Em relação ao conhecimento pedagógico do conteúdo, foi observado pela autora que, tanto na fase diagnóstica como nas entrevistas, o descontentamento dos professores quanto ao aprendizado de “frações” em sua formação inicial e, também, que esses saberes foram insuficientes para que se sentissem em condições de garantir a aprendizagem dos seus alunos. O mesmo sentimento foi detectado pela autora, em relação ao conhecimento curricular do conteúdo, no qual os professores mostraram-se insatisfeitos por ser, o livro didático, a única alternativa de referência curricular que eles tinham para desenvolverem seu trabalho na escola.

As dificuldades apresentadas na fase diagnóstica da pesquisa foram discutidas, nos três primeiros encontros, como uma atividade preparatória para os estudos que seriam feitos nos próximos. Devido à extensão do trabalho e às reflexões ocorridas, apenas dois dos significados dos números racionais em sua representação fracionária foram adotados nos encontros seguintes: o significado *parte-todo* e o *quociente*, por estarem, segundo Garcia Silva (2007), mais associados às fases iniciais da construção do conceito de número racional e, conseqüentemente, serem mais apropriados à identificação dos pontos críticos relacionados tanto ao ensino e quanto à aprendizagem desses significados.

Com relação aos fatores que poderiam influenciar no desenvolvimento profissional dos participantes de um processo formativo, Garcia Silva (2007) avaliou: i) o conhecimento que esse professor tem sobre o conteúdo a ser ensinado. Na visão da autora, faz-se necessário que o conhecimento do conteúdo, o conhecimento pedagógico e o conhecimento curricular estejam contemplados tanto na formação inicial como na continuada dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais; ii) as crenças e concepções dos professores em relação ao ensino e à aprendizagem dos conteúdos matemáticos e iii) a reflexão aliada a um trabalho colaborativo.

A pesquisa de Garcia Silva (2007) apontou caminhos para esta investigação em relação à análise das diferentes contribuições de um grupo de estudo para o desenvolvimento profissional docente, a partir de reflexões geradas e compartilhadas entre os participantes.

### 2.3 Estudos sobre a formação continuada de professores realizados no âmbito do Programa OBEDUC/E-Mult

Alguns resultados de estudos de pesquisadores que desenvolveram suas pesquisas no âmbito do Programa OBEDUC/E-Mult apresentam dados que contribuiram para esta investigação de forma significativa e em diferentes momentos.

Santana, Lautert, Castro Filho e Santos (2016) apresentaram os resultados preliminares do Programa OBEDUC/E-Mult, envolvendo o campo conceitual das estruturas multiplicativas. O instrumento diagnóstico, construído para essa investigação, foi aplicado a 3.890 estudantes dos anos iniciais e finais do ensino fundamental de 12 escolas públicas dos três estados, sendo 1.693 estudantes da Bahia; 1.248 do Ceará e 949 de Pernambuco. Em cada um dos estados, o instrumento foi aplicado em quatro escolas públicas. Esse instrumento foi composto de 13 situações envolvendo as estruturas multiplicativas e os resultados encontrados foram descritos por Santana e colaboradores (2016, p.91).

Os resultados dessa investigação apontam a necessidade de investimento em uma formação continuada com foco nesse campo, junto às escolas dos professores desses estudantes, visto que apresentaram baixo desempenho em todos os anos escolares (1º ao 8º ano < 50% e 9º ano < 55%) ao resolverem as situações propostas.

Nos dois primeiros anos, esse desempenho é muito pequeno, não atingindo nem mesmo a média de uma questão certa por aluno. Nota-se um crescimento do 3º ao 6º ano. O 7º ano apresenta um desempenho praticamente igual ao do 6º ano. O crescimento é retomado a partir do 8º ano. Observa-se também que, mesmo no 9º ano, o desempenho médio é de 7,2 questões certas de um total de 13. Deduz-se então que, mesmo no último ano do ensino fundamental, os alunos ainda não possuem o domínio completo de situações das estruturas multiplicativas propostas na investigação (SANTANA; LAUTERT; CASTRO FILHO SANTOS, 2016, p. 90).

Dois fatos importantes chamaram a nossa atenção neste trabalho:

1) O maior número de acertos em todos os anos escolares nesta pesquisa foi sobre uma situação que envolvia uma proporcionalidade simples, a correspondência um para muitos e operação de multiplicação: “Joana sabe que em um pacote há seis biscoitos. Ela tem cinco pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?” Os pesquisadores relacionaram esse resultado ao fato de ser dada uma relação mais elementar que envolve quatro quantidades, sendo duas de uma natureza e as outras duas de outra (pacotes e biscoitos).

2) O maior número de erros em todos os anos escolares foi detectado na resolução da situação que envolvia o produto de medidas, a configuração retangular e a operação divisão: “a área do jardim da casa de Vera é retangular e tem  $24\text{m}^2$ . A largura é 4m. Qual

é o comprimento em metros desse jardim?”. Santana e colaboradores (2016, p.92) consideraram que a situação apresentou duas grandes dificuldades, a primeira de se usar uma operação inversa (divisão) quando se refere ao conteúdo *área de um retângulo* (que usualmente é resolvido usando a multiplicação) e, a segunda, que esse conteúdo deve ter sido um fator de dificuldade para os alunos, principalmente nos anos iniciais.

Diante dos dados encontrados acerca do desempenho dos estudantes, o grupo de pesquisadores do Programa OBEDUC/E-Mult organizou as ações de formação com características colaborativas, em que os professores envolvidos poderiam repensar: (i) o seu papel no que concerne à resolução de problemas no contexto escolar; (ii) o cuidado com a elaboração de situações que não gerassem imprecisões ou impossibilidade de resolução; (iii) a necessidade de apresentar uma variedade delas para explorar os conceitos presentes no campo multiplicativo envolvendo o uso das operações de multiplicação e divisão; (iv) a busca por compreender as estratégias adotadas pelos estudantes durante a resolução das situações propostas no contexto escolar. Tais elementos fizeram parte da formação realizada que visava promover um maior conhecimento por parte do professor a respeito da natureza das situações que eles apresentam a seus alunos em sala de aula no âmbito do campo conceitual das estruturas multiplicativas. (SANTANA; LAUTERT; CASTRO FILHO; SANTOS, 2016, p 94).

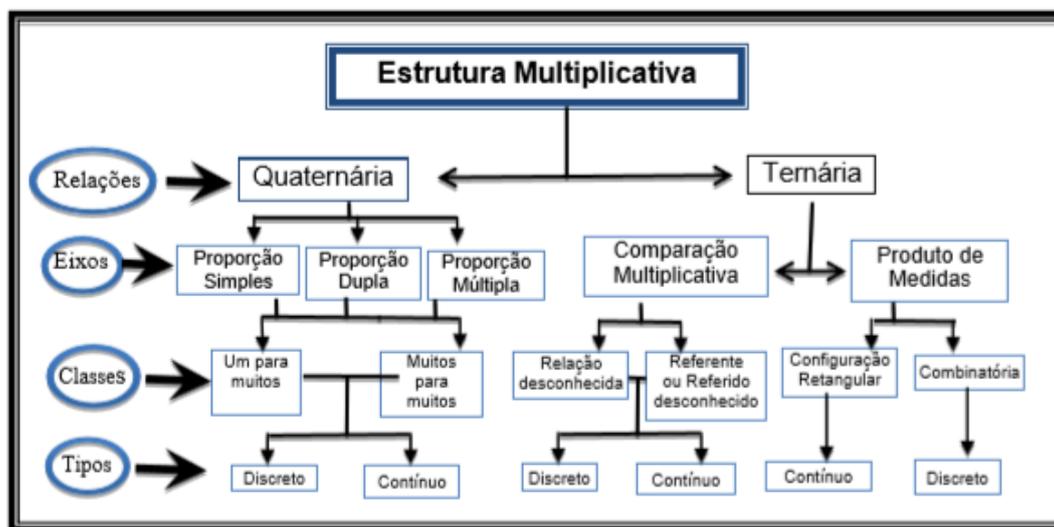
Os resultados apresentados na pesquisa de Santana e colaboradores (2016), a proposta de formação continuada contribui para nossa investigação em dois momentos: (i) na análise do olhar dos professores para a elaboração das situações nos anos escolares em que eles atuam, a partir do conhecimento especializado do conteúdo das estruturas multiplicativas e do seu ensino; (ii) no estudo sobre o olhar do professor para os esquemas dos alunos registrados para resolver as situações que apresentaram o maior número de erros, a partir do conhecimento do conteúdo e do estudante.

Por fim, listaremos alguns trabalhos no contexto do Programa OBEDUC/E-Mult, produzidos pelos alunos e orientados por professores do Mestrado em Educação Matemática na Universidade Estadual de Santa Cruz (PPGEM/UESC) que contribuíram, de forma significativa, para nossa investigação, como os de Souza (2015), Lima (2016) e Souza Santos (2017), por se tratarem de outras pesquisas envolvendo as ações formativas do Programa em diferentes momentos e olhares quanto à formação continuada com o foco nas estruturas multiplicativas.

SOUZA (2015), na sua dissertação de mestrado, intitulada *Estruturas multiplicativas: concepção de professor do ensino fundamental*, procurou atingir seu

objetivo principal que era o de investigar a concepção dos professores que atuam no ensino fundamental sobre o ensino das estruturas multiplicativas. A autora escolheu fazer uma pesquisa diagnóstica com 59 professores da rede pública estadual e municipal das cidades situadas no sul da Bahia. Desses, 21 atuavam do 1º ao 3º ano, 24 no 4º e 5º e 14 do 6º ao 9º ano. O instrumento utilizado para a coleta dos dados foi um questionário dividido em duas partes: 1) o perfil profissional dos participantes e 2) a elaboração por eles de oito situações distintas envolvendo multiplicação ou divisão. A análise foi baseada na releitura da classificação de Vergnaud (1983;2009) acerca do campo conceitual multiplicativo, proposta por Magina, Santos e Merlini, (2010; 2012; 2014), como mostra a Figura 05.

**Figura 05:** Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo



Fonte: Magina, Santos e Merlini (2010, 2012, 2014).

Souza (2015), ao analisar o perfil dos participantes de sua pesquisa e em que turmas ensinavam, os dividiu em três grupos: o grupo 1 (G1), constituído por 21 professores generalistas, que independentemente de sua formação, atuavam do 1º ao 3º ano do ensino fundamental e trabalhavam em uma única turma por turno e ensinavam todos os componentes curriculares; o grupo 2 (G2), formado por 24 professores generalistas que atuavam no 4º e 5º ano do ensino fundamental e que, assim como G1, trabalhavam com todos os componentes curriculares nas suas turmas; o grupo 3 (G3) foi constituído de 14 professores especialistas que, na ocasião, atuavam do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, especificamente com o ensino da matemática e alguns completavam a sua jornada de trabalho semanal em anos diferentes.

Ao analisar a segunda parte do instrumento, Souza (2015) encontrou, em sua

pesquisa, o seguinte: i) a maioria das situações elaboradas foram de proporção simples, na classe um-para-muitos e ii) as concepções de professores generalistas e especialistas são próximas em relação a situações envolvendo estrutura multiplicativa, parecendo limitar-se à concepção que mantém a filiação entre o campo conceitual aditivo e o multiplicativo.

Na visão de Souza (2015, p.28), é comum na prática escolar inserir o ensino da multiplicação e da divisão após terem sido ensinadas as operações de adição e subtração. Essa concepção está apoiada na ideia que a adição conduz à multiplicação. Aí reside uma filiação entre a multiplicação e a adição, pois é uma das formas possíveis de resolver problemas de multiplicação.

O trabalho de Souza (2015) contribui com a nossa investigação no sentido de fornecer dados acerca das concepções que os professores apresentam no início de um processo formativo com o foco nas estruturas multiplicativas.

Lima (2016), em sua dissertação de mestrado, intitulada *A formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais e as estruturas multiplicativas*, pesquisou o comportamento de uma professora do 5º ano do ensino fundamental participante de uma formação continuada de professores com foco nas estruturas multiplicativas. O objetivo principal de sua pesquisa foi compreender e analisar os seus saberes, mobilizados no processo formativo. O percurso metodológico desenhado pela autora foi observar a professora na formação continuada (presencial e virtual) e na prática pedagógica, utilizando-se de entrevista e de um diário de campo com uma ficha de observação para a coleta dos dados. Lima (2016) aponta como resultado de sua investigação que: i) houve ampliação do conhecimento matemático frente às situações do campo multiplicativo e ii) que os saberes apreendidos deram sentido à prática da professora, quanto ao planejamento, ao olhar para a sua própria aprendizagem e a de seus alunos, no ensino e na avaliação da turma.

A importância de conhecer o resultado do trabalho de Lima (2016) proporcionou conhecer também aspectos do desenvolvimento profissional de uma professora que participou de uma formação continuada de professores que ensinam matemática.

Por fim, elencamos a pesquisa de Souza Santos (2017), em sua dissertação de mestrado, *Formação de professores com dimensões colaborativas: as estruturas multiplicativas em foco*, na qual ele procurou identificar as possíveis contribuições para a prática docente que uma formação continuada, pode trazer aos professores dos anos iniciais no que concerne ao Campo Conceitual Multiplicativo, no âmbito da relação

ternária.

A autora acompanhou três professores de uma escola da rede pública que atuavam no 3º e 4º anos iniciais do ensino fundamental e, para obtenção dos dados coletados, utilizou-se de gravação de áudio durante o processo formativo, diário de bordo, entrevista semiestruturada e registros escritos nos relatórios de atividades planejadas (R1), desenvolvidas (R2) e respondidos pelos professores. Os instrumentos R1 e R2 forneceram dados para a avaliação da formação, na voz dos participantes, identificando as possíveis mudanças antes e depois do processo.

O foco de análise dos dados de Souza Santos (2017) restringiu-se à relação ternária, dentro do Campo Conceitual Multiplicativo. Vergnaud (2014, p.57) considera que “as relações ternárias são relações que, como o nome indica, ligam três elementos entre si”. Essa relação é composta por dois eixos: Comparação Multiplicativa e Produto de Medidas, apresentados na Figura 05 deste tópico, a partir de uma releitura de Vergnaud (1983, 2009), feita por Magina, Santos e Merlini (2010; 2012; 2014).

Por tratar-se de um estudo realizado antes (M1) e depois (M2) de um processo formativo, Souza Santos (2017) trouxe, como resultado, uma avaliação comparativa entre os dois momentos de três professores envolvidos na formação. Fazendo uma síntese dessa avaliação, a autora avaliou que, no início (M1), os professores elaboraram situações do tipo ternárias, porém utilizando-se da operação da multiplicação, na sua maioria como propostas de resolução, o que não se modificou no (M2), ou seja, apesar de haver um aumento de elaboração de situações ternárias, sua proposta de resolução continuou a passar pela operação de multiplicação em detrimento da operação de divisão.

Em relação aos registros de avaliação nos instrumentos R1 e R2 e nas entrevistas semiestruturadas, a autora trouxe para sua análise, contribuições de um processo formativo, na forma a seguir.

Em relação às dimensões colaborativas, percebemos as seguintes contribuições: a presença da colaboração, o trabalho em conjunto com seus pares compartilhando suas práticas; a afetividade; o companheirismo; o sentimento de confiança; uma postura mais crítica com relação a formações prontas; e o fato de dar voz ao professor mexeu com sua autoestima, ajudando-o a se sentir valorizado e participante do processo formativo (SOUZA SANTOS, 2017, p, 185).

Por fim, a autora apresenta indícios de desenvolvimento profissional dos professores participantes de sua pesquisa, a partir dos seus depoimentos que apontavam para uma reflexão crítica sobre a própria prática docente e um indicativo de mudança da prática pedagógica, a partir da sua percepção sobre os professores investigados, ou seja: i) compreendiam ser possível trabalhar com a operação de divisão nos anos iniciais; ii)

mostraram um maior interesse e percepção na estratégia dos alunos e iii) declararam que o ambiente de formação com caráter colaborativo gerou reflexões individuais e em grupo, com o intuito de intervir na prática docente.

Souza Santos (2017) contribui com a nossa investigação com o reconhecimento de características de um grupo e suas contribuições para o desenvolvimento profissional dos professores participantes, no que concerne à ressignificação de sua prática docente e da reflexão sobre o seu fazer pedagógico em relação ao ensino das estruturas multiplicativas.

Dessa forma, ressaltamos que os resultados dos estudos registrados neste capítulo, no que diz respeito ao ensino da Teoria dos Campos Conceituais, em destaque as estruturas multiplicativas, delinearam o objetivo de nossa pesquisa e os procedimentos metodológicos que apresentaremos no capítulo seguinte.

## CAPÍTULO 3

# PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, descrevemos a caracterização metodológica da pesquisa, o cenário no qual ela foi desenvolvida e o seu percurso. Além disso, explicitamos os instrumentos utilizados e, por fim, apresentamos as técnicas de análise dos dados, justificando as escolhas feitas na busca de obter os resultados esperados.

### 3.1 Caracterização metodológica da pesquisa

Com o intuito de justificar as escolhas metodológicas desta investigação, faz-se necessário retomar o seu objetivo e sua questão norteadora.

Objetivo geral: Analisar as possíveis contribuições de um processo formativo sobre o ensino das estruturas multiplicativas para o desenvolvimento profissional de professores ao participarem de um grupo de estudos.

Para o alcance desse objetivo, propusemos a seguinte questão norteadora:

*Quais são as possíveis contribuições de um processo formativo sobre o ensino das estruturas multiplicativas para o desenvolvimento profissional de professores quando participam de um grupo de estudos?*

Nesta investigação, utilizamos o modelo de pesquisa qualitativa, no padrão apresentado por Garnica (2004). O autor define a pesquisa qualitativa como aquela que tem, entre outras, as seguintes características: “(a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar” (GARNICA, 2004, p. 86).

Assim como nós, o autor considera que, a partir da análise em conjunto de informações obtidas de maneira singular, é possível ampliar conhecimentos – transitórios – sobre o objeto a ser investigado, sem que haja a intenção de, tão somente, confirmar ou refutar hipóteses iniciais. Assim, iniciamos a pesquisa considerando esses pressupostos. Além dessas primeiras características, apresentamos, a seguir, a análise comparativa entre outras particularidades da pesquisa qualitativa apontadas por Garnica (2004) e sua relação com a pesquisa por nós desenvolvida.

- *a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar* (GARNICA, 2004, p. 86).

Este estudo ocorreu por meio do contato direto da pesquisadora com os professores participantes do Programa OBEDUC/E-Mult, a fim de constituir um grupo para aprofundar seus estudos na própria escola. Tal constituição foi prevista para o desenvolvimento do projeto dessa investigadora como uma ação necessária para identificar características de desenvolvimento profissional desses professores. Nas sessões de estudos, atuou como participante e, muitas vezes, como mediadora. Foi criado, durante o desenvolvimento desta investigação, um ambiente de estudo e pesquisa colaborativa que buscou o favorecimento da liberdade de expressão por parte de todos os seus envolvidos, de forma que suas visões e concepções fossem apresentadas sem preocupações com críticas ou desaprovação do grupo. Todavia, cabe ressaltar que a pesquisadora trouxe consigo todas as suas vivências que a acompanharam durante a coleta e análise dos dados.

- *que a constituição de suas compreensões se dá não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas* (GARNICA, 2004, p. 86).

As ações e os meios utilizados para a coleta de informações foram planejados de forma que nos ajudassem a responder a questão de pesquisa e representassem o contexto da investigação. Além da atuação da pesquisadora, houve o registro, em forma de áudio, de todas as sessões de estudos e de audiovisual, nas observações de sala, com o intuito de garantir detalhamentos das experiências vividas pelo grupo durante a investigação. Nesse sentido, procuramos descrever todo o processo e nossas compreensões acerca do ocorrido que favoreceram também sua (re)configuração.

- *a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas* (GARNICA, 2004, p. 86).

Para desenvolver este estudo estabelecemos alguns pressupostos, todavia reafirmamos que não foram levantadas hipóteses que seriam testadas, nem resultados que necessitariam ser buscados e, a partir da realização de cada sessão de estudo e do levantamento das necessidades dos docentes, foram delineados os procedimentos que permitissem responder à questão da pesquisa e ao interesse dos participantes. Tal processo apontou visões que, muitas vezes, não eram esperadas pela pesquisadora nem pelo grupo de professores, evidenciando a impossibilidade do estabelecimento de procedimentos prévios, regulados, estáticos que pudessem ser generalizados.

A partir de tais pressupostos, constituímos o grupo de estudos por meio do qual foi viabilizada a busca pela interação constante não só entre os participantes e a

pesquisadora, mas também entre as ações ocorridas na formação OBEDUC/E-Mult e as desenvolvidas pelos professores na escola, discutidas no interior do grupo.

Assim, consideramos que este estudo apresenta características de uma pesquisa qualitativa. A seguir, apresentamos o cenário desta investigação.

### **3.2 Cenário da Investigação**

Com o propósito de apresentar o cenário desta pesquisa, caracterizamos o Programa OBEDUC/E-Mult, uma vez que todos os professores envolvidos nesta investigação eram oriundos desse programa. Em seguida, descrevemos a escola e o perfil dos participantes deste estudo.

#### *3.2.1 O Programa OBEDUC/E-Mult*

Conforme já referenciado em capítulos anteriores e, de forma ampliada neste tópico, descrevemos o projeto aprovado sob o título “Um estudo sobre o domínio das estruturas multiplicativas no ensino fundamental – E-Mult” que foi desenvolvido, em rede, no período 2013-2017, no âmbito do Programa Observatório da Educação (OBEDUC) e financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), com a identificação 15.727. Segundo esse documento, seu objetivo era investigar e intervir na prática de professores do ensino fundamental no que tange às estruturas multiplicativas, baseado no modelo de formação ‘ação-reflexão-planejamento-ação’, tendo em vista a sua formação continuada.

O Programa OBEDUC/E-Mult envolveu a participação de professores do ensino básico, de estudantes de graduação e pós-graduação (mestrado e doutorado) e de pesquisadores credenciados em programas de Pós-Graduação de três estados brasileiros: Bahia, Ceará e Pernambuco, tendo como promotoras das ações da formação OBEDUC/E-Mult, três instituições do ensino superior (IES), as quais eram denominadas núcleos: Bahia – Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), em Ilhéus; Pernambuco – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e Ceará – Universidade Federal do Ceará (UFC), tendo sua coordenação geral na UESC, em Ilhéus/Bahia.

As ações desse Programa foram organizadas em três estudos que se complementam, a saber: Estudo 1 – análise minuciosa dos descritores da Prova Brasil, procurando buscar elementos do campo conceitual das estruturas multiplicativas. No Estudo 2 – com base nos resultados da análise dos descritores da Prova Brasil, na Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud e no esquema proposto por

Magina, Santos e Merlini (2014), foi elaborado um instrumento diagnóstico com 13 situações do campo multiplicativo e aplicado a estudantes das escolas parceiras. Estudo 3 – implementação da formação continuada com características colaborativas, tendo como fio condutor o modelo “ação-reflexão-planejamento-ação”, buscando promover o desenvolvimento de estratégias de ensino que possibilitassem a apropriação e expansão do campo conceitual multiplicativo.

Nossa investigação foi desenvolvida no núcleo UESC em uma escola pública de um município distante aproximadamente 60 quilômetros desta instituição, com dez professores que participaram concomitantemente do Estudo 3, dos quais, um deles estudava a teoria com o grupo de pesquisa no núcleo UESC, por ser bolsista do Programa OBEDUC/E-Mult desde o início de suas ações. Para maior compreensão do cenário desta pesquisa, detalhamos a forma como foi organizado a Formação OBEDUC/E-Mult no núcleo UESC, ao mesmo tempo em que apresentamos as ações do processo formativo ocorrido em doze encontros do grupo de estudos formado com dez professores oriundos do Programa.

### *3.2.2 A Formação OBEDUC/E-Mult no núcleo UESC e o grupo de estudos*

Em 2013 e 2014, apoiados pelo PPGEM – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UESC, por meio da participação de seus docentes e mestrandos, em conjunto com alunos de licenciatura e bacharelado em matemática da UESC e com professores do ensino básico, os responsáveis pelo núcleo de Ilhéus do Programa OBEDUC/E-Mult, promoveram reuniões semanais, fundamentados nos estudos de Gérard Vergnaud, com o objetivo de apropriar-se dos pressupostos envolvidos na Teoria dos Campos Conceituais, sobretudo o campo conceitual multiplicativo.

Em 2015, efetivou-se a Formação OBEDUC/E-Mult envolvendo duas das escolas (A e B) participantes desse núcleo. Onze professores da escola A participaram dos encontros e dezenove da escola B. Desses professores, duas eram bolsistas do projeto – uma de cada escola. Nossa investigação foi desenvolvida na escola B e, dos dezenove professores envolvidos, dez participaram deste estudo, incluindo a professora bolsista<sup>14</sup>

Os professores que aceitaram o convite para participar da Formação OBEDUC/E-Mult, no ato da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) elaboraram situações envolvendo a multiplicação e a divisão ou ambas, que, em conjunto

---

<sup>14</sup> Essa professora participou das reuniões semanais de estudos do Programa OBEDUC/E-Mult, em 2014 e 2015

com os dados coletados no Estudo 1 e no Estudo 2, nortearam o planejamento que delineou a formação no núcleo da UESC.

A carga horária da Formação OBEDUC/E-Mult foi distribuída em sete encontros presenciais e 10 encontros virtuais, totalizando 100 horas.

Os encontros presenciais se deram inicialmente de forma quinzenal, com 04 horas de duração e posteriormente de forma mensal, com 08 horas de duração.

Os encontros virtuais foram organizados na plataforma *Moodle*<sup>15</sup>, uma plataforma de aprendizagem a distância, objetivando dar um suporte teórico aos encontros presenciais. Por este motivo, os encontros virtuais foram organizados nos intervalos entre os presenciais da Formação OBEDUC/E-Mult. Para esta modalidade virtual síncrona, por meio de *Chat*, cada participante recebeu anteriormente uma senha provisória.

O grupo de estudos foi organizado em 12 sessões, a partir do 3º encontro presencial e do 4º encontro virtual da Formação OBEDUC/E-Mult, dando continuidade no ano seguinte, conforme listamos em um cronograma contendo as datas desses momentos, contando com a participação dos dez professores de forma concomitante no ano de 2015.

As datas dessas ações estão organizadas no Quadro 03, de forma sequenciada, nas quais são apresentadas por temas trabalhados, tanto nos encontros presenciais e virtuais, quanto nos encontros do grupo de estudos.

---

<sup>15</sup> Modular Object - Oriented Dynamic Learning Environment (tradução: ambiente modular de aprendizagem dinâmica orientada a objetos)

**Quadro 03** – Cronograma da formação OBEDUC/E-Mult (2015) e do processo formativo no interior do grupo de estudos (2015/2016)

DATA	Formação OBEDUC/E-Mult/Temas trabalhados		Grupo de Estudos Temas Trabalhados
	Encontros Presenciais	Encontros Virtuais	
27/03	Apresentação do projeto		
15/05	Proporção simples – classe um para muitos		
25/05		Proporção simples; classe um para muitos	
12/06	Comparação multiplicativa		
15/06		Proporção simples: quantidade discreta e contínua	
13/07		Proporção múltipla	
29/07		Comparação Multiplicativa	Proporção simples: desempenho dos estudantes
07/08	Comparação multiplicativa		
17/08		Configuração retangular e combinatória	
09/09			Algoritmo da divisão: esquemas dos estudantes
10/09		Revisão dos temas anteriores	
18/09	Proporção simples – muito para muitos		
28/09		Situações, esquemas e invariantes	
02/10	Configuração retangular e combinatória		
06/10			Área de uma superfície/ proposta de intervenção
19/10		Repertório dos esquemas utilizados por estudantes	
29/10			Análise de esquemas dos estudantes acerca da configuração retangular
09/11		Divisão partitiva e quotitiva	
10/11	Avaliação das ações formativas		
12/11			Desempenho dos estudantes após a intervenção da malha
23/11		Proporção múltipla	
06/05 <sup>16</sup>			Divisão partitiva e quotitiva: desempenho dos estudantes
03/06			Divisão partitiva e quotitiva: propostas de intervenção
07/07			Cenário de ensino 1
22/07			Estratégias de ensino da divisão
26/08			Análise de esquemas dos estudantes sobre divisão
23/09			Análise de vídeo de aula prática
29/10			Esquemas de Vergnaud para resolução das situações

Fonte: Dados levantados pela pesquisadora.

<sup>16</sup> A partir dessa data, em 2016, o grupo de estudo continuou com o processo formativo, sem as ações da formação OBEDUC/E-Mult.

Quanto aos encontros presenciais da Formação OBEDUC/E-Mult, ocorreram da seguinte forma: No primeiro houve a apresentação do projeto de pesquisa do Programa OBEDUC/E-Mult, dos pesquisadores, a assinatura do TCLE e a elaboração das situações pelos professores que aceitaram o convite para participar da formação. Esse momento inicial ofereceu subsídios para a organização dos encontros seguintes que foram destinados ao aprofundamento da Teoria dos Campos Conceituais, em específico, as estruturas multiplicativas. As atividades práticas dos professores participantes aconteceram após cada encontro e contavam com o planejamento, o desenvolvimento, a aplicação e resolução das situações formuladas por ano escolar em conformidade com as intervenções pedagógicas junto aos alunos sobre o tema trabalhado, e após essa dinâmica, os professores analisaram os resultados obtidos com suas turmas e preenchiam os relatórios das atividades desenvolvidas para serem compartilhados com os seus pares e apresentado no encontro seguinte da Formação OBEDUC/E-Mult.

O Quadro 4<sup>17</sup> apresenta de forma sintetizada as ações desenvolvidas nos encontros presenciais, denominadas de ação teórica, ação prática e ação reflexiva

**Quadro 04** – Estratégias de ação nos encontros presenciais da Formação OBEDUC/E-Mult

<b>Ação Teórica</b>	<b>Ação Prática</b>	<b>Ação Reflexiva</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Discussão das estruturas multiplicativas por eixos;</li> <li>▪ Planejamento e elaboração de duas situações pertinentes ao eixo discutido.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Elaboração do Relatório 1<sup>18</sup>, com as ações planejadas a serem desenvolvidas em sala de aula;</li> <li>▪ Discussão das situações desenvolvidas a partir do Relatório 1;</li> <li>▪ Definição das estratégias para aplicação das atividades aos estudantes;</li> <li>▪ Elaboração do Relatório 2<sup>19</sup>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Análise dos resultados da aplicação das atividades planejadas;</li> <li>▪ Expectativas registradas no Relatório 1, apresentada em plenária;</li> <li>▪ Ao analisar as expectativas planejadas no Relatório 1 e se foram concretizadas nos anos escolares.</li> </ul>

Fonte: Adaptado de Merlini (2012, p.106).

A ação *teórica* referiu-se às discussões por eixos das estruturas multiplicativas, por meio das quais o grupo de formadores utilizou-se de *slides* contendo informações do desempenho dos estudantes no instrumento diagnóstico por ano escolar e por eixo, segundo descrito por Vergnaud (1983) com foco nos esquemas utilizados para a resolução das situações propostas. A ação *prática* consistiu em quatro momentos: (i) na elaboração e socialização de duas situações de cada grupo de professores; (ii) nas discussões acerca das situações elaboradas e planejadas; (iii) na definição das estratégias, do material a ser

<sup>17</sup> As ações das três etapas apresentam-se de forma detalhada no documento de identificação nº 15.727, da CAPES.

<sup>18</sup> Relatório de Atividade planejadas por ano escolar (ANEXO D)

<sup>19</sup> Relatório de Atividade Desenvolvidas por ano escolar (ANEXO E)

utilizado; (iv) na elaboração de um relatório com essas informações. Já a ação *reflexiva* consistiu na análise de cada grupo sobre os resultados provenientes da aplicação das situações planejadas com os estudantes, discutidas na ação anterior e registradas nos Relatórios 1 e 2. A análise das observações e das reflexões dos professores foi em torno das principais dificuldades encontradas durante a aplicação, quanto a seus pontos positivos e negativos, e dos procedimentos e estratégias adotadas por eles junto às suas turmas.

Quanto aos encontros virtuais, por tratar-se de um ambiente de aprendizagem *on line*, da plataforma *Moodle* via Chat, tinham em média, a duração de duas horas, geralmente no turno noturno para propiciar a participação da maioria dos professores das duas escolas envolvidas no Programa OBEDUC/E-Mult. Cada encontro era coordenado por um mediador escolhido entre a equipe de formadores do Programa, que iniciava as discussões com questionamentos para o grupo presente neste encontro. A manifestação dos participantes era conduzida e registrada de forma livre, respeitando o tema e o tempo determinado para o encontro. Os temas trabalhados nos encontros virtuais foram baseados nas leituras dos textos de Magina (2014) e Santos (2015), previamente lidos por todos os participantes antes de cada encontro, com o objetivo de aprimorar os conhecimentos sobre os temas trabalhados nos encontros presenciais.

Tanto os encontros presenciais como os virtuais da Formação OBEDUC/E-Mult objetivavam o aprofundamento do ensino sobre as estruturas multiplicativas de acordo com a proposta do Programa OBEDUC/E-Mult.

Quanto aos encontros do grupo de estudos, iniciaram-se pelo eixo Isomorfismo de medidas/proporcionalidade simples, conduzido pela demanda sugerida pelos participantes, sobretudo, com suas preocupações quanto ao desempenho e possíveis intervenções para melhoria de aprendizagem dos seus alunos. Por exemplo, o primeiro encontro foi organizada para atender à solicitação do grupo concernente às atividades propostas no encontro presencial da formação OBEDUC/E-Mul<sup>20</sup>, que se referiam a situações envolvendo a proporcionalidade simples e, no segundo encontro, o grupo solicitou a ampliação das discussões sobre esse mesmo tema, destacando o estudo e o uso de estratégias para o ensino do algoritmo da divisão.

No contexto dos encontros no grupo de estudos, o processo formativo teve como foco, após as discussões e reflexões geradas, a busca de estratégias de ensino que

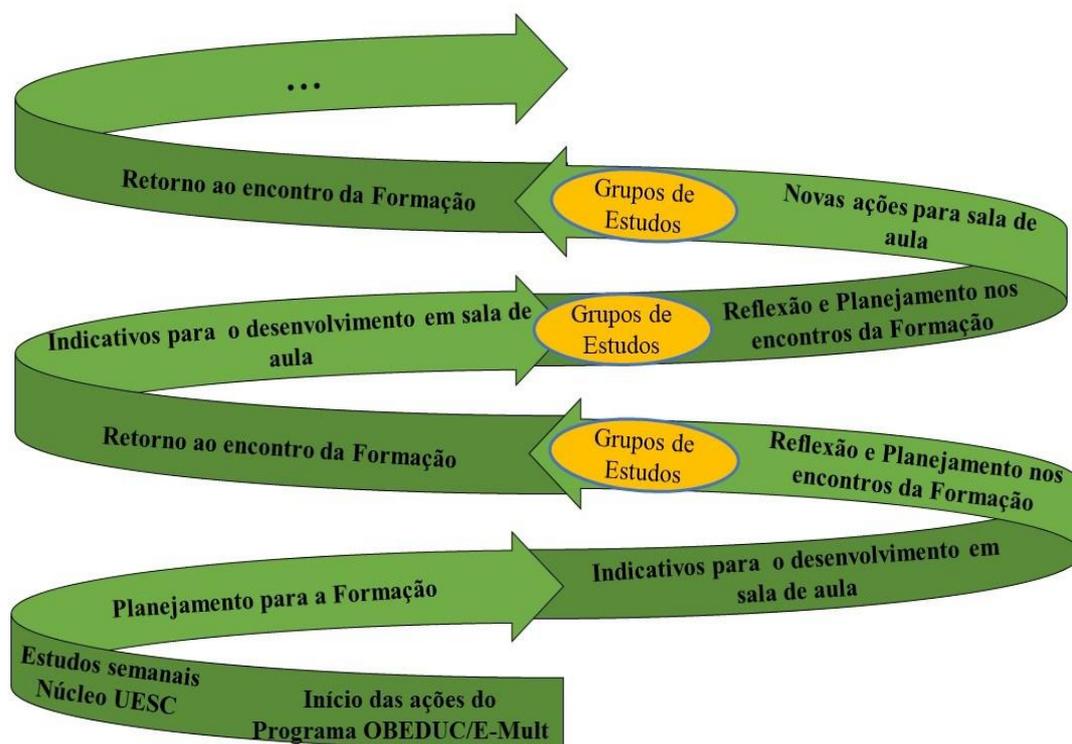
---

<sup>20</sup> Entre as atividades propostas, uma delas era relatar o desempenho dos estudantes e suas produções acerca do tema trabalhado no encontro anterior. Nesse caso, o tema foi proporcionalidade simples.

pudessem colaborar com as atividades propostas a serem efetivadas nos encontros presenciais da Formação OBEDUC/E-Mult. Reiteramos que nossa principal preocupação era com a demanda identificada pelos professores, quando analisavam os esquemas encontrados nos protocolos produzidos por seus alunos.

Para explicitar a dinâmica da Formação OBEDUC/E-Mult e a inserção do grupo de estudos nesse contexto, apresentamos o movimento em forma de espiral decorrente de todo esse processo (Figura 06), (re)construído a partir do modelo de Merlini (2012). Segundo a autora, o movimento de uma espiral formativa começa pela reflexão sobre o ensino, embasado nos estudos da teoria, que significam a reflexão do professor tanto individual como coletivamente, a respeito das suas concepções matemáticas e sobre o que seus estudantes trazem acerca desse aprendizado, concernente, nesse caso, ao campo conceitual multiplicativo. A Figura 06 apresenta a estrutura da espiral da Formação OBEDUC/E-Mult e a inserção do grupo de estudos.

**Figura 06** – Movimento da Formação OBEDUC/E-Mult e da inserção do grupo de estudos



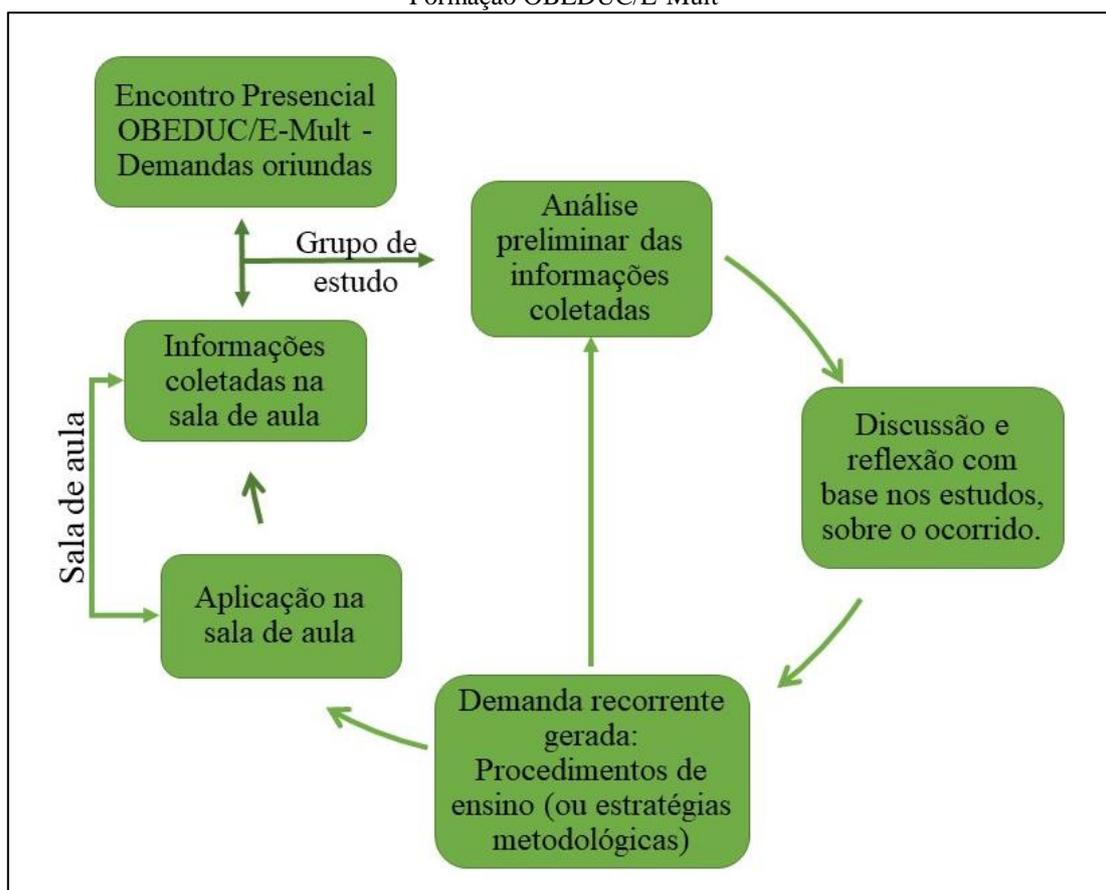
Fonte: Adaptado de Lima (2016).

Na espiral da Figura 06, o momento das ações teórica, prática e reflexiva dentro do contexto da Formação OBEDUC/E-Mult, é desenvolvido no item *Reflexão e Planejamento nos encontros da formação*, pois segundo Lima (2016), os professores envolvidos e os pesquisadores do Programa OBEDUC/E-Mult desenvolveram, nessa

formação, um perfil de colaboração ao que a autora denominou de um *campo colaborativo de aprendizagem e formação*, exemplificando ao relatar o momento da elaboração das situações, quando os professores mostravam, entre si, suas produções para a escolha de duas delas que estivessem com a melhor compreensão para possível aplicação em todas as turmas.

Após essa escolha à luz de uma teoria, os professores passaram a planejar, coletivamente, novas atividades matemáticas para, então, aplicar em sala de aula. Durante esse processo, o professor abordava esse conhecimento com seus estudantes para, posteriormente, refletir individual e/ou coletivamente sobre a ação realizada. Esta investigação está localizada nesse ponto, ou seja, constituímos um grupo de estudos para refletir sobre o que foi discutido no processo formativo e o que foi observado na sala de aula. O movimento das ações do grupo de estudo, *locus* de nossa investigação, está representado pelo esquema da Figura 07, a seguir.

**Figura 07** – Movimento do processo formativo no interior do grupo de estudos, durante e após a Formação OBEDUC/E-Mult



Fonte: Acervo Pessoal

A partir dos encontros presenciais da Formação OBEDUC/E-Mult e das informações coletadas pelos professores ao desenvolverem as atividades planejadas

nesses encontros, iniciou-se uma busca de informações a respeito do desempenho dos estudantes e das estratégias de ensino utilizadas pelos professores para desenvolver o tema das estruturas multiplicativas. A partir disso e com base do que foi discutido no encontro da Formação OBEDUC/E-Mult, no qual se gerou essa demanda, os participantes do grupo de estudos promoveram os questionamentos e suas reflexões sobre o ocorrido, levando em consideração seus estudos sobre a teoria que norteou as atividades por eles aplicadas.

Em seguida, o grupo de estudo mobilizou-se por uma demanda recorrente e gerada por necessidades de ampliação dos conhecimentos profissionais, identificada por meio de verificação da existência de lacunas, da análise do desempenho dos estudantes e dos esquemas utilizados por eles para resolução das situações propostas. A partir dessa mobilização, foram discutidas propostas de estratégias de ensino que pudessem atender essa demanda e para que fossem trabalhadas em sala de aula dos anos em que os participantes atuavam.

O processo formativo no interior do grupo de estudo teve continuidade no ano seguinte ao término da Formação OBEDUC/E-Mult, contando com a influência dos aprendizados gerados nas discussões e reflexões em torno das estruturas multiplicativas e de seu ensino durante os seus encontros presenciais e virtuais, os professores buscavam outros procedimentos a serem analisados e discutidos no grupo, explorados em sala de aula que viessem atender a uma demanda existente, promovendo assim, a ampliação do conhecimento e, em decorrência, o desenvolvimento profissional dos seus participantes.

Para ampliar a compreensão desse cenário, torna-se necessário conhecer a escola onde ocorreram os encontros da formação OBEDUC/E-Mult e os encontros do processo formativo com os participantes do grupo de estudos.

### 3.2.3 A Escola

A escola na qual os professores participantes da pesquisa atuavam, faz parte da rede municipal de uma cidade da região sul do estado da Bahia, é uma das menores cidades do estado. No último censo antes da Formação OBEDUC/E-Mult, contava com 5.715 habitantes. Tem como fonte de renda um pequeno comércio e a agricultura. É a única do município que atende alunos do 3º ao 9º ano do ensino fundamental e no ensino de jovens e adultos (EJA), funciona nos três períodos. No período da Formação OBEDUC/E-Mult, o turno matutino tinha sete turmas dos anos iniciais e cinco dos anos finais; no turno vespertino, quatro turmas dos anos iniciais e dez turmas dos anos finais e

no noturno, cinco turmas da educação de jovens e adultos (EJA). O espaço físico é amplo e dispõe de 14 salas de aula, quatro banheiros (dois para cada gênero), uma biblioteca, uma sala multifuncional que atende, individualmente, alunos com alguma necessidade especial (surdos, mudos, cegos, déficit de aprendizagem), uma sala de informática com acesso à Internet, um refeitório, secretaria, sala da direção, de professores, de coordenadores e um banheiro.

Um dos pontos positivos para que as atividades da Formação OBEDUC/E-Mult se desenvolvessem no ambiente dessa escola foi o apoio da sua diretora e da gestão municipal. A referida diretora é licenciada em matemática e integra a equipe do projeto. Participou de outro projeto de pesquisa, denominado “Pesquisa das Estruturas Aditivas (PEA)<sup>21</sup>”. A parceria com a UESC e com as ações do Programa OBEDUC/E-Mult, incentivada pela gestora, auxiliou os professores dessa escola a envolverem-se nas propostas formativas de que tratava a Teoria dos Campos Conceituais, bem como oferecendo suporte de orientações na construção dos projetos apresentados nas feiras de matemática em nível regional, estadual e nacional.

Durante os encontros da Formação OBEDUC/E-Mult, fizemos um convite aos participantes para formarmos um grupo de estudos na própria escola, estabelecendo horários que fossem favoráveis a todos. O objetivo principal na composição desse grupo era o de promover reflexões sobre as atividades que eram propostas nesses encontros e que, nos intervalos entre um e outro, os professores discutiam no interior do grupo, o desenvolvimento de estratégias de ensino, o desempenho dos seus estudantes na aplicação das atividades e as dificuldades possíveis de serem encontradas por eles nessa etapa, bem como a análise dos resultados obtidos naquele ano escolar. Foram organizadas 12 sessões na própria escola e nos horários nos quais a maioria dos professores pudessem participar, tendo seu início a partir do 3º encontro presencial e do 4º encontro virtual, dando continuidade no ano seguinte.

### *3.2.4 Perfil dos professores participantes do grupo de estudos*

Dez professores aceitaram participar do grupo de estudos e foram identificadas como Alice, Gerson, Graça, Jamile, Janaina, Larissa, Raissa, Roberta, Rosa e Sintia<sup>22</sup>.

Descrevemos no Quadro 05 a seguir, o perfil profissional dos professores

---

<sup>21</sup> Realizado em 2012, na UESC, intitulado “Um estudo sobre o domínio das Estruturas Aditivas nas séries iniciais do Ensino Fundamental” que teve como objeto de estudo a formação do professor e as estruturas aditivas, da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), de Gérard Vergnaud.

<sup>22</sup> Para preservar a identidade dos professores participantes, escolhemos nomes fictícios.

participantes do grupo de estudos, no ano da Formação OBEDUC/E-Mult.

**Quadro 05** - Perfil dos participantes do grupo de estudos no ano da Formação OBEDUC/E-Mult

<b>Professor</b>	<b>Formação</b>	<b>Experiência docente</b>	<b>Ano(s) escolar(es) que ministrava aulas</b>
Alice	Pedagogia	18 anos	5º ano diurno
Gerson	Pedagogia(cursando)	2 anos	3º e 4º anos – Aceleração <sup>23</sup>
Graça	Pedagogia	16 anos	4º e 5º anos – regular e 5º/6º anos – turma mista
Jamile	Licenciatura em Matemática	2 anos	7º e 8º anos
Janaína	Pedagogia(cursando)	7 anos	4º ano
Larissa	Pedagogia	15 anos	4º ano
Raíssa	Pedagogia	16 anos	5º ano
Roberta	Ensino Médio	2 anos e meio	4º ano
Rosa	Pedagogia	3 anos	5º ano
Sintia	Pedagogia	10 anos	4º ano

Fonte: Protocolos do Programa OBEDUC/E-Mult

Destacamos que a professora Alice, além da participação ativa no grupo de estudos, por ser bolsista do Programa OBEDUC/E-Mult, disponibilizou 20 horas semanais dedicadas às atividades anteriores a Formação OBEDUC/E-Mult, participando das reuniões semanais de estudo no núcleo UESC, descritas no item 3.2.1, desta investigação. As professoras Graça, Janaína, Larissa e Raíssa contribuíram de forma contínua e ativa na maioria das sessões do grupo de estudos

O professor Gerson, durante a Formação OBEDUC/E-Mult estava cursando sua graduação em Pedagogia, diplomando-se em 2017. Participou das primeiras sessões de estudos e, por isso, os registros de seus depoimentos foram acrescentados na nossa análise, por entendermos que foram foco de discussões e reflexões compartilhadas no grupo e que gerou com os outros participantes momentos de aprendizagens.

A professora Jamile ensinava como contratada temporária pelo município, participou em diferentes momentos do grupo de estudos e contribuiu de forma expressiva em suas reflexões sobre o ensino das estruturas multiplicativas nos anos em que atuava.

A professora Roberta, não possuía graduação nem cursou o magistério no ensino médio no momento da Formação OBEDUC/E-Mult.

A professora Rosa contribuiu de forma efetiva no grupo de estudos, no ano

<sup>23</sup> Trata-se de uma turma única com alunos que “repetiram” os anos escolares anteriores e para avançar em seu aprendizado são matriculados novamente.

seguinte à Formação OBEDUC/E-Mult.

A professora Sintia participou em poucos momentos das sessões de estudos, porém registramos alguns de seus depoimentos, por ter contribuído nas discussões sobre o tema trabalhado.

Os dados dos participantes do grupo de estudo foram coletados em um instrumento do perfil diagnóstico dos professores, organizado pela equipe do Programa OBEDUC/E-Mult, antes do início das suas atividades, para delineamento das outras etapas da formação.

Apresentaremos, no próximo item, os procedimentos metodológicos utilizados durante toda a nossa investigação e desenhados a partir do objetivo da pesquisa e da constituição e desenvolvimento do grupo de estudo.

### **3.3 Percurso desta Investigação**

Na busca de identificar e compreender as possíveis contribuições de um processo formativo sobre o ensino das estruturas multiplicativas para o desenvolvimento profissional de professores ao participarem de um grupo de estudos, foi necessário organizar este trabalho em três etapas, descritas a seguir:

A etapa 1, nomeada *Estudo Diagnóstico*, foi realizada a partir do levantamento de dados dos professores que aceitaram o convite para participar do grupo, não apenas para justificar esse trabalho, mas serviram como material de apoio às discussões nos encontros do grupo de estudos. Essa coleta de dados foi gerada por meio dos instrumentos utilizados no início da Formação OBEDUC/E-Mult (Anexo A e Anexo B).

Na etapa 2, denominada *Pesquisa de Campo*, constam as formas de registro e análise do trabalho realizado com os participantes da pesquisa durante os encontros do grupo de estudos e do último encontro presencial da Formação OBEDUC/E-Mult. Utilizamos dados dos estudantes (desempenho e esquemas utilizados para a resolução das situações), assim como a filmagem de aulas de duas professoras, como instrumentos geradores das discussões e reflexões sobre o ensino das estruturas multiplicativas. Os momentos dos encontros foram gravados em áudio e transcritos posteriormente. Conforme prevê Garnica (2004), o percurso nessa etapa foi sendo remodelado a partir das atividades realizadas com os professores no interior do grupo de estudos.

A etapa 3, chamada *Discussão e Interpretação dos dados*, foi realizada a partir dos registros feitos na etapa 1 e na etapa 2, comparando seus resultados gerados no início, durante e após o a Formação OBEDUC/E-Mult.

Elencamos no tópico a seguir, os instrumentos utilizados nas etapas da investigação.

### **3.4 Instrumentos de pesquisa**

Na etapa 1 – *Estudo Diagnóstico*, fizemos uso de um instrumento que continha os registros coletados dos participantes do Programa OBEDUC/E-Mult (Anexo B), com o objetivo de mapear as concepções dos professores no início das ações formativas em relação às estruturas multiplicativas, ao elaborar oito situações envolvendo multiplicação ou divisão.

Na etapa 2 – *Pesquisa de campo*: investigamos o ocorrido no interior do grupo de estudos e no último encontro presencial da Formação OBEDUC/E-Mult, por meio das transcrições dos áudios gravados e dos vídeos feitos com duas experiências de sala de aula apresentando a aplicação de uma das estratégias como intervenção de ensino.

Na etapa 3 – *Discussão e Interpretação dos dados*, investigamos os registros utilizados nas etapas 1 e 2, para mapear todos os possíveis indícios do desenvolvimento profissional dos participantes do grupo de estudos. objetivando responder a questão que norteou esta investigação.

Para sistematizar o que foi aqui apresentado, identificamos no Quadro 06, a seguir, os instrumentos utilizados, com seus objetivos, indicando os responsáveis por sua elaboração e o momento da coleta de dados.

**Quadro 06** – Instrumentos utilizados na pesquisa, objetivos e responsáveis pela elaboração

<b>Instrumentos</b>	<b>Objetivos</b>	<b>Responsável pela elaboração</b>	<b>Momento da coleta</b>
Diagnóstico do perfil profissional; (Anexo A) Elaboração de oito situações do campo multiplicativo (Anexo B).	Coletar informações sobre o perfil dos professores participantes e a sua concepção sobre as estruturas multiplicativas	Programa OBEDUC/E-Mult	No início da Formação OBEDUC/E-Mult
Transcrição de áudio/ gravações coletadas	Registrar as informações coletadas sobre as reflexões explicitadas pelos professores.	A pesquisadora	Durante as sessões de estudos e no último encontro de Formação OBEDUC/E-Mult.
Seleção de esquemas utilizados pelos estudantes ao resolverem situações envolvendo o conteúdo área (ANEXO C).	Coletar informações na busca de indícios sobre o olhar dos professores aos esquemas utilizados pelos seus alunos para resolução das situações sobre o conteúdo <i>área</i> .	A pesquisadora	2º encontro
Cenário de ensino 1 (Apêndice A)	Coletar informações sobre o olhar do professor para a forma de representação lúdica dos estudantes acerca dos dados das situações.	A pesquisadora	8º Encontro
Seleção de esquemas utilizados pelos estudantes ao resolverem situações envolvendo a divisão	Coletar informações sobre o olhar do professor para o aluno acerca da divisão por quota e por partição.	A pesquisadora	10º Encontro
Filmagem de aulas	Observar a aplicação de estratégias desenvolvidas por duas professoras nas suas aulas para posterior análise e discussão individual e coletiva	A pesquisadora	Durante as aulas das professoras.
Recortes da filmagem de aulas observadas.	Coletar as informações geradas nas discussões do grupo ao analisar e refletir sobre o ocorrido nas aulas observadas.	A pesquisadora	11º encontro
Situações elaboradas pelos professores após a Formação OBEDUC/E-Mult (Anexo B).	Coletar informações dos professores, em busca de indícios de aprimoramento dos seus conhecimentos sobre o campo multiplicativo.	Programa OBEDUC/E-Mult	Ao fim das ações da Formação OBEDUC/E-Mult

**Fonte:** Dados levantados pela pesquisadora.

Como método de análise dos depoimentos coletados durante os encontros no grupo de estudos, utilizamos os procedimentos descritos por Bardin (2016). Inicialmente, foi realizada uma *pré-análise* a qual é denominada pelo autor como leitura flutuante e, se constitui, ainda segundo Bardin (2016), no primeiro contato com os dados e é o momento em que podem surgir as informações provisórias. Em seguida, ocorreu a parte mais longa, que o autor em seus procedimentos, a nomeia de *exploração* do material que, em nosso estudo, permitiu a organização dos dados de forma a agrupá-lo em torno de categorias

descritas a seguir:

Separamos os dados coletados durante a pesquisa, inicialmente, pelas categorias utilizadas por Vergnaud (1983, 2009) acerca das estruturas multiplicativas: (I) Isomorfismo de medidas – Proporcionalidade simples, destacando a operação de divisão por partes e a divisão por quotas e (II) Produto de medidas, sobretudo a Configuração Retangular. A partir dessa seleção, da leitura e várias (re)leituras, categorizamos os dados segundo os critérios:

- reflexões geradas no processo formativo no interior do grupo de estudos e na Formação OBEDUC/E-Mult
- conhecimentos para o ensino das estruturas multiplicativas evidenciados nas sessões de estudo e nos protocolos recolhidos
- evidências de mudanças e permanências da própria prática declaradas em seus depoimentos orais ou escritos e na observação de aula.

Por fim, no momento em que Bardin (2016) denomina de *Tratamento dos resultados, as inferências e a interpretação*, buscamos dar significados, em profundidade, às afirmações dos professores que permitissem compreender nosso objeto de estudo.

A relevância das etapas e dos critérios de análise escolhidos para buscar responder a questão proposta, se dá pela compreensão de ser um grupo de estudos um ambiente favorável, que proporciona desencadear reflexões e compartilhamentos de aprendizagens para o ensino das estruturas multiplicativas por meio de debates, discussões e (re)significação dos conhecimentos e da prática dos seus participantes.

## **CAPÍTULO 4**

# **DISCUSSÃO E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS COLETADOS DA PESQUISA DE CAMPO EM 2015**

Este capítulo está destinado a discussão e interpretação dos dados da pesquisa de campo realizada no primeiro ano da coleta dos dados, por meio dos quais procuramos relacionar a teoria estudada à prática dos professores participantes do grupo de estudos sobre o ensino das estruturas multiplicativas.

Iniciamos esta análise, discutindo resultados do *Estudo Diagnóstico*, descrito na etapa 1 e realizado com os dados coletados antes da constituição do grupo de estudos, quando a equipe do Programa OBEDUC/E-Mult apresentou a proposta da sua Formação e foi solicitada aos que aceitaram o convite a assinatura do TCLE (Termo de Compromisso Livre e Esclarecido) e a elaboração de oito situações envolvendo a multiplicação ou a divisão, ou ambas. Consideramos que tais resultados serviram de base para análise comparativa dos conhecimentos (re)significados dos professores durante as discussões e reflexões no grupo de estudos naquele ano.

Neste tópico, trataremos ainda da etapa 2 – *Pesquisa de Campo*, aonde analisamos os dados coletados neste ano, por meio das discussões e reflexões no interior do grupo de estudos, e que foram geradas nos encontros presenciais da Formação OBEDUC/E-Mult. Nesta fase da pesquisa, os docentes discutiram sobre o ensino das estruturas multiplicativas, suas propostas metodológicas, desenvolvendo-as em sala de aula e refletindo acerca da própria prática. Desta análise, destacamos episódios, os quais, segundo nosso ponto de vista, possibilitaram um nível maior de reflexão do grupo sobre a temática estudada e seu ensino favorecendo, assim, reconhecer características do desenvolvimento profissional docente dos participantes deste processo formativo.

A discussão e a interpretação dos dados coletados foram pautadas nos estudos que escolhemos para fundamentar esta investigação, ou seja, ligados à reflexão sobre a prática, conhecimento e desenvolvimento profissional docente e às pesquisas que tratam dos processos de ensino e aprendizagem das estruturas multiplicativas.

### **4.1 Estudo Diagnóstico**

#### *4.1.1 Sobre as concepções dos professores a respeito das estruturas multiplicativas*

Para esse estudo, consideramos importante retomar algumas características do perfil dos participantes da pesquisa, vistos anteriormente, os quais faziam parte da Formação OBEDUC/E-Mult e, concomitantemente neste ano, do grupo de estudos, cenário desta investigação. São professores de uma escola da rede pública de ensino, com 2 a 16 anos de experiência docente, que lecionam em turmas do 3º ao 8º ano do ensino fundamental. A análise desse estudo diagnóstico apoia-se na Teoria dos Campos Conceituais, sobretudo no Campo Conceitual Multiplicativo, defendida por Vergnaud (1983, 2009).

Considerando-se que cada professor elaborou oito situações distintas envolvendo a multiplicação ou a divisão, a critério de cada um e afim de identificar as concepções de cinco<sup>24</sup> (Alice, Gerson, Graça, Janaína e Raíssa) dos dez professores do grupo de estudos sobre as estruturas multiplicativas, analisamos as 40 situações que foram por eles elaboradas. Desse total, cinco foram consideradas abertas, possível de diferentes resoluções e envolvem o Campo Conceitual Aditivo e por isso, impediu de classificá-las segundo as categorias defendidas por Vergnaud (1983, 2009). Assim, investigamos 35 situações que sugeriam a ideia de resolução por meio da multiplicação ou da divisão, descritas a sua totalidade em percentual no Quadro 06 a seguir,

**Quadro 07** – Totalidade das situações elaboradas pelos participantes do grupo de estudos

Isomorfismo de Medida Proporcionalidade Simples					Comparação Multiplicativa	Produto de Medidas	
Multiplicação	Divisão por partes	Divisão por quota	4ª Proporcional	Mista <sup>25</sup>			Combi natória
					<b>11</b>		<b>15</b>
<b>31,4%</b>	<b>42,9 %</b>	-	<b>2,9%</b>	<b>5,7%</b>	<b>17,1%</b>	-	-

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult.

Evidenciamos, ao analisar as quantidades apresentadas no Quadro 07, que o maior número de situações que foram elaboradas pelos professores participantes do grupo de estudo, foi do eixo Isomorfismo de Medidas, mais especificamente, a Proporcionalidade Simples (82,9%). Dentro dessa categoria, a maior parte trata-se de situações que propõem, como forma de resolução, a divisão por partes (42,9%) e a multiplicação (31,4%). De antemão, é possível perceber que, na categoria Proporcionalidade Simples, esse grupo de

<sup>24</sup> Mesmo sendo dez o número dos participantes do grupo de estudos, apenas cinco deles participaram na elaboração das situações nos dois momentos da Formação OBEDUC/E-Mult

<sup>25</sup> Consideramos mista a situação que apresentou como forma de resolução mais de uma categoria de um mesmo eixo.

professores não elaborou nenhuma situação com a ideia de Divisão por quotas como proposta de resolução. A Comparação Multiplicativa aparece como categoria de 17,1% das situações elaboradas. Não encontramos situações que sugeriam a categorização de um Produto de Medidas.

Com o propósito de uma maior compreensão dos conhecimentos explicitados pelos professores, apresentamos e categorizamos as situações elaboradas por cada um deles, descritas a partir do Quadros 08 ao Quadro 12.

Inicialmente, apresentamos as situações elaboradas pela professora Alice, no Quadro 08.

**Quadro 08 - Situações** elaboradas pela professora Alice

Situação	Categoria
S1– A avó de João gastou uma dúzia de ovos para fazer 2 bolos. Quantas dúzias serão necessárias para fazer 6 bolos?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples Multiplicação
S2 – Letícia colocou 4 figurinhas na primeira página de seu álbum. Quantas figurinhas faltam para preencher todo o álbum, sabendo que ele tem 12 páginas?	Situação aberta - possível de diferentes resoluções <sup>26</sup>
S3 – Hiago comprou uma TV que estava na seguinte promoção: 12 x de 75,00 Qual o valor total da TV?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples Multiplicação
S4 – Carol foi ao Shopping e comprou: 4 blusas de 15,00, 3 calças de 80,00 e 2 sapatilhas de 45,00; (1) (2) parcelou o total de sua compra em 3 vezes no cartão. Qual o valor de cada parcela?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade simples (1) Composição de Multiplicação (2) Divisão por partes (forma mista)
S5 – Em uma estante há 6 prateleiras com 123 livros. Qual o total de livros existente nessa estante?	Situação Aberta- possível de diferentes resoluções
S6 – Lucas trabalha em uma granja e precisa organizar os ovos para serem transportados. Sabendo que ele tem 950 ovos e 5 caixas, quantos ovos ficarão em cada caixa?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples Divisão por Partes
S7 – Ana juntou suas economias no valor de 487,00. Sua colega Júlia já tem o quádruplo dessa quantia. Qual o valor em reais que Júlia possui?	Comparação Multiplicativa
S8 – Tenho 340 moedas para distribuir em 2 cofrinhos. Quantas moedas colocarei em cada um?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples Divisão por Partes

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult (ANEXO B).<sup>27</sup>

Na análise das oito situações elaboradas pela professora Alice, percebemos que, duas delas (S2 e S5) são consideradas abertas e possível de diferentes resoluções. Uma das situações sugere a ideia de Comparação Multiplicativa e cinco são da categoria Proporcionalidade Simples. Sobre essas cinco últimas, é possível notar que a S1 e a S3

<sup>26</sup> A Situação S2 e S5 elaboradas pela professora Alice deixam abertura para o aluno resolver de diferentes maneiras

<sup>27</sup> Os valores monetários registrados nas situações elaboradas foram deixados sem a representação da moeda real (R\$), para conservar a fidedignidade da grafia dos professores.

propõem a multiplicação, enquanto a S6 e a S8, a divisão por partes. A S4 utiliza-se da Proporcionalidade Simples em duas etapas (forma mista de resolução), a composição de multiplicações e, em seguida, a divisão por partes.

O professor Gerson elaborou as oito situações, listadas no Quadro 09.

**Quadro 09** – Situações elaboradas pelo professor Gerson

<b>Situação</b>	<b>Categoria</b>
S1) Ana ganhou 50 CD de sua madrinha e resolveu dividir em partes iguais com seu irmão Paulo. Com quantos CD cada um ficou?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples/ Divisão por partes
S2) Carlos queria se livrar de 15 bolinhas de gude que tinha e resolveu dividir em partes iguais com seus três amigos. Com quantas bolinhas de gude ficou cada amigo de Carlos?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples/ Divisão por partes
S3) Amanda comprou um celular no valor de R\$ 200,00 com o cartão de crédito de sua mãe e dividiu as prestações em 4 parcelas. Qual o valor de cada parcela?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples/ Divisão por partes
S4) Ricardo quer dividir 88 livros de historinhas por dois amigos em partes iguais. Com quantos livros de história cada amigo de Ricardo ficará?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples/ Divisão por partes
S5) Paulo aumentou em duas vezes as 55 músicas de seu celular. Com quantas músicas ficou o celular de Paulo?	Comparação Multiplicativa
S6) Joana apreçou um vestido numa loja no valor de R\$ 18,00. Na semana seguinte, o valor do vestido estava 3 vezes mais caro. Qual é o seu valor atual?	Comparação Multiplicativa
S7) Robson corre 150 metros toda manhã. Agora ele resolveu aumentar a distância em 4 vezes. Qual será o percurso que Robson alcançará?	Comparação Multiplicativa
S8) Lucas tem 5 tios por parte de sua mãe e, em seu aniversário, cada um deles resolveu presentear-lo com 5 presentes. Quantos presentes Lucas ganhou de seus tios?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples Multiplicação

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult (ANEXO B).

Na análise das situações elaboradas pelo professor Gerson, cinco são caracterizadas por Proporcionalidade Simples, as quais quatro delas sugerem a operação de divisão por partes como forma de resolução (S1, S2, S3 e S4) e uma (S8) a multiplicação. As situações S5, S6 e S7 apresentaram a ideia de comparação multiplicativa em seu formato.

O Quadro 10 apresenta as situações elaboradas pela professora Graça.

**Quadro 10** – Situações elaboradas pela professora Graça

<b>Situação</b>	<b>Categoria</b>
S1 – Em uma caixa, papai colocou 7 garrafas de refrigerante. Quantas garrafas papai colocaria em 3 caixas?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples/ Multiplicação
S2 – Um feirante comprou 5 caixas de maçãs. Em cada caixa havia 25 maçãs. Quantas maçãs havia nas 5 caixas?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples Multiplicação
S3 – Pedro tem 15 anos. Seu irmão mais velho tem o dobro da sua idade. Quantos anos tem seu irmão?	Comparação Multiplicativa
S4 – Comprei 3 dezenas de ovos a 2,00 cada. Se eu comprar 5 dezenas, quanto pagarei?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples / Quarta Proporcional
S5 – Carlos tem 12 bolas de gude. Ele pretende dividi-las com seu primo. Quantos gudes cada um receberá?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples/ Divisão por partes
S6 – Mamãe comprou uma dúzia de rosas e papai presenteou com 3 vasos. Ela pretende colocar as rosas nos vasos de maneira que fiquem com a mesma quantidade. Quantas rosas ficará em cada vaso?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples/ Divisão por partes
S7 – Eu tenho 20 peixinhos a serem distribuídos em 5 aquários. Quantos peixinhos ficarão em cada aquário?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples/ Divisão por partes
S8 – Ganhei 100 laranjas para ser dividida entre 5 professores. Quantas laranjas cada um irá receber?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples Divisão por partes

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult (ANEXO B).

A professora Graça elaborou as oito situações conforme foi solicitado, das quais sete delas foram categorizadas como Proporcionalidade simples. Dessas sete situações, duas, S1 e S2, sugerem a operação de multiplicação para sua resolução e, as situações S5, S6, S7 e S8, a operação de divisão por partes. Ainda na categoria de Proporcionalidade simples, a participante elaborou uma situação (S4) que se utiliza da quarta proporcional para sua resolução. Classificamos a S3 como uma situação envolvendo a Comparação Multiplicativa como forma de resolução.

A professora Janaína elaborou as oito situações a partir de uma tabela de valores em reais, de produtos de consumo e de higiene pessoal, conforme descritas no Quadro 11.

**Quadro 11** – Situações elaboradas pela professora Janaína

<b>Situação</b>	<b>Categoria</b>										
Analise a tabela abaixo que mostra os preços de alguns produtos e alimentos. <table border="1" data-bbox="443 309 770 470" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>Café</td> <td>R\$ 2,19</td> </tr> <tr> <td>Biscoito</td> <td>R\$ 3,95</td> </tr> <tr> <td>Feijão</td> <td>R\$ 4,27</td> </tr> <tr> <td>Maionese</td> <td>R\$ 3,50</td> </tr> <tr> <td>Sabonete</td> <td>R\$ 0,90</td> </tr> </table>	Café	R\$ 2,19	Biscoito	R\$ 3,95	Feijão	R\$ 4,27	Maionese	R\$ 3,50	Sabonete	R\$ 0,90	
Café	R\$ 2,19										
Biscoito	R\$ 3,95										
Feijão	R\$ 4,27										
Maionese	R\$ 3,50										
Sabonete	R\$ 0,90										
S1) O café custa R\$ 2,19. Sabendo disso, calcule quanto uma pessoa pagará por dois pacotes de café.	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples Multiplicação										
S2) Se uma pessoa for comprar 3 vasos de maionese, quanto ela pagará por eles?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples Multiplicação										
S3) Qual o triplo do valor do feijão?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples Multiplicação										
S4) E para comprar 4 sabonetes, precisarei pagar quanto?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples Multiplicação										
S5) Quantos produtos posso comprar com apenas R\$ 10,00? Quais são eles?	Situação Aberta- possível de diferentes resoluções <sup>28</sup>										
S6) Se duas pessoas comprarem todos os produtos disponíveis nesta tabela quanto cada uma delas pagará? não esqueça: são duas pessoas fazendo a mesma compra.	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples/ Divisão por partes (depois da composição)										
S7) Sabendo que o biscoito custa R\$ 3,95, quando pagarei por 5 pacotes de biscoito?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples Multiplicação										
S8) Comprando 10 sabonetes para distribuí-los entre 5 pessoas (1), quanto cada uma pagará pela compra (2)?	Isomorfismo de medidas/ Proporcionalidade Simples Divisão por partes (1) Multiplicação (2)										

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult (ANEXO B).

A professora Janaína elaborou sete situações da categoria Proporcionalidade Simples, envolvendo a multiplicação e a Divisão por partes. O Quadro 10 apresenta essas situações, assim distribuídas: S1 S2, S3, S4 e S7 sugerem a ideia da multiplicação como resolução, enquanto a S6, a Divisão por partes. A S8 utiliza-se da Proporcionalidade Simples em duas etapas, com uma forma mista de resolução, a Divisão por partes e, em seguida, a multiplicação.

Finalmente, apresentamos, no Quadro 12, listamos as situações elaboradas pela professora Raíssa.

<sup>28</sup> A situação S5 apresenta a ideia aditiva para a sua resolução, a qual consideramos aberta para diferentes formas de sua resolução

**Quadro 12** – Situações elaboradas pela professora Raíssa

<b>Situação</b>	<b>Categoria</b>
S1 – André comprou duas caixas de lápis que contêm 12 lápis cada uma delas. Quantos lápis André comprou?	Proporcionalidade Simples Multiplicação
S2 – Maria comprou uma mesa que custou 360,00 para pagar em 3 meses. Quanto Maria vai pagar por mês?	Proporcionalidade Simples/ Divisão por partes
S3 – Maria tem 40 peixes para distribuir em 4 aquários. Quantos peixes ela colocará em cada aquário?	Proporcionalidade Simples Divisão por partes
S4 – Os alunos do 6º ano construíram duas bolas de futebol. Sabendo que cada bola tem 12 pentágonos e 20 hexágonos, quantos pedaços de forma geométrica é necessário para construir a bola?	Situação Aberta- possível de diferentes resoluções
S5 – Paulo tem 36 gudes para ser distribuídas por 3 colegas. Quantos gudes cada um deles receberá?	Proporcionalidade Simples Divisão por partes
S6 – Luana tem uma sorveteria que tem 3 diferentes sabores: morango, chocolate e ameixa. De quantas formas Luana pode fazer essa combinação?	Situação Aberta- possível de diferentes resoluções
S7– Ana Lú tem 12 bonecas e suas amigas têm o dobro. Quantas bonecas suas amigas têm a mais?	Comparação Multiplicativa
S8 – Paulo tem 48 balas para distribuir com seus colegas. Quantas balas cada um receberá?	Proporcionalidade Simples/ Divisão por partes

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult (ANEXO B).

A professora Raíssa elaborou oito situações, das quais consideramos duas delas (S4 e S6) como abertas e possíveis de diferentes resoluções, impedindo-as de categorizá-las segundo Vergnaud (1983). As restantes, caracterizamos da seguinte forma: Proporcionalidade simples, sendo uma (S1) com a ideia de multiplicação para sua resolução, enquanto as situações S2, S3, S5 e S8, a operação de Divisão por partes. A S7 apresentou a categoria Comparação Multiplicativa.

Sintetizamos, no Quadro 13, os resultados do *Estudo Diagnóstico*, com o total das situações elaboradas por todos os professores que realizaram a atividade e validadas de acordo com o que foi proposto, organizando-as pelas categorias analisadas.

**Quadro 13** – Professor e Situações Categorizadas – Resumo

<b>Professor</b>	<b>Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples</b>				<b>Comparação Multiplicativa</b>	<b>Totais</b>
	<b>Multiplicação</b>	<b>Divisão por partes</b>	<b>Mista</b>	<b>4ª Prop.</b>		
Alice	2	2	1	-	1	6
Gerson	1	4	-	-	3	8
Graça	2	4	-	1	1	8
Janaína	5	1	1	-	-	7
Raíssa	1	4	-	-	1	6
<b>Totais</b>	<b>11</b>	<b>15</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>35</b>
<b>%</b>	<b>31,4 %</b>	<b>43%</b>	<b>5,7%</b>	<b>2,8%</b>	<b>17,1%</b>	<b>100%</b>

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult (ANEXO B).

O Quadro 13 apresenta a totalidade das situações elaboradas pelos participantes do grupo de estudos, e a categoria encontrada em maior número (aproximadamente 83%)

foi o eixo Isomorfismo de Medidas, classe Proporcionalidade Simples, destacando a multiplicação (31,4%) e a Divisão por partes (43%) como as operações sugeridas para a sua resolução. A Comparação Multiplicativa foi a classe escolhida com um percentual maior (17,1%) em detrimento da classe mista (multiplicação e divisão) e da quarta proporcional, ambas do eixo Isomorfismo de Medidas, classe Proporcionalidade simples.

Os resultados do *Estudo Diagnóstico* mostram indícios de que os participantes do grupo de estudos elaboraram situações envolvendo procedimentos de cálculos como proposta de resolução em sua maioria, explorando contextos dos estudantes, como a sala de aula ou o comércio local, porém com baixo grau de dificuldades. Isso nos leva a inferir que esses profissionais se preocupavam, por um lado, em utilizar situações contextualizadas, conforme preconiza os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) e, por outro, focavam o ensino de resolução de problemas nas operações que resolviam a situação, a multiplicação e a divisão.

É possível notar que tais resultados foram observados também em outras investigações como as de Miranda (2014) e Etcheverria (2014), por exemplo. Essas autoras concluíram que, em relação às estruturas aditivas, os professores também pensavam em situações presentes no dia a dia dos estudantes envolvidos na pesquisa, mas não se preocupavam em diversificá-las e explorar outras categorias com maior grau de complexidade.

No tocante às estruturas multiplicativas, nossos resultados aproximam-se dos encontrados por Merlini, Magina e Santos (2013), com 14 professoras dos dois anos iniciais do ensino fundamental em uma escola da rede pública de São Paulo que, observando a elaboração de seis situações envolvendo a multiplicação ou a divisão, identificaram que, das 64 situações formuladas pelas professoras consideradas válidas do ponto de vista conceitual e didático, 48 delas (75%) solicitavam para a sua resolução a operação de multiplicação e 16 (25%) a de divisão, somente do tipo por partição.

Souza (2015) investigou a totalidade de situações elaboradas pelos 59 professores de cinco escolas participantes, no início da formação OBEDUC/E-Mult. A autora identificou que todos os grupos de professores elaboraram situações envolvendo, predominantemente, a Proporcionalidade simples em detrimento da Comparação Multiplicativa e do Produto de Medidas. Além disso, concluiu ainda que a concepção de professores dos anos iniciais e dos anos finais do ensino fundamental são próximas, ao explorar essas situações.

Concernente ao fato de os professores não terem elaborado situações com o foco

na resolução por meio da configuração retangular, justificamos o ocorrido a partir do estudo de Santana, Lautert, Castro Filho e Santos (2016) ao apresentarem os resultados preliminares do Programa OBEDUC/E-Mult, referindo-se ao desempenho de 3.890 estudantes dos anos iniciais e finais do ensino fundamental e ao instrumento diagnóstico, construído para o início dessa investigação, em que encontraram o maior número de erros dos estudantes na resolução da situação “A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem  $24\text{m}^2$ . A largura é 4m. Qual é o comprimento em metros desse jardim?”, que envolvia o eixo Produto de medidas, relacionando-o à Configuração Retangular e à operação divisão. Reiteramos que a referida situação foi analisada por Santana e colaboradores (2016) e concluíram que uma das dificuldades para resolver essa situação, principalmente nos estudantes dos anos iniciais, foi a de se usar a operação de divisão como a inversa da multiplicação.

#### **4.2 Discussão e Interpretação dos dados coletados no interior do grupo de estudos no ano de 2015**

Reiteramos que, para descrever e analisar os dados coletados, escolhemos episódios relacionados a cada uma das categorias de Vergnaud (1983, 2009), que foram focos das discussões no grupo de estudos, a saber: (I) Isomorfismo de medidas: Proporcionalidade simples – Divisão – por partes e por quotas – e (II) Produto de medidas – Configuração Retangular.

Seguimos os critérios adotados para a análise do desenvolvimento profissional docente, conforme elencado no capítulo anterior. Nesse sentido, valemo-nos da análise: das *reflexões* geradas no grupo de estudos e da Formação OBEDUC/E-Mult; dos *conhecimentos* para o ensino das estruturas multiplicativas evidenciados nas discussões e reflexões dos participantes e dos protocolos recolhidos do Programa OBEDUC/E-Mult; e das *evidências de mudanças* e permanências da própria prática declarada em seus depoimentos orais ou escritos e na observação de aula.

Para a escolha dos episódios de cada uma das classes de situações a serem analisados, são apresentados nos itens nomeadamente: i) reflexões sobre o ensino: algumas inferências sobre a prática docente; ii) relação entre as diferentes categorias do conhecimento para o ensino da categoria estudada; iii) do grupo de estudos para a sala de aula e da sala de aula para o grupo de estudo: a prática em foco e iv) dos estudos do grupo

para a Formação OBEDUC/E-Mult<sup>29</sup>.

A análise dos episódios está delineada em dois momentos, a saber: primeiro momento, durante o período da Formação OBEDUC/E-Mult, no ano 2015 e o segundo após esse período, em 2016, no qual o grupo de estudos retornou com demandas recorrentes ao ano anterior e, por esse motivo, reportamo-nos ao primeiro momento sempre que essa demanda for sinalizada. Essa análise foi configurada baseada na proposta de Bardin (2016), observando nos itens analisados, o caminho desenhado pelo autor, a saber: a pré-análise, a exploração do material e a o tratamento dos resultados, as inferências e a interpretação.

Iniciamos pela análise em torno do eixo Isomorfismo de Medidas: Proporcionalidade simples – Divisão, que foi o foco das discussões no início das sessões de estudo, retornando, no ano seguinte, quando finalizado a Formação OBEDUC/E-Mult.

#### 4.2.1 *Isomorfismo de Medidas: Proporcionalidade simples - Divisão*

##### 4.2.1.1 *Discussões e reflexões sobre o ensino da Proporcionalidade Simples/multiplicação e divisão: algumas inferências sobre a prática docente*

Neste tópico, tratamos do primeiro encontro do grupo de estudos, formado pela pesquisadora e pelos professores que participavam da Formação OBEDUC/E-Mult e, de forma concomitante, desse grupo. As discussões foram geradas em dois momentos, os quais consideramos relevantes ao analisar os depoimentos dos participantes acerca do tema proposto para esse encontro e, com isso, buscar contribuições oriundas das intervenções feitas em sala de aula e relatadas de forma coletiva.

No primeiro momento, foi proposto um relato breve das experiências vivenciadas pelos participantes ao aplicar as situações que tinham sido elaboradas por eles durante dois encontros da Formação OBEDUC/E-Mult (15/05 e 12/06 – Vide Quadro 3), cujo tema referia-se ao eixo *proporcionalidade simples*, que sugeria a multiplicação ou a divisão para sua resolução. Seleccionamos alguns depoimentos dos professores participantes deste primeiro encontro – Alice, Janaína, Larissa, Rosa e SINTIA –.

*Primeiro, vi que tinham dificuldade na leitura, notei que tinha falta de interpretação por eles só estarem decodificando [referindo-se ao estágio da leitura em que estavam os alunos. Na hora de interpretar, ele [o aluno] tem um grande problema. Por quê? Ele acha que sabe ler, mas não é letrado. Tem uma diferença. Por exemplo (a professora lê uma das situações que aplicou antes das que foram propostas): Um pacote de bala tem 12 unidades. Se Joana comprar 2 pacotes, virão quantas balas? Os meninos até leem, mas na hora que eles vão interpretar, ficam perdidos, tentando entender o que eles vão fazer, se é uma situação de*

<sup>29</sup> Conforme elencamos nas atividades do Quadro 03, as ações do processo formativo no interior do grupo de estudos deram continuidade no ano seguinte ao da Formação OBEDUC/E-Mult, portanto, a análise do item (iv) se restringiu enquanto a Formação OBEDUC/E-Mult estava em andamento, ou seja, no ano 2015.

*adição, se é uma situação de multiplicação.* (professora Larissa).

*Os meus (referindo-se aos seus alunos) já conseguem escrever as grandezas, já conseguem identificar, não colocam naquele esquema (referindo-se ao esquema trabalhado para representar as grandezas e resolver por meio da proporcionalidade simples), mas colocam balas, doze e pacotes (a professora aponta no ar como se tivesse escrevendo como seus alunos registram no caderno)* (professora Alice).

Segundo os depoimentos das professoras Larissa e Alice, os alunos, ao resolverem as situações por elas aplicadas, apresentaram comportamentos diferentes, mesmo que seus anos escolares sejam próximos (4º e 5º anos). O conhecimento descrito pela professora Larissa sobre o seu aluno está relacionado com a não aprendizagem da leitura que, segundo ela, “*ele acha que sabe ler, mas não é letrado*” seguida da dificuldade em interpretar a situação que leve a ideia que envolve a situação. Quanto ao aluno da professora Alice, ela declara que as grandezas encontradas nas situações apresentadas já são familiares para ele, embora não consigam registrar segundo o esquema da proporcionalidade simples que a professora tinha visto na Formação OBEDUC/E-Mult.

Vergnaud (2011, p. 22,23) afirma que as situações que envolvem proporcionalidade representam um quadro principal de situações em que a ideia de resolução obriga o aluno necessariamente que se faça uma multiplicação ou uma divisão, ou uma sequência dessas operações. Os estudantes, segundo o autor, desde a aprendizagem da multiplicação, são levados a operações de pensamento que não se reduzem apenas a operações numéricas, mas implicam também em raciocínios sobre quantidades e grandezas, um tipo precedente de análise dimensional.

Resultados de estudos como os de Gitirana et al. (2014), apontam registros de alunos ao resolverem situações multiplicativas, quando demonstram o reconhecimento das grandezas nelas existentes. De forma similar com o que foi declarado pela professora Alice: “*conseguem escrever as grandezas, já conseguem identificar*”, as autoras consideram esse fato como um procedimento desejável entre alunos do segundo ciclo do ensino fundamental e que se torna importante o professor saber interpretar essas diferentes formas de raciocinar e de representar para gerar atividades de ensino que os auxiliem na compreensão dessas relações estabelecidas pelo aluno, tornando isso necessário à resolução da situação.

No que refere ao relato sobre as limitações no ato de ler e interpretar as situações nas turmas das duas professoras, e o conhecimento do professor a respeito dessas dificuldades, apoiamo-nos nas ideias de Vergnaud (2009) quando afirma que:

Os conhecimentos que essa criança adquire devem ser construídos por ela em relação direta com as operações que ela, criança, é capaz de fazer sobre a realidade, com as relações que é capaz de discernir, de compor e de

transformar, com os conceitos que ela progressivamente constrói. Isso não quer dizer, de modo algum, que o papel do professor deva ser negligenciado; mas o valor do professor reside justamente na sua capacidade de estimular e de utilizar essa atividade da criança. Toda formação do professor, todo seu esforço, devem procurar lhe dar um maior conhecimento sobre a criança e permitir-lhe ajustar permanentemente as modalidades de sua ação pedagógica (VERGNAUD, 2009, p.15).

Seja na limitação do aluno quanto ao letramento ou no registro das grandezas reconhecidas na situação, ou ainda, na interpretação delas quanto ao tipo de operação a ser utilizada para sua resolução, o professor, ao ampliar o seu conhecimento especializado do conteúdo e do ensino e o conhecimento do conteúdo e do aluno, apoiados em Ball, Thames e Phelps (2008), mostram ter desenvolvido sua capacidade em analisar e identificar concepções equivocadas dos estudantes, do ponto de vista matemático, e fazer intervenções que favoreçam o seu aprendizado, aprimorando, assim, o ato de ensinar.

Nesse contexto, a pesquisadora procurou retomar o depoimento da professora Larissa para refletir sobre a relação entre a adição e a multiplicação. Quanto a preocupação demonstrada no depoimento dessa professora, *os meninos até leem, mas na hora que eles vão interpretar, ficam perdidos, tentando entender o que eles vão fazer, se é uma situação de adição, se é uma situação de multiplicação*, a pesquisadora enfatizou que:

*Esse fato pode estar associado à ideia de como é organizado o currículo em algumas escolas dos anos iniciais, tipo, primeiro ensinar a adição, depois a subtração e, por último, a multiplicação e a divisão. Não que seja errada essa forma, mas quando começamos a pensar na multiplicação nessa perspectiva, podemos dizer que multiplicar é apenas adicionar parcelas iguais e, por isso, só pode ser ensinada depois de ensinar a adição (pesquisadora).*

Nesse sentido, pretendíamos apresentar ao grupo a questão da necessidade da ruptura das duas operações adição e multiplicação, defendidas por Magina, Merlini e Santos (2014) quando afirmam que:

Gostaríamos de salientar que não somos contrários à introdução da multiplicação por meio de adição de parcelas iguais, pois este procedimento aponta a continuidade (filiação) entre a adição e esta operação. Nossa questão reside em três aspectos: (1) **do ponto de vista didático**, restringir multiplicação à adição de parcelas iguais repetidas implica considerar que multiplicação sempre aumenta, o que não é verdade em outro domínio numérico como, por exemplo, no campo dos números racionais ( $0,5 \times 0,5 = 0,25$ ); (2) **do ponto de vista conceitual**, existe uma clara descontinuidade (ruptura) entre essas duas operações; (3) **do ponto de vista cognitivo**, as situações com graus diferentes de complexidade, exigirão do estudante um maior investimento cognitivo para compreendê-las e ter sucesso ao resolvê-las (MAGINA;MERLINI;SANTOS,2014,p.518-519).

Outro depoimento que selecionamos nesse episódio foi o da professora Janaína ao observar a dificuldade dos seus alunos em relação à operação de divisão.

*A maior dificuldade deles, pra mim, por enquanto, é a divisão. Ainda não trabalhei com eles a divisão, porque a gente “tá” percebendo a dificuldade deles em multiplicação e aí estou*

*batendo na mesma tecla, de multiplicação de dois números, batendo pra depois a gente ir pra divisão. Tem uns que mesmo sem eu ter trabalhado ainda, eles já sabem, já têm uma noção. Mas a maioria não. Tem um probleminha aqui que é de divisão e eles colocaram de multiplicação. (Referindo-se à situação apresentada na Figura 08) (professora Janaína).*

**Figura 08** - Situação elaborada envolvendo a operação de divisão

numa caixa de bombom, tem 36 unidades, maria distribuiu entre ela e mais 5 colegas de forma que cada pessoa recebeu a mesma quantidade. Quantos bombons cada um recebeu?

**Fonte:** Protocolo do Programa OBEDUC-E-Mult

A situação à qual a professora Janaína referiu-se, sugere a operação de divisão para a sua resolução, com a ideia de distribuição de forma equitativa (divisão por partes) Em seu relato, essa operação ainda não tinha sido trabalhada com seus estudantes, pois sua preocupação era explorar a multiplicação por dois algarismos para só após essa compreensão da operação de multiplicação, trabalhar a divisão.

A professora Janaína em seu relato, apresenta uma prática apontada em pesquisas como as de Nunes e Bryant (1997) quando mostram resultados em que os professores, em geral, possuem uma visão de que a multiplicação e a divisão são operações aritméticas diferentes que deveriam ser ensinadas às crianças após terem aprendido adição e subtração. Os autores chamam a atenção sobre a importância da descontinuidade dessas operações no desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, gerado pela compreensão do estudante das operações de pensamento, sistemas de sinais e situações que estão conectadas aos conceitos de multiplicação e divisão.

Diante disso e apoiados nos estudos de Nunes e Bryant (1997), a professora Janaína expressa uma ação prática como ensinar aos seus alunos a multiplicação de dois algarismos *pra depois a gente ir pra divisão* que denota a necessidade do conhecimento de estratégias de descontinuidade no trato do ensino dessas operações.

No tocante ao entendimento dos alunos dos anos iniciais sobre a operação de divisão, Santos, Merlini, Magina e Santana (2014) investigaram a maturidade cognitiva dos alunos do 1º e 2º anos do ensino fundamental, em que ainda não tinha sido trabalhado esse conceito. Nessa pesquisa, foram analisadas três situações, sendo uma envolvendo a ideia de divisão por partição e as outras duas envolvendo a ideia de quotas. Do ponto de vista qualitativo, os autores identificaram quatro níveis de estratégias empregadas pelos alunos: (a) incompreensível; (b) estratégia de pensamento aditivo; (c) estratégia de transição; e (d) estratégia de pensamento multiplicativo. O estudo concluiu que os

estudantes desses anos demonstram já estarem cognitivamente preparados para trabalhar com situações das estruturas multiplicativas, apoiados em estratégias baseadas na representação pictórica (SANTOS, MERLINI, MAGINA; SANTANA, 2014, p. 38).

Portanto, entendemos que trabalhar com a operação de divisão já a partir dos dois primeiros anos iniciais, utilizando inicialmente os registros pictóricos como uma ferramenta didática importante, pode assegurar ao aluno a apropriação desse conceito que os permitirá lidar com situações das estruturas multiplicativas, mesmo sem terem tido um contato formal com o algoritmo da divisão.

Sobre essa temática, procuramos retomar as discussões ocorridas na Formação OBEDUC/E-Mult, citando resultados de pesquisas como os de Santos (2015), objetivando aos participantes do grupo de estudos conhecerem outros trabalhos que foram realizados com o ensino das estruturas multiplicativas.

*Um pesquisador em São Paulo [referindo-se a Santos (2015)] apresentou resultados de um estudo, no qual os professores que participaram dele, conseguiram repensar a ideia de que o currículo poderia ser de forma não sequenciada e ainda descobriram que as situações que foram aplicadas por eles aos seus alunos, poderiam ser resolvidas acertadamente pelos estudantes mesmo que não dominassem as quatro operações. Outra coisa, quando vocês trabalham as situações utilizando a ideia de proporcionalidade, estão dando oportunidade aos seus alunos a reconhecerem as grandezas e as relações existente nelas, como ocorreu com os professores envolvidos no estudo desse pesquisador. A gente sabe que isso leva tempo, até anos para ser percebido, mas o que não podemos fazer é desistirmos de tentar (pesquisadora)*

Nossa intervenção junto ao fato ocorrido foi apresentar aos participantes do grupo outras experiências similares à que eles estavam vivenciando e, com isso, valorizar o que percebiam das estratégias dos seus alunos frente à resolução das situações envolvendo a multiplicação e a divisão.

No item seguinte, trataremos da análise de duas situações apresentadas aos professores na busca de obter dados sobre as diferentes categorias do conhecimento e sua relação com o ensino da proporcionalidade simples.

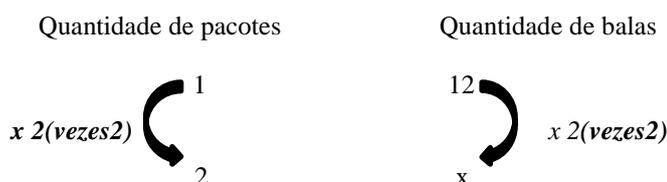
#### *4.2.1.2 Relação entre as diferentes categorias do conhecimento para o ensino da Proporcionalidade simples*

No segundo momento deste encontro com o grupo, apresentamos duas das situações as quais os professores elaboraram no início da Formação OBEDUC/E-Mult. Foi solicitado aos participantes que respondessem de acordo com o seu entendimento acerca delas, socializando suas respostas no fim.

- *Situação 1: Num pacote de balas tem 12 unidades, se Joana comprar 2 pacotes, virão quantas balas?*

Conforme a categorização de Vergnaud (2009, p. 243), essa é uma situação que envolve – Isomorfismo de medidas – uma relação multiplicativa entre duas grandezas: pacotes e balas – e que pode ser resolvida conforme o esquema da Figura 10

**Figura 10** - Proposta de resolução da situação por meio do escalar multiplicativo



**Fonte:** Adaptado de Vergnaud (2009, p. 243).

Detalhando o esquema representado na Figura 10, temos: 1 e 2 são números que representam as quantidades de pacotes, consideradas como medidas. 12 e x são números que representam as quantidades de balas, também consideradas por Vergnaud (2009) como medidas, mas de outra natureza. Os operadores verticais  $\times 2$  (*vezes 2*) são operadores sem dimensão, ou escalares, que permitem passar de uma linha à outra na mesma categoria de medidas. Escolhemos algumas das respostas dadas pelos participantes do grupo de estudos, ao explicar como resolveram a Situação 1.

*Peguei o 1 e multipliquei por 2. Se eu for pegar pra responder com eles [referindo-se a seus alunos], aí eu pegaria os 12 e multiplicaria por 2 também. Mas aí eu fiz aquele também [referindo-se ao esquema de proporcionalidade simples] (professora Sintia).*

*Eu usei o método antigo mesmo. 2 vezes 12 e aí multipliquei por 2. Em seguida, coloquei a resposta. (professora Rosa).*

*Fiz do mesmo jeito, só que usei o tradicional. Coloquei o esquema também (professora Alice).*

A pesquisadora questiona o que eles querem dizer com “fiz pelo método tradicional”

*É que antes eu não tinha essa noção aqui [referindo-se à proporcionalidade entre duas grandezas]. Fiz assim hoje por causa de vocês [referindo-se ao processo formativo, que tratou do tema no encontro presencial] (professora Larissa).*

Encontramos nesses relatos, indícios de que os professores, ao participarem da Formação OBEDUC/E-Mult que trabalha uma teoria (no caso a Teoria dos Campos Conceituais) com o ensino das estruturas multiplicativas, lançaram mão desse conhecimento ao resolverem a Situação 1, embora também o fizeram por meio do “tradicional” ou “antigo” e, com exceção da professora Rosa, os outros professores procederam da mesma forma, utilizando-se dos dois métodos de resolução para a situação

proposta. Todavia, percebemos que o vocabulário utilizado durante a formação ainda não fazia parte da sua base de conhecimentos.

As discussões continuaram em relação à Situação 1. A pesquisadora questionou sobre o fato de os professores terem calculado 12 vezes 2 e não 12 mais 12?

*Porque são 2 pacotes e cada um tem 12 balas (professora Larissa).*

*A gente já domina a multiplicação. E talvez os meninos fizessem 12 mais 12 (professora Janaína).*

*Ou apenas somassem 12 mais 2 (professora Alice, complementando a professora Janaína).*

*Mas fazendo 12 mais 2, não dá 24 (professora Rosa complementa professora Alice).*

*Porque a gente já sabe a multiplicação. Eles ainda não (professora Síntia).*

*É como a gente “tá” falando, o aluno quando não sabe interpretar e olha só os números, faz isso, soma o que ele está vendo no problema. Tudo pra eles é adição. Por exemplo, se a gente colocar o triplo, o dobro, aí eles já se perdiam, diziam: “Tia, porque não tem o número? “Nesse caso, eu explico, o que quer dizer o triplo, o duplo. A maioria não conhece esses termos (professora Larissa).*

Nesse episódio, é possível perceber indícios nas falas das professoras Janaína e Síntia ao afirmarem *a gente já sabe (ou domina) a multiplicação*, que o conhecimento comum do conteúdo a respeito dos procedimentos de cálculo da multiplicação é trabalhado em suas práticas. Quanto aos conhecimentos sobre seus estudantes, percebem a dificuldade, por parte deles, em assimilar os procedimentos de cálculo da multiplicação levando-os a recorrerem à adição de parcelas iguais. Outros comentários como o da professora Alice que afirma que os alunos podem, por exemplo, adicionar as quantidades que aparecem na situação, no caso,  $12 + 2$ , tal fato é explicado pela professora Larissa: *quando não sabe interpretar e olha só os números, faz isso, soma o que ele está vendo no problema*. Essa última professora, inclusive, discute que tal fato dificulta a compreensão da ideia de dobro, triplo de uma quantidade, pois seus alunos questionam: *Tia, porque não tem o número* e, da mesma forma, ela discute limitações das crianças com a terminologia utilizada.

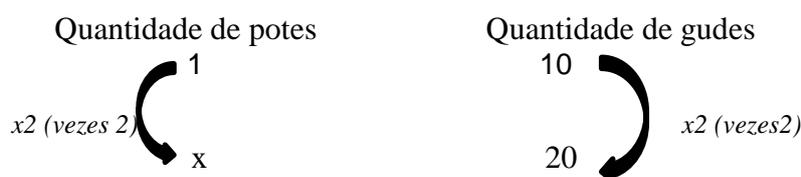
Tal fato nos leva a perceber que a Formação OBEDUC/E-Mult proporcionou ao participante uma valorização do uso da proporcionalidade na resolução das situações multiplicativas, uma vez que elas procuraram apresentar à pesquisadora o esquema sugerido por Vergnaud (2009). Notamos ainda sua preocupação com as estratégias utilizadas por seus estudantes. As ações desses professores corroboram com os resultados da pesquisa de Santos (2015), quando defende que o processo formativo, pautado em um campo específico da matemática, é importante como detonador desse processo e que, é

muito mais valorizado quando as práticas de sala de aula tornam-se objetos de análise compartilhada de reflexão e de problematização (SANTOS, 2015, p. 302).

Em continuidade às discussões nessa sessão de estudos, a pesquisadora apresenta a Situação 2, na qual representamos o mesmo esquema da Situação 1 como proposta de resolução, na Figura 11.

- *Situação 2: João tem um pote em que cabem 10 gudes, mas ele tem 20 gudes. Quantos potes ele precisa ter para colocá-las?*

**Figura 11:** Proposta de resolução da situação 2 por meio do escalar multiplicativo



**Fonte:** Adaptado de Vergnaud (2009, p. 243).

Para análise das discussões sobre a Situação 2, escolhemos alguns depoimentos dos participantes dessa sessão.

*Deixa eu ser sincera, quando eu li essa segunda questão, eu sei resolver, mas confesso que estou perdida pra colocar no papel. (professora Larissa).*

*Eu também. Já ia até falar nisso. Ele tem vinte gudes na mão e só tem um pote em que cabem 10. Quantos potes ele vai precisar? Esse, não consegui colocar no esquema [referindo-se ao esquema de Vergnaud] (professora Alice).*

*Pelo esquema, eu consegui colocar, só não consegui fazer a “continha” normal (professora Larissa).*

*Mas se ele tivesse 20 gudes, quantos potes ele teria que ter? Tem que dividir 20 por 2 e aí vai ver que aqui são 10 (professora Sintia).*

*Não concordo. Não precisa de 10 potes. Ele só quer saber quantos potes vai precisar? Ele tem que achar quantos potes (professora Janaína).*

*Temos potes e gudes (montando o esquema e reconhecendo as grandezas). (professora Larissa).*

*E aí vai ser dividido (professora Alice).*

*20 dividido por 10 que dá 2. Você tem que achar 1 pote (complementa professora Sintia).*

*Eu quero aprender isso aí (professora Janaína).*

*Eu fiquei na dúvida (professora Rosa).*

*Eu coloquei o 20 e fiquei esperando. Eu pensei, de imediato, que seria 20 dividindo o gude que tem aí por 10. O número que ele tem é 20 e 10 (professora Janaína).*

No esquema, multiplica 2 vezes 10 dá 20 e 2 vezes 1 dá 2 (professora Sintia).

De cima para baixo, multiplica. De baixo para cima, divide [referindo-se ao esquema da proporcionalidade] (professora Alice).

Esse episódio apresenta uma discussão voltada exclusivamente ao conhecimento do uso da Proporcionalidade simples que representa a Situação 2, segundo Vergnaud (2009). As declarações feitas pelos participantes do grupo de estudo, giram em torno de quais operações utilizar nessa categoria. A princípio, os professores demonstram incerteza quanto aos procedimentos de cálculo a serem utilizados, mesmo reconhecendo as grandezas envolvidas na situação. Os depoimentos das professoras Larissa, Alice, Janaína e Rosa denotam dúvidas na montagem do esquema sugerido pela Figura 11. Após alguns debates, a professora Alice, ao comentar que “*de cima para baixo, multiplica. De baixo para cima, divide*” demonstra ter entendido o processo de resolução da Situação 2 por meio da proporcionalidade simples, utilizando a operação de multiplicação ou divisão como sugerido nas Figuras 11 e 12, mas sem utilizar-se da linguagem matemática.

A partir dessa discussão, a pesquisadora retornou à proposta de resolução da Situação 2, por meio do escalar multiplicativo sugerido por Vergnaud (2009), com o objetivo de esclarecer as dúvidas dos participantes do grupo quanto à utilização do esquema e da operação utilizada para resolver a situação.

**Figura 12** – Retomada da proposta de resolução da situação 2 por meio do escalar multiplicativo



**Fonte:** Adaptado de Vergnaud (2009, p. 243, 247)

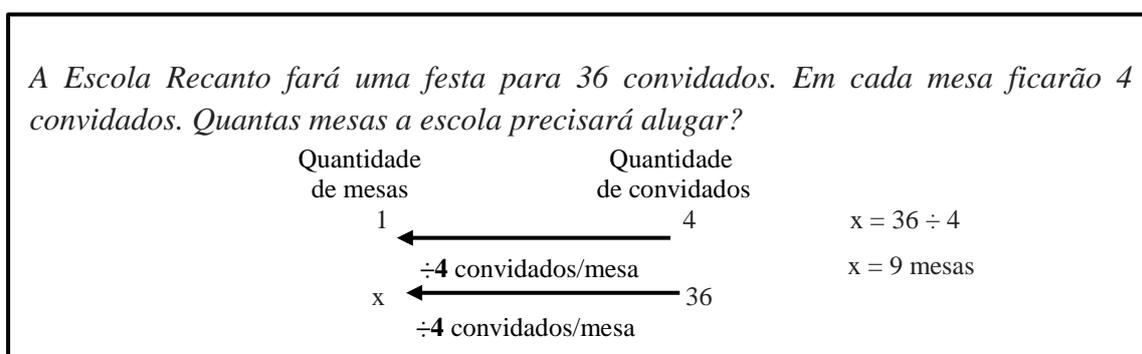
A estratégia utilizada na Figura 12 é considerada por Gitirana et al. (2014) como o uso da razão com a propriedade multiplicativa das proporções (ou dos isomorfismos) em que seu valor é encontrado ao se fazer a divisão, nesse caso, 20 por 10.

No que se refere a exemplos como a Situação 2 e sua resolução por meio do escalar multiplicativo, o estudante pode ter dificuldades em compreender como apareceram os “potes”, já que dividiram por “gudes” e obtiveram quantidades de “potes. Ou ainda, para ele entender que dividir 20 gudes pela taxa 10 gudes, por potes significam multiplicar pelo inverso dessa taxa.

Informamos ao grupo que, para o estudante, esse tipo de proposta de resolução torna-se difícil e que, para Vergnaud (1996), a apropriação de um campo conceitual multiplicativo demanda um longo período. Cabe à escola, portanto, segundo o autor, desenvolver um trabalho consistente que contribua para a apropriação desse campo já a partir do 2º ano do ensino fundamental, com a aplicação de situações elementares, preferencialmente as que envolvem o esquema de proporcionalidade simples em sua resolução, deixando claro a operação que deve ser utilizada.

Para esclarecimento das dúvidas explicitadas pelos participantes, relembramos também a utilização da relação funcional que fora apresentada na Formação OBEDUC/E-Mult, por meio de um exemplo de situação, conforme mostra a Figura 13, a seguir.

**Figura 13** - Situação utilizando a relação funcional como esquema para sua resolução



**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult.

Explicamos ao grupo que o valor encontrado na situação da Figura 13 é obtido pela divisão do total de convidados (36) pela quantidade de convidados por mesa (4). Isso pode levar o aluno a obter, primeiramente, um número e não a quantidade de mesas. Torna-se necessário que o professor dos anos iniciais atente para esse dado, ao utilizar a relação funcional que usa a taxa cujas grandezas (as duas) são correlacionadas, e Gitirana et al. (2014) esclarecem que isso pode justificar melhor a relação entre as grandezas envolvidas na situação.

Em suma, baseado nas contribuições de Ball, Thames e Phelps (2008), o conhecimento comum do conteúdo, o conhecimento especializado, o conhecimento do ensino e do estudante sobre a proporcionalidade simples, da categoria Isomorfismo de medidas estiveram presentes nas discussões geradas pelos professores nesse episódio, ao analisarem as duas situações, mas ainda de forma modesta. Em se tratando do conhecimento comum do conteúdo, as discussões apresentaram evidências de que os professores estavam tentando apropriar-se quanto à utilização dos esquemas de Vergnaud propostos na Formação OBEDUC/E-Mult para resolução de situações multiplicativas. No

caso da operação de multiplicação, pareciam ter compreendido com mais facilidade, mas encontraram dificuldades em relação a situação que envolvia a divisão com a ideia de quota. Nosso interesse nesse contexto, foi a continuidade dessas discussões, o que ocorreu nos tópicos que se referem ao processo formativo no interior do grupo de estudo, após o término dos encontros da Formação OBEDUC/E-Mult, descritos posteriormente no capítulo seguinte.

No próximo tópico, analisaremos dados de uma discussão gerada pela reflexão sobre o olhar do professor ao desempenho dos estudantes ao resolverem situações envolvendo as estruturas multiplicativas.

#### *4.2.1.3 Do grupo de estudos para a sala de aula e da sala de aula para o grupo de estudo: a prática em foco*

Neste encontro, foi proposto ao grupo, a análise de seis situações quanto à categoria sugerida para sua resolução. Essas situações foram elaboradas pelos professores e aplicadas a seus estudantes após um dos encontros da Formação OBEDUC que tratou sobre o tema proporcionalidade simples. O objetivo foi discutir o desempenho dos estudantes de um dos participantes do grupo que tinha concluído a atividade, quanto ao conhecimento da operação de multiplicação ou divisão. O restante do grupo ainda estava em processo de aplicação e correção das situações.

O primeiro momento foi destinado a apresentar as situações aplicadas, questionando os participantes quanto sua categoria conforme tinham vistos na Formação OBEDUC/E-Mult. Em seguida, em forma de uma tabela, reproduzida no Quadro 14, constando a quantidade dos acertos de cada uma delas pelos estudantes dessa professora, oportunizando, em seguida, a discussão sobre o ocorrido.

**Quadro 14** – Situações, categoria envolvida e quantidade de acertos

<b>Situações</b>	<b>Categoria</b>	<b>Acertos</b>
1° Um supermercado faz uma promoção: leve 4 litros de farinha por apenas R\$ 20,00. Quanto vai custar cada litro de farinha?	Divisão partitiva	<b>10</b>
2° Uma loja tem 16 carros. Sabendo que cada carro tem 4 rodas, quantas rodas têm os 16 carros?	Multiplicação	<b>14</b>
3° Sabendo que uma abelha põe 3 mil ovos por dia, em 5 dias, quantos ovos essas abelhas põem?	Multiplicação	<b>17</b>
4° João vende 5 litros de mel por dia. Quantos litros ele vende em 30 dias?	Multiplicação	<b>17</b>
5° Distribuindo os 3 mil ovos em oito colmeias, quantos ovos recebeu cada uma?	Divisão partitiva	<b>5</b>
6° Victor tem 5 colmeias que abrigam 80 mil abelhas. Quantas abelhas Victor abriga em cada colmeia?	Divisão partitiva	<b>5</b>

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A pesquisadora solicita que seja analisada a quantidade de acertos de cada situação

e questiona: *Quais as que tiveram maiores e menores acertos?* Após responderem, conforme o Quadro 14 apresenta, os professores verificaram que as situações 1, 5 e 6 são da categoria divisão partitiva. E questionou: *“Porquê a 1ª, a 5ª e a 6ª sendo de divisão partitiva, a 1ª obteve maior número de acertos que as outras situações com a mesma categoria?”*

Apresentamos, alguns dos depoimentos gerados nas discussões dos participantes do grupo de estudos sobre esses questionamentos.

*O número baixo [referindo-se à primeira situação] (professora Jamille).*

*Porque é mais fácil para dividir, por ser número pequeno (professora Rosa).*

*A quinta tem esse três mil (escrito) e o oito também está escrito e não o numeral 8. Isso pode ter dificultado o acerto (professora Jamille,).*

*Só o 3 [referindo-se à unidade de milhar da 5ª situação] e esquecer do zero. Eles vão perguntar: Tia como vou dividir 3 por 5? (completa a professora Alice).*

*O que aconteceu com meus alunos, eles resolveram, mas teve um deles que não conseguiu colocar o três mil. Tiveram essa dificuldade na divisão com números maiores (professora Raíssa).*

Diante desses depoimentos, podemos observar que os participantes do grupo possuem o entendimento do que os estudantes sabem sobre multiplicação e divisão e suas dificuldades em trabalhar os números com grandezas maiores. Apoiamo-nos em Bryant e Nunes (1997) para discutir com eles que, em se tratando de crianças dos anos iniciais, é importante atentar que elas podem dividir conjuntos em quantidades iguais usando o procedimento *um-para-mim, um-para-você* sem errar. Os autores apontam ser importante que o professor deve ter atenção ao trabalhar a categoria divisão partitiva, fazendo uma distinção entre distribuição e divisão.

Quando as crianças estão preocupadas com distribuir, elas se concentram sobre dar quantidades iguais a cada receptor. A invariável na *distribuição* é a correspondência termo-a-termo entre os conjuntos distribuídos. Na *divisão*, as invariáveis são mais complexas: elas se referem às relações entre o dividendo (o número que está sendo dividido), o divisor (o número no qual o dividendo está dividido) e o quociente (o resultado da divisão). Em uma situação de distribuição, focalizar problemas de divisão envolve considerar as relações, por exemplo, entre o número de doces a ser partilhado, o número de crianças que receberá o doce e o número de doces que cada criança receberá (BRYANT E NUNES, 1997, p.194).

Chamamos a atenção do grupo para o fato de que, trabalhar essas relações torna-se necessário para a aprendizagem dessa operação, nos anos iniciais e finais do ensino fundamental, ressaltando que precisamos saber se os alunos entendem que há uma relação inversa entre o número de receptores e o tamanho da quota.

Nesse grupo, o reconhecimento da dificuldade dos alunos em realizar os

procedimentos de cálculo para dividir ou representar uma divisão com números maiores e representados diferentemente da sua forma numeral, poderia se tornar um caminho para o repensar em estratégias que ampliem esse aprendizado na resolução de situações envolvendo a divisão.

Dando continuidade à análise dos dados investigados no próximo tópico, trataremos os episódios ocorridos com as discussões nas sessões de estudos em grupo referentes ao eixo Produto de Medidas, classe Configuração Retangular.

#### 4.2.2 Produto de Medidas: Configuração Retangular

##### 4.2.2.1 Discussões e reflexões a respeito do ensino do Produto de medidas – Configuração Retangular: algumas inferências sobre a prática docente

Algumas pesquisas no Brasil no âmbito da educação matemática, em específico nos anos iniciais do ensino fundamental, apresentam um cenário no qual se percebe que o professor, ao elaborar situações que envolvam a noção de *área*, utilizando-se da configuração retangular, aparece com resultados abaixo do esperado. Como exemplo, citamos Santos (2012, p.200), quando registra que “as situações envolvendo a ideia de configuração retangular praticamente não foram contempladas (apenas 1 em 71 situações)”. Em relação ao desempenho de estudantes na resolução de situações envolvendo esse mesmo tema, os resultados da pesquisa de Gitirana, Campos, Magina e Spinillo (2014), mostram que, dos 504 estudantes do ensino fundamental do 2º ao 9º ano (na época chamada de 1ª a 8ª série), em escolas públicas de São Paulo, só conseguiram algum êxito a partir do 4º ano e indo, no máximo, aos 36% de acertos do 5º ao 9º ano.

Diante desses fatos, consideramos como uma ação<sup>30</sup> do grupo de estudos a necessidade de discutir e refletir sobre a categoria *Produto de medidas* e, sobretudo, medida de *área*, utilizando-se da ideia de *Configuração Retangular*. No início, os professores argumentaram terem dificuldade para explorar esse conteúdo já durante a Formação OBEDUC/E-Mult. Os participantes do grupo de estudos, ao analisarem uma das ações teóricas (Vide Quadro 04) proposta no encontro da Formação OBEDUC/E-Mult, que era elaborar duas situações envolvendo o tema trabalhado, sendo um deles a Configuração Retangular (Vide Quadro 3 e Quadro 4), afirmaram:

---

<sup>30</sup> Essa ação está registrada no Quadro 3, no 3º encontro do grupo de estudos, posterior ao 6º encontro presencial da Formação OBEDUC/E-Mult

*Naquela situação, foi o tempo [referindo-se ao tempo proposto para elaboração de situações de configuração retangular – 10 minutos], em que a gente tinha que montar o problema, resolver, imaginar o nível do aluno para o qual vai ser aplicado. (professor Gerson).*

*Foi a mesma coisa, estávamos no mesmo grupo, discutindo as mesmas coisas, a situação do momento. Dez minutos pra poder elaborar uma questão, e passar, a gente já tirar a conclusão daquela atividade sem antes ter elaborado e apresentado para os alunos na sala. Fica difícil. Não posso pensar assim com a cabeça de 24 alunos. Tenho que pensar com a minha (professora Roberta).*

Notamos que os demais depoimentos tiveram essa mesma característica e entendemos que, nesse compartilhar, a dificuldade de um pode ser reconhecida como a da maioria. Nesse sentido, por meio da análise das reflexões explicitadas, é possível notar o reconhecimento de suas limitações profissionais para lidar com o ensino da configuração retangular por parte dos participantes. Isso também foi observado nos estudos de Santos (2012) e Souza Santos (2017). Os dois autores analisaram processos formativos nos quais eram discutidas questões relativas ao ensino das estruturas multiplicativas e verificaram que os professores investigados também encontravam dificuldades para pensar o ensino dessa temática. Souza Santos (2017), por exemplo, afirma ao analisar um episódio durante a sessão de formação, na qual os professores de sua pesquisa participavam.

O tema que Ana se refere [mencionando uma das participantes da formação] é o eixo Produto de Medidas, classe Configuração Retangular. A demora relatada foi porque, para fazer o Relatório 2, elas demoraram mais tempo que o de costume, solicitando aos professores formadores um maior tempo para responder a esse relatório. Note que a aplicação dessa situação tirou Ana da sua zona de conforto (SOUZA SANTOS, 2017, p.142).

Na nossa compreensão, a autora também observou que o grupo necessitou de um tempo maior para elaborar o relatório sobre o plano de aula para o trabalho em sala com as situações envolvendo a configuração retangular. Nesse sentido, analisando nossos dados iniciais e outros resultados de investigações, inferimos que tais situações não são tão comuns na prática pedagógica de professores que lecionam para os anos iniciais. Vergnaud (2009, p. 145) considera não menos importante o ensino de situações, na escola básica, envolvendo a categoria de *Produto de medidas*, pois os comprimentos, as áreas, os volumes, os pesos etc., são também medidas utilizadas na vida cotidiana.

Destacamos, ainda, o depoimento proferido pelo professor Gerson o qual demonstrou preocupar-se com a escrita da situação e com os conceitos matemáticos nela envolvidos.

*Quando a gente vai pra realidade, por exemplo: essa sala mede. Essa sala como? O solo da sala? A altura da sala? O teto da sala? Tudo isso vai influenciar. Foi isso que deixou a gente assim... nos questionando antes de aplicar uma atividade desta pro aluno. Que a gente tá quebrando a cabeça sobre o que é isso, imagine pro aluno. Isso eu observei muito à tarde, na hora de elaborar as questões. Quando se fala sala, é especificar cada coisa: sala, piso,*

*teto* (professor Gerson).

Esse professor chama a atenção do grupo para um problema que ele considera relevante quando se analisa situações cotidianas envolvendo o tema área, sobretudo a respeito da linguagem utilizada: certa confusão entre a bi e a tridimensionalidade. As discussões foram complementadas no grupo, pela pesquisadora, ao explicar que a área de uma superfície é encontrada com o produto de suas dimensões (comprimento e largura), apoiada na afirmação de Vergnaud (2009), no que tange ao cálculo da área de uma superfície por meio de uma disposição retangular, em que o autor considera que esse tipo de situação é formado por dimensão-simples (comprimento, largura) e que pode ser calculado de forma direta.

Em relação a esse episódio, as discussões e reflexões realizadas pelo grupo, também tiveram como referência estudos como os de Baltar (2014). A autora afirma que “um aspecto sutil na compreensão dos conteúdos do campo das grandezas e medidas são as questões terminológicas”, o que nos fez entender a reflexão do professor Gerson quando se refere à “área da sala”. Quando tomamos um objeto físico como uma sala, mesmo considerando tratar-se de um ambiente que possui três dimensões (comprimento, largura e altura) e queremos encontrar apenas a medida da área de uma superfície nesse ambiente, parece ser já institucionalizado que devemos considerar a figura retangular como o modelo matemático que corresponde a esse objeto e é comum darmos nomes especiais às suas medidas, sendo uma o comprimento (em geral a mais comprida) e, a outra, a largura (a menor). Tais denominações não podem ser esquecidas, embora sejam apenas convencionais. Assim, as dimensões das superfícies de uma sala – comprimento e largura – são objetos geométricos e devemos associar suas medidas à medida do piso ou da parede, ou do teto, se queremos encontrar a área da superfície. Assim, tem sentido a reflexão gerada pelo professor e sua preocupação na comunicação desses termos aos seus alunos.

Após as discussões, o grupo chegou à conclusão de que, quando o professor, ao encontrar em livros didáticos ou em outro material de ensino, por exemplo, o termo “área de uma sala”, poderá interpretar como a área de uma superfície plana dessa sala (em qual é a do piso). Baltar (2014, p.7) complementa tal pensamento quando afirma que é útil que o professor tenha em conta a ambiguidade presente nesse uso da linguagem.

Ao analisar os depoimentos desta subseção, entendemos que os participantes do grupo apresentam evidências de que estão refletindo sobre a prática, a partir de situações vivenciadas e analisadas por eles. Diante disso, concordamos com Zeichner (2008),

quando afirma que, quando instigamos a reflexão do indivíduo sobre a experiência vivida e tornando o professor como protagonista nesse processo, estamos contribuindo para que essa prática seja parte integrante no processo formativo-reflexivo, na realidade social do indivíduo.

Analisar o conhecimento para o ensino é de fundamental importância para compreendermos o processo de desenvolvimento profissional docente. Diante disso, trataremos desse tema no próximo tópico.

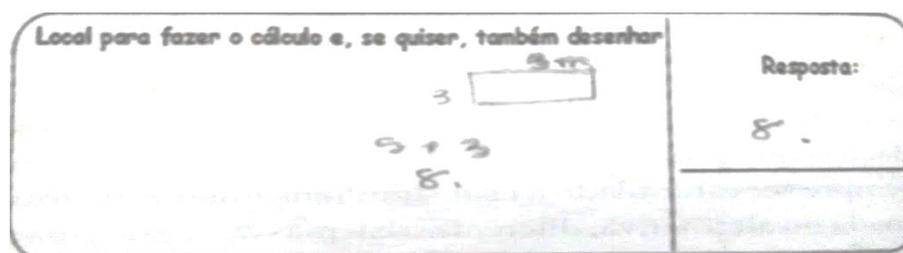
#### 4.2.2.2 Relação entre as diferentes categorias do conhecimento para o ensino da configuração retangular

Em continuação à análise dos depoimentos dos participantes do grupo sobre o conteúdo *área*, listamos em depoimentos trechos de discussões geradas na sessão de estudos que tratou da percepção dos professores sobre os esquemas dos estudantes utilizados para resolver situações envolvendo o conceito de área e perímetro de uma figura retangular.

Apresentamos ao grupo, situações e esquemas utilizados pelos estudantes em sua resolução, conforme mostram as Figuras 14 e 17, a seguir.

- *Situação 3: O piso da sala de aula da escola Divertida tem um formato retangular com 3 metros de largura e 5 de comprimento. Qual a área desse piso?*

**Figura 14** - Esquema 1 analisado pelos professores



**Fonte:** Gitirana et al. (2014, p.114).

*Ele botou como se fosse um retângulo. Botou um número em cima, sabia que era o comprimento, botou o outro número, sabia que era largura e depois somou. Tive um aluno hoje que fez isso (professora Janaína).*

*Também aconteceu isso com a maioria da minha sala. Fizeram assim. (professora Graça).*

A pesquisadora questionou sobre o que eles achavam desse esquema que o aluno usou. Se o aluno entendeu a pergunta da situação.

*Eu acho que não. Senão ele não faria assim (professora Graça).*

A pesquisadora questiona se eles observaram alguma coisa a mais no esquema 1.

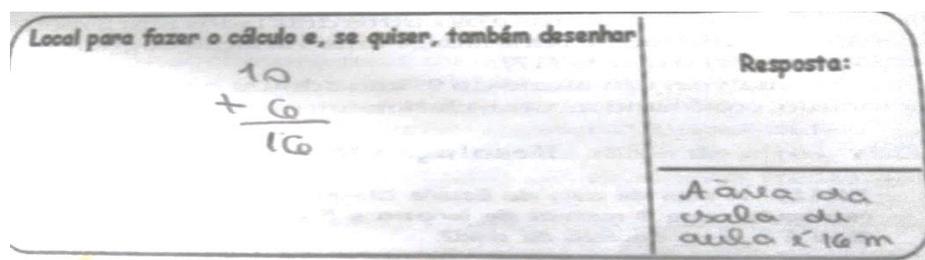
*Ele pensou só em somar (professora Janaína).*

*Como ele não sabe o que é área, ele pegou os dois números e somou apenas (professora Graça).*

Foi observado pelas professoras que o aluno reconhecia os termos comprimento e largura e as representava no desenho, mas equivocava-se ao calcular a medida da área.

Dando continuidade às discussões, apresentamos o Esquema 2.

**Figura 15:** Esquema 2 analisado pelos professores



**Fonte:** Gitirana et al. (2014, p.115).

A pesquisadora questiona como o aluno encontrou esses valores (10 e 6) e somou.

*Ele tirou 5 e somou, 5 + 5 é 10 e o 3 + 3 igual a 6 (professora Raíssa).*

*Isso mesmo, ele complementa e soma 5 mais cinco, 10 e 3 mais 3 igual a 6 (professora Graça).*

*Desse jeito não teve nenhum desses em minha sala (professora Janaína).*

*E nem na minha (professora Graça).*

A pesquisadora questiona se 16 representa a área.

*Na cabeça dele é (professora Janaína).*

A pesquisadora questiona o que seria área para eles.

*Eu acho que é tudo o que cobre a figura (professora Graça).*

A pesquisadora questiona como eles trabalham com seus alunos esse conteúdo, qual operação usa para resolver.

*Eu trabalhei a multiplicação, a largura pelo comprimento ou a altura pelo comprimento (professora Graça).*

A pesquisadora explica a diferença entre perímetro e área.

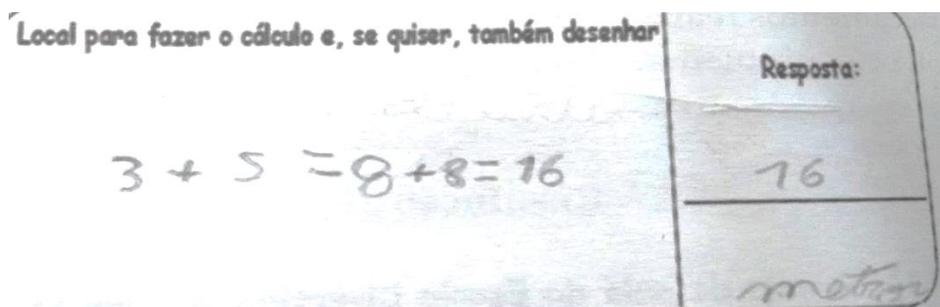
*Vocês detectaram isso, mas você acredita que o aluno tem consciência do que encontrou? Perímetro ou área (professora Janaína).*

*Acredito que não. Mesmo fazendo, ele pensa que fez outra coisa. Só estaria certo se eu pedisse qual o perímetro (professora Graça).*

Ao analisar o Esquema 2, as professoras reconheceram que, possivelmente, o aluno calculou o dobro do comprimento e da largura e confundiu-se calculando o

perímetro ao invés da área. Depois dessa análise, apresentamos o Esquema 3.

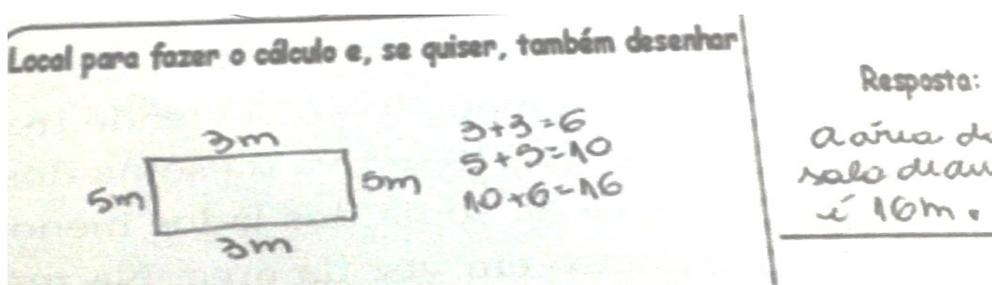
**Figura 16** - Esquema 3 analisado pelos professores



Fonte: Gitirana et al. (2014, p.116).

A professora Graça, em concordância com os demais professores, avaliou dizendo: *é parecido com os outros, mas aqui ele somou o comprimento pela largura, deu 8, pegou e somou mais 8 e deu 16.*

**Figura 17:** Esquema 4 analisado pelos professores



Fonte: Gitirana et al. (2014, p.116).

*Ele trocou a altura pelo comprimento. A maioria dos meus também fazem isso, trocam sempre. Ele não só trocou os valores, mas fez exatamente igual aos outros esquemas (professora Graça).*

*Então, para achar o perímetro, somam-se todos os lados (professora Alice).*

Em relação aos Esquemas de 1 a 4 apresentados nas Figuras 14, 15, 16 e 17, respectivamente, e analisado pelos professores, constatados o uso da adição para resolução da situação. Os participantes demonstraram o entendimento de área como o produto das dimensões do retângulo e verificaram que os alunos não resolveram a situação com esse entendimento.

*Os valores que os estudantes registraram em seus esquemas, referem-se a um outro conceito de geometria, o perímetro de um polígono, que é a soma dos seus lados, mesmo que eles não tenham explicitado a palavra perímetro de um polígono, o registro nos esquemas mostra esse conceito. O que vocês acham que aconteceu? (pesquisadora)*

Os depoimentos, *ele pensou só em somar e como ele não sabe o que é área, ele pegou os dois números e somou apenas*, mostram que as professoras Janaína e Graça

tiveram essa mesma compreensão e que, no fim, a professora Alice encerra a discussão com o depoimento: *então, para achar o perímetro, somam-se todos os lados.*

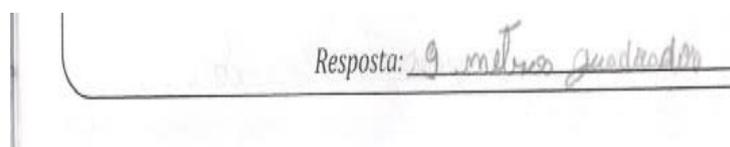
Entendemos, portanto, que na análise de esquemas do estudante, o professor demonstra ter ampliado o seu entendimento quanto ao ensino do tema envolvido na situação examinada. Torna-se, portanto, necessária à sua atenção ao que está inserido da informação encontrada nos esquemas registrados pelos alunos ao resolverem as situações propostas.

Aproveitamos o momento para ampliar as discussões do grupo acerca de alguns estudos que apontam que esses esquemas apresentados por Gitirana et al. (2014) são recorrentes. Apoiamo-nos em Clements e Stephan (2004), quando discute que, para a compreensão do conceito de *área* como medida de uma superfície com duas dimensões, pressupõe que os estudantes estruturam corretamente usando uma malha quadriculada e passem por uma série de níveis. Afirmam também que, quando esses níveis não são desenvolvidos, é comum o aluno confundir os conceitos de perímetro e de área. No fim do encontro, percebemos que esse estudo parece ter fortalecido o grupo em relação ao conhecimento do conteúdo e do estudante (Ball, Thames e Phelps, 2008).

Em seguida, apresentamos alguns protocolos dos alunos que responderam as situações antes do início da Formação OBEDUC/E-Mult, sem o uso de nenhuma estratégia ou procedimento de cálculos (Figura 18, 19 e 20). O objetivo era dar continuidade à análise dos participantes do grupo de estudo nesse tipo de situação que tratou do tema *área* da figura retangular, dadas as dimensões e questionando essa medida de superfície, em que o estudante só faz o registro da resposta.

- *Situação 4) Rute quer mudar o piso do quarto dela. Esse quarto tem 3m de largura e 6m de comprimento. Quantos metros quadrados, de piso, Rute precisa comprar.*

**Figura 18:** Esquema 5 analisado pelos professores



**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult.

Antes das discussões sobre o esquema do aluno, lembramos aos participantes sobre a configuração retangular como forma de resolver as situações envolvendo o conceito de área e a multiplicação das dimensões dadas na figura. Na Situação 4, não foi citado o termo “área” e sim foi questionada a quantidade de pisos que Rute precisaria comprar, apresentando as dimensões do piso de seu quarto.

6 metros de comprimento por 3 metros de largura (professora Graça).

Aí está buscando a área (completa professora Alice).

Gente, o comprimento é assim (mostrando o braço na horizontal)? (professora Alice).

Sim. O comprimento é na horizontal e a largura na vertical e largura é o mesmo que altura (professora Graça).

Quando falar de largura, lembrar que é o mesmo de altura (professora Janaína).

A gente “pega” a largura e multiplica pelo comprimento. Três vezes seis que dá 18 metros quadrados de piso (professora Graça).

A pesquisadora insiste no questionamento: o aluno aqui no protocolo escreveu (apenas escreveu) 9 metros quadrados. O que vocês acham que ele fez?

Ele também somou. Somou 3 mais 6 do mesmo jeito que vimos naquelas pesquisas que você falou (professora Graça): multiplicou o três vezes e somou com o seis [ $3 \times 2 + 6$ ] (professora Alice).

Em seguida, apresentamos o Esquema 6 para análise do grupo.

**Figura 19:** Esquema 6 analisado pelos professores

Resposta: 18 metros

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mul.

Ele encontrou direto 3 vezes 6, dezoito [ $3 \times 6 = 18$ ], calculou a área (professora Janaína).

Só faltou o metro quadrado (professora Alice).

Observando que o grupo reconheceu que o aluno pode ter utilizado a ideia de área, a pesquisadora apresenta o Esquema 7.

**Figura 20** – Esquema 7 analisado pelos professores

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 6 \\ \hline 18 \end{array}$$
 Resposta: ela precisa comprar 198 piso

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult.

Ele pensou certo, mas errou a multiplicação, ele multiplicou  $3 \times 6$ , subiu 1 e somou (professora Sintia).

Ele multiplicou e, como não viu mais nenhum número, somou o 18 com 1 e escreveu 19 (professora Janaína).

A seguir, a pesquisadora apresenta o Esquema 8, para análise dos professores.

**Figura 21** – Esquema 8 analisado pelos professores

Handwritten work showing two multiplication problems:  $3 \times 6 = 18$  and  $3 \times 6 = 18$ . Below them, the word "Resposta:" is followed by "28 metros quadrados".

**Fonte:** Dados da Programa OBEDUC/E-Mult.

Nesse caso, ele fez a multiplicação e a soma (professora Alice).

Na minha sala, eu fiz assim [a professora utilizou essa situação também para introduzir o conceito de área]. Usei o papel quadriculado e trabalhei primeiro com o comprimento e a largura na folha quadriculada, pra depois ir para a área. Quando foram trabalhar a área, conseguiram fazer. Quando foi para descobrir a parte dando o todo e uma medida, eles tiveram dificuldade (professora Jamile).

Em relação aos Esquemas das Figuras 18, 19, 20 e 21 apresentados aos professores, o que se percebe em seus depoimentos é o seu entendimento quanto às operações encontradas nas respostas, até de forma intuitiva, quando o estudante apenas apresenta a resposta sem os cálculos. No entanto, nada comentaram sobre os conceitos envolvidos na situação apresentada, com exceção da professora Jamile que aproveitou a discussão para citar a estratégia utilizada por ela ao introduzir o assunto “área” aos seus alunos.

Apresentamos outra situação com o tema *área*, dado o valor total e uma das dimensões (largura) para encontrar a outra dimensão (comprimento) e alguns esquemas utilizados pelos estudantes.

- *Situação 5) A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem  $24 \text{ m}^2$ . A largura é 4 m. Qual o comprimento em metros desse jardim?*

**Figura 22** – Esquema 9 analisado pelos professores

Handwritten work showing a division problem:  $24 \div 4 = 6$ . Below it, the word "Resposta:" is followed by "6".

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult.

A pesquisadora questiona: o que aconteceu aqui? Esse algoritmo está correto?

Esteticamente não (professora Alice).

Ele só não fez armar a conta (professora Janaína).

*A estrutura da divisão não, mas tá correto o que ele fez (professora Graça).*

*Na minha concepção, para ele é mais fácil fazer assim. Porque quando se monta o algoritmo da divisão, ele erra, pois tem que diminuir aqui [referindo-se ao procedimento de cálculo no algoritmo], para encontrar o resto (professora Janaína).*

**Figura 23** - Esquema 10 analisado pelos professores

The image shows a handwritten mathematical expression  $24 \div 4 = 6$  written horizontally. Below it, the word "Resposta:" is followed by the number "6". The entire work is enclosed in a hand-drawn rectangular box.

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult.

*Ele fez na forma horizontal, mas fez correto (professora Alice).*

*Faltou colocar o "L" para armar a divisão, mas fez correto (professora Graça).*

*Tem alunos que armam a operação, mas não chegam no resultado (professora Raíssa).*

Aproveitamos essa análise para discutir com o grupo sobre as diversas formas de cálculo. Discutimos que uma hipótese a ser levantada seria que o aluno resolveu mentalmente e registrou a operação e que o mesmo poderia ter ocorrido no esquema 10. Sobre esse fato, a professora Alice complementa: *é verdade, eu tenho alunos que não conseguem armar a conta, mas fazem ela de cabeça.* Com o objetivo de mostrar diferentes representações para a multiplicação, apresentamos aos professores o Esquema 11.

**Figura 24** - Esquema 11 analisado pelos professores

The image shows a handwritten mathematical expression  $04 + 80$  written vertically. Below it, the word "Resposta:" is followed by a blank line. The entire work is enclosed in a hand-drawn rectangular box.

**Fonte:** Dados da Programa OBEDUC/E-Mult.

*Ele colocou os tracinhos e queria chegar nos 24 tracinhos. Parou no 18 (professora Janaína).*

*Ele foi agrupando de 6 em 6 (professora Raíssa).*

*Porque 6 é o resultado e, mentalmente, ele foi agrupando e queria chegar no 24. Pra ele agrupar de 6 em 6, ele sabia que era 6 a resposta (professora Janaína).*

*Ele tinha ideia de que a operação era de divisão, só não fez a continha, registrou de outra*

*forma, como o autor chama mesmo [referindo-se a Vergnaud] ... representação (professora Raíssa).*

Ao analisar o Esquema 11, pareceu-nos que os professores reconheceram a ideia que estava presente nele. Aqui temos indícios de que a professora Raíssa preocupou-se em chamar a atenção para os termos utilizados pelo autor. Prosseguindo, apresentamos o Esquema 12.

**Figura 25** – Esquema 12 analisado pelos professores

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult.

*Nesse caso, ele não tem mesmo noção do que se trata o problema. Ele pega o primeiro número e soma com o segundo [24+4] (professora Janaína).*

**Figura 26** – Esquema 13 analisado pelos professores

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult.

*Nesse caso, ele pegou um pelo outro e multiplicou, 24 vezes 4. Ele sabia multiplicar, mas não tenho certeza se ele não sabia a divisão e, por isso, multiplicou (professora Janaína).*

*Se ele aprendeu só a maneira de multiplicar que é mais fácil (referindo-se ao produto das dimensões para encontrar a área), ele achou que todo problema de área tem que multiplicar (professora Jamille).*

Em relação ao Esquema 13, as duas professoras mostraram que reconheciam que o aluno sabia multiplicar, mas não compreendia a ideia que envolvia a situação. Para finalizar, apresentamos o Esquema 14 que, possivelmente, era o que elas esperavam.

**Figura 27-** Esquema 14 analisado pelos professores

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult.

| *Ele acertou, fez a divisão correta e encontrou o resultado* (professora Janaína).

| Todas as outras professoras concordaram, gesticulando de forma afirmativa.

Alguns depoimentos dos professores acerca dos esquemas por eles analisados chamaram a atenção em relação à escrita do algoritmo da divisão: *a estrutura da divisão não (está certa), mas tá correto o que ele fez. Para ele, é mais fácil fazer assim porque quando se monta o algoritmo da divisão, ele erra, ou ainda, ele fez, na forma horizontal, mas fez correto e faltou colocar o “L” para armar a divisão, mas fez correto.* Apenas o Esquema 14, na Figura 27, na visão de uma só professora (os outros concordaram com o que foi dito por ela, acenando positivamente com a cabeça) estava registrado corretamente o resultado: *ele acertou, fez a divisão correta e encontrou o resultado.* A professora Jamile, associou a operação ao conhecimento de área, quando afirmou: *ele achou que todo problema de área tem que multiplicar.*

Diante desse fato, Bryant e Nunes (1997) afirmam que é necessário o professor estabelecer relação entre os componentes do algoritmo da divisão, apesar da sua complexidade como, por exemplo,  $72 \div 8 = 9$ , em que 72 é o dividendo, oito é o divisor e nove o quociente, ou seja, existe uma relação entre o dividendo (72) e o divisor (8) e o quociente (9) como resultado dessa divisão. Entendemos, portanto, que a estrutura do algoritmo foi o detalhe considerado o mais importante na análise da maioria dos professores e não a relação entre os componentes do algoritmo. No caso em discussão, não foram encontrados, nos depoimentos dos professores (com exceção da professora Jamile), registros acerca de o aluno não ter conhecimento do conteúdo envolvido na situação e sim na operação realizada por meio do algoritmo. Com isso, observamos que as relações a que se referem Bryant e Nunes (1997) podem estar associadas ao conceito estabelecido na situação analisada, o que não se verificou nesse episódio.

Na capacidade de análise dos professores aos esquemas dos estudantes e de identificar, do ponto de vista matemático, os conceitos equivocados por eles ao resolver as situações, percebemos o seu *conhecimento especializado do conteúdo* e o *conhecimento do conteúdo e do estudante* defendido por Ball, Thames e Phelps (2008), e consideramos ser isso um aspecto importante na prática docente. Entendemos que, ao refletir sobre o que o estudante registra em suas respostas, o professor exercita uma ação contínua de conhecer diferentes estratégias e, ao analisar esses esquemas, o possibilita ao planejamento de novas ações para ampliação de seus conhecimentos para o ensino, com isso, a melhoria de sua prática.

No tópicos seguintes, analisaremos os depoimentos dos participantes do grupo ao aplicar as situações envolvendo o conceito de área, utilizando-se de uma estratégia discutida coletivamente no grupo de estudos.

Partindo do pressuposto que era de fundamental importância discutir questões relacionadas à prática pedagógica, propusemos, nessa mesma sessão de estudos, três atividades sobre o uso da malha quadriculada. Esse recurso seria utilizado como estratégia de introdução da ideia de *área de um retângulo*, uma vez que isso possibilitaria ao professor discutir com seus alunos sobre o produto entre duas dimensões em uma figura plana. Para isso, foi solicitado que os participantes analisassem como seus alunos responderiam uma atividade que envolvia a malha quadriculada – Figura 28. Para tanto, escolhemos atividades propostas no documento de apoio ao currículo de São Paulo – EMAI – Educação Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental.

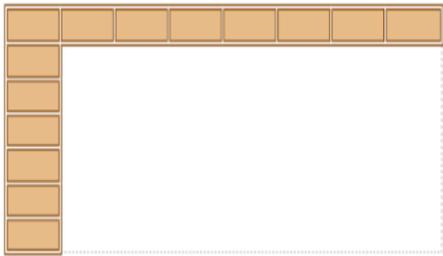
**Figura 28** - Atividade 1 apresentada aos participantes do grupo de estudo

*O desenho ao lado mostra um trecho de ladrilhamento de uma calçada em que foram colocados os primeiros ladrilhos.*

*a) É possível saber quantos ladrilhos serão usados no total?*

*b) Como você pode obter esse resultado?*

*c) Se você tivesse 36 ladrilhos, como poderia organizá-los para compor um ladrilhamento retangular?*



**Fonte:** EMAI – Educação Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental (2013, p. 90).

Segundo a atividade 1 da Figura 28, os itens *a* e *b* possuem o foco na proposição de uma situação que permite reflexões sobre o significado da multiplicação como configuração retangular, ao identificar quantos ladrilhos serão necessários para recobrir o espaço todo. Aproveitamos essa oportunidade para discutir com os professores a respeito da introdução ao ensino da Configuração Retangular.

Como era de se esperar, notamos que, já no primeiro momento, os professores, olharam profissionalmente para a situação, uma vez que procuraram prever as formas de contagem das crianças. Suas primeiras considerações já levavam em conta questões relativas, as possíveis estratégias de resolução dos estudantes e suas dificuldades, como mostram os depoimentos dos participantes do grupo de estudos, a saber.

*Eu acho que ele diria sim (referindo-se às letras a e b). Eles tentariam completar o desenho; um ou outro poderia até nos surpreender em fazer essa contagem, mas eu acho que, de início, eles iriam completar esses desenhos (professora Janaína).*

*Eles iriam completar o quadro e iam somar. Eles usariam a soma e não a multiplicação.*

(professor Gerson).

*Alguns dos meus alunos iam completar aqui a malha deles e iam contar[...]por um.*  
(professora Raíssa).

*Eles iam contar assim também e dizer quantos tinham. Eles não iam fazer multiplicando.*  
*Fazer esse vezes esse. Eles iam somar* (professora Graça).

No geral, observamos nos depoimentos formalizados pelos professores, que os seus alunos reconheceriam ser possível fazer a contagem dos ladrilhos respondendo a letra a. Para tanto, consideraram que completariam o quadro que compõe a malha quadriculada utilizando-se da contagem, um a um. Nesse momento, inspirados em Fosnot e Dolk (2001), promovemos uma discussão com o grupo sobre as diferentes estratégias que poderiam ser utilizados nessa contagem: contagem um a um (referenciada por eles); adição das parcelas (considerando as parcelas ou o comprimento, ou a largura) e a multiplicação. Discutimos a mudança do grau de complexidade em cada estratégia.

A segunda parte da atividade (letra c) propõe o contrário, que os participantes verifiquem o que seus alunos responderiam acerca da possibilidade de organizar um total de 36 ladrilhos na forma retangular. Para isso, possivelmente, os alunos teriam em mente, a proposta do uso de uma malha quadriculada para resolver essa parte da atividade já que os itens anteriores remetiam a ela. Algumas respostas dos participantes em relação aos seus alunos poderiam ser: seis fileiras de seis ladrilhos em cada uma; quatro fileiras de nove ladrilhos (ou nove fileiras de quatro ladrilhos cada); duas fileiras de 18 ladrilhos cada (ou 18 fileiras de dois ladrilhos cada); uma fileira de 36 ladrilhos (ou 36 fileiras de um ladrilho cada). Consideramos importante a análise dessas possibilidades, pois 36 é o resultado de várias multiplicações entre dois números.

No entanto, quando questionados sobre a resolução da situação pelos seus alunos, os professores foram unânimes em afirmar que as crianças não a responderiam com correção. Isso posto, questionamos como os próprios professores resolveriam esse item e observamos que as respostas dadas não foram imediatas.

A professora Janaína, inicia as discussões propondo que os 36 ladrilhos pudessem ser organizados apenas na forma quadrada seis vezes seis, resposta aceita pelos demais participantes. Insistimos indagando outras formas de representação da figura retangular formada pelos 36 ladrilhos. Após algum tempo, a professora Graça sugere “nove vezes quatro” e, assim, os outros professores começaram a apresentar outras possibilidades, como o 2 vezes 18, 12 vezes 3, gerando também outro questionamento do professor Gerson: *será que meu aluno chegaria a isso?*

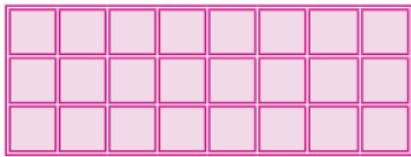
Nesta discussão específica, os professores mostram que, a dificuldade também era deles de encontrar outras formas de organizar um produto de dois algarismos cujo resultado fosse 36 e a pergunta feita pelo professor Gerson suscitou no grupo outra discussão sobre procedimentos de ensino.

Para esse propósito, analisamos outra situação, que também se tratava de procedimentos de cálculo na malha quadriculada – Figura 29.

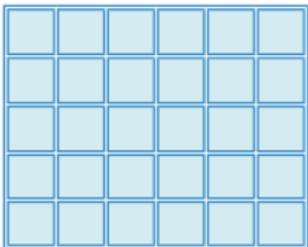
**Figura 29** – Atividade 2 apresentada aos participantes do grupo de estudo

Para calcular quantos ladrilhos foram usados em algumas paredes representadas pelos desenhos abaixo, Beatriz fez os seguintes cálculos:

A)



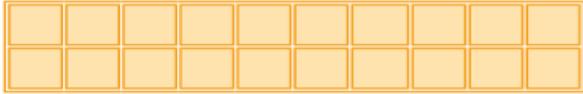
$8 \times 3 = 24$

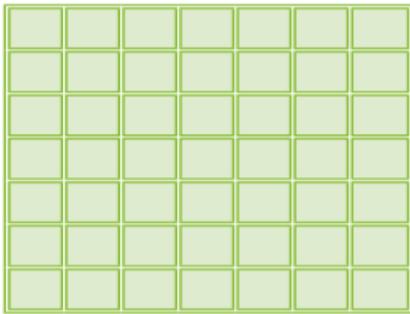


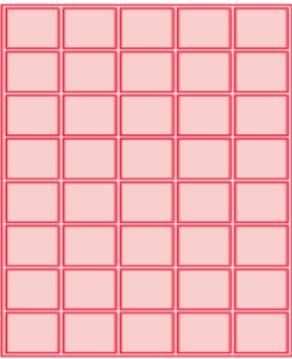
$6 \times 5 = 30$

Calcule o número de ladrilhos em cada parede desenhada abaixo:

B)







**Fonte:** EMAI – Educação Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental (2013, p. 91)

Propusemos a Atividade 2, da Figura 29, que tem como objetivo analisar o procedimento utilizado por Beatriz para calcular a quantidade de ladrilhos que foram usados para revestir duas paredes retangulares representadas por desenhos em malhas quadriculadas (letra A). Em seguida, calcular o número de ladrilhos de várias paredes também representadas na forma retangular (letra B). Essa proposta apresenta a multiplicação de números naturais em sua configuração retangular com o objetivo de

retomar escritas multiplicativas, por meio das malhas quadriculadas. O propósito, portanto, dessa atividade ao ser aplicada aos alunos, é favorecer que eles possam relacionar duas formas que representam a multiplicação: a configuração retangular e a escrita numérica correspondente. Diante da Atividade 2 proposta, os professores discutiam a forma como seus estudantes responderiam. Segundo a professora Janaína,

*Acho que eles não vão ter dificuldades não, pois eles têm o exemplo lá de cima, e eles vão percebendo o que precisa ser feito nos outros. Quando eles associam para chegarem a um resultado, fica mais fácil. Você vê a diferença deste para a letra C do anterior [referindo-se à atividade proposta no Quadro 13]. Na letra C do anterior, eles vão ter que fazer, nesse tem o modelo para eles associarem (professora Janaína).*

Aproveitamos o depoimento da professora Janaína para discutir com o restante do grupo a questão de apresentar um modelo pronto para o aluno. Chegamos à conclusão de que esse não seria o caso, chamando a atenção do grupo para a necessidade de o professor, durante suas aulas, promover a troca de informações entre os alunos sobre as diferentes estratégias utilizadas por eles e levá-los a avançar nesse processo. A introdução do conceito do Produto de Medidas exige passar por um processo exploratório que promova o avanço das estratégias. Estudos de Fosnot e Dolk (2001) chamam a atenção para a necessidade de o professor, quando propõe situações problemas para essa temática, ir além da diversidade do contexto. É necessário, também, que estructurem a multiplicação de forma progressiva, começando a organizar objetos com o mesmo cardinal e avançando para situações relativas a grupos de objetos por meio dos quais se associe uma disposição retangular. Por exemplo, ao quantificar os comprimidos em uma cartela, verificar a quantidade de frutas organizadas em uma caixa, ovos em um tabuleiro, entre outros.

Na situação apresentada na Figura 29, o modelo está pronto (letra A). Discutimos que o ideal seria que os estudantes fossem experimentando e chegassem à multiplicação como uma forma mais rápida de cálculos. A atividade 2 poderia ser apresentada aos alunos, depois da experimentação. Nesse momento, acreditamos que uma possibilidade de intervenção seria oferecer uma malha quadriculada para que os estudantes desenhassem as diferentes possibilidades, por entendermos que o trabalho com a configuração retangular, além de possibilitar a compreensão dos fatos fundamentais da multiplicação, irá contribuir também para a construção do algoritmo e o entendimento de suas propriedades, assim como da noção de área de figuras planas retangulares.

A esse respeito, encontramos evidências de que o conhecimento de alguns conceitos geométricos ainda não estava totalmente consolidado na prática dos participantes do grupo de estudos, uma vez que a resposta para as possibilidades de

configurações retangulares que utilizassem 36 ladrilhos não foi imediata. Isso reforça outros resultados de pesquisa, como o de Silva (2011) quando, ao explorar esse tema com seus professores desse mesmo nível de ensino, percebeu que as suas maiores dificuldades ligadas à prática eram oriundas dos conceitos geométricos que estavam vinculados ao conteúdo a ser trabalhado.

Ball, Thames e Phelps (2008) descrevem que o *conhecimento do conteúdo e dos alunos* é aquele que articula o conhecimento dos conteúdos com o conhecimento sobre os alunos referente a esse conteúdo. Observamos que, apesar de ser notória a preocupação dos professores com o que seus estudantes teriam em mente para responderem a atividade proposta, seu conhecimento também poderia estar limitado, no que se referiu à letra c da Atividade 1 por não ter em mente, naquele momento, todas as possibilidades da obtenção de um produto igual a 36.

Nessa sessão de estudos, os professores descreveram, baseados na sua prática, que a Atividade 1 – Figura 28 – seria resolvida pelos alunos por meio da contagem dos ladrilhos e não pela multiplicação das dimensões, como afirma a professora Graça. *Eles não iam fazer multiplicando. Eles iam somar* e o professor Gerson: *eles usariam a soma e não a multiplicação*. Daí a necessidade de o professor possibilitar ao seu estudante um repertório de conhecimentos sobre outros esquemas de resolução para resolver novas situações, como sugere Gitirana et al. (2014), e ser possível o professor oferecer situações que permitam a seus alunos consolidar conhecimentos, estendê-los, perceber seus limites e superar eventuais dificuldades.

Analisando este tópico, observamos que os professores, ao discutirem sua prática em grupo, percebem alguns pontos em comum que ainda precisariam ser trabalhados para favorecer o aprendizado da matemática em todos os seus aspectos. A esse respeito, corroboramos com Serrazina (1999) quando ela considera que o comportamento do professor é também influenciado pelo seu conhecimento do conteúdo matemático a ser ensinado, como os alunos devem aprender ou compreender esse conteúdo e ainda os seus mecanismos de ensino. Isso se torna, para a autora, uma característica do desenvolvimento profissional do professor.

#### *4.2.2.3 Do grupo de estudos para a sala de aula e da sala de aula para o grupo de estudo: a prática em foco*

Depois de sugerida a utilização de uma atividade da malha quadriculada como estratégia para o ensino da configuração retangular e introdução do conceito de área de

um retângulo, os professores organizaram a aplicação das Atividades 1 – Figura 28 – e Atividade 2 – Figura 29 – com suas turmas na forma e no tempo escolhidos por eles. O grupo de estudos reuniu-se, em seguida, conforme descrito no Quadro 3, com o objetivo de discutir e refletir acerca dessa aplicação.

Nos depoimentos apresentados, a seguir, mostramos a descrição do que ocorreu na sala de aula da professora Graça e as discussões geradas a partir das suas reflexões sobre essa prática. Nosso principal interesse neste tópico é expor e analisar o relato dos professores, em relação ao que foi observado durante a aplicação de uma atividade introdutória ao tema Configuração Retangular. Dentre os depoimentos gerados na sessão de estudos, escolhemos para análise os seguintes:

*Tudo que foi trabalhado conosco aqui, (referindo-se ao ocorrido e relatado no item 5.2.2.2) eu também fiz pra eles, do mesmo jeito, a mesma coisa. Trabalhei com eles direitinho (referindo-se à letra c da Atividade 1) [...] cada um encontrou. Perguntaram, professora tá certo? Eu dizia tá, mas a maioria deles encontraram  $6 \times 6 = 36$ . Eu expliquei tudo, passo a passo, inclusive dizendo a eles que esse valor era para o quadrado, pois tinha quatro lados iguais. Mas que tinha outras maneiras para encontrar o 36 (professora Graça).*

Nesse episódio, relatamos um tipo de situação originada em uma sessão de estudos na qual a professora Graça reproduziu em sala de aula a mesma estratégia utilizada pelos participantes para resolver a questão c, da Atividade 1, descrita no item anterior. A professora percebeu a dificuldade dos alunos para encontrar as diferentes formas de representação dos 36 ladrilhos dispostos em forma retangular que, na sua maioria, foi pensada em apenas  $6 \times 6$  (seis vezes seis). Por ser a última sessão de estudos do ano e, entendendo tratar-se de uma estratégia qual os participantes do grupo de estudos poderiam utilizar posteriormente, para introdução ao ensino de área do retângulo, por meio da configuração retangular, não foi possível uma discussão mais apurada a partir do que foi relatado sobre o comportamento de todas as turmas dos professores, diante da aplicação das Atividades 1 e 2.

Dando continuidade, a professora Graça avaliou o desempenho dos seus alunos quanto à resolução das situações elaboradas<sup>31</sup> no encontro da Formação OBEDUC/E-Mult, tendo como tema o eixo Produto de medidas e a classe Configuração Retangular. A participante do grupo mostrou seu descontentamento com o resultado de suas turmas<sup>32</sup>, gerando discussões e reflexões sobre a diferença de desempenho dos estudantes nas

<sup>31</sup> Situação 1: Se a janela de nossa sala de aula medisse 2m de altura e 3m de comprimento. Qual o valor dessa área? Situação 2: O telhado de uma cozinha tem 22 fileiras, com 18 telhas em cada fileira. Quantas telhas foram usadas para cobrir a cozinha? Situação 3: O piso do refeitório de uma escola é retangular e tem  $42\text{m}^2$ . A largura é 7m. Qual o comprimento do piso desse refeitório?

<sup>32</sup> Desempenho da turma: Situação 1: 25 acertos e 4 erros; Situação 2: 18 acertos e 11 erros e Situação 3: Nenhum acerto, 27 erros e 2 em branco.

situações elaboradas no encontro formativo e na resolução das Atividades 1 e 2 – malha quadriculada – aplicada por ela.

*Minha decepção foi aí, depois desse trabalho todo, fazendo tudo bonitinho que eles fizeram, quando chegou na hora do problema (referindo-se às duas situações que os participantes da Formação OBEDUC/E-Mult precisavam aplicar e obter o desempenho das turmas, para apresentação no próximo encontro), foi totalmente diferente do que eu queria que eles acertassem mais (professora Graça).*

O grupo posicionou-se a respeito do descontentamento da professora. A colega Jamile comentou acerca dos seus alunos:

*Eu acho, o que eles têm é a questão. Aqui já está o desenho [referindo-se ao fato de que a situação apresentada na Atividade 1, na malha quadriculada, não está no formato de situação], eles só fazem contar (professora Jamile).*

Nesse diálogo nota-se que a professora Jamile dá indícios de que, sob seu ponto de vista, seus alunos compreendiam que bastaria a contagem dos quadradinhos na malha para resolver a atividade, tornando-se mais fácil para eles obterem o resultado e não sentiam a necessidade de realizar a leitura e interpretação da situação. A pesquisadora, por conhecer o desempenho da turma da professora Graça e os esquemas encontrados nos protocolos, argumentou:

*Eu percebi o que aconteceu [referindo-se ao fato de que, em um momento anterior, analisou os protocolos com a professora]: a operação de adição por parte dos seus alunos não apareceu como esquema para resolver os probleminhas. Apareceu só a multiplicação. (pesquisadora)*

A professora Graça concorda afirmando:

*Não, quanto a isso não [referindo-se ao fato de os seus alunos não terem resolvido as situações por meio da adição e sim pela multiplicação] (professora Graça).*

A discussão continua quando a pesquisadora pergunta:

*Você acha que aconteceu o quê, a partir disso daí? (referindo-se à aplicação da atividade com a malha quadriculada que a professora fez com eles). Pense. (pesquisadora).*

A professora Graça responde:

*Eu queria que eles acertassem [as duas situações aplicadas], mas como você falou, eles não somaram, multiplicaram, mas não acertaram (professora Graça).*

Em continuação, a pesquisadora chama a atenção sobre a importância do trabalho que a professora Graça tinha realizado com a sua turma, quando a questiona mais uma vez.

*Mas será que não associaram a ideia da área com a multiplicação? Isso já não é um avanço? (pesquisadora);*

A professora Graça concorda afirmando:

*É! Esse que é o problema. O que eles não sabem, então, é a operação multiplicação (professora Graça).*

A pesquisadora continuou insistindo com o grupo quanto a esse entendimento, quando

afirma.

*Exato, mas, caso tenham feito a associação da ideia de área com a operação de multiplicação, então, esse entendimento por parte desses alunos não significa um avanço em seu aprendizado?* (pesquisadora).

Ainda assim, a professora Graça continuava insatisfeita com o resultado de sua turma, quando afirma. *Mas eu queria que eles acertassem* (professora Graça).

A pesquisadora, então, reforça que os alunos da professora Graça passaram por essa etapa, ao demonstrar o entendimento da operação escolhida para resolver as situações propostas por ela, quando afirma: *e os seus alunos, professora Graça, quando lhes foi apresentado esse tipo de situação (área), pensaram na operação multiplicação. Foi um avanço* (pesquisadora).

Finalmente, a professora Graça expressou estar satisfeita com esse resultado, quando afirmou: *é verdade* (professora Graça).

Esse episódio nos fez refletir com o grupo sobre o fato de que nem sempre os resultados de uma avaliação mostram os avanços no processo de aprendizagem dos alunos e que é necessário verificar os esquemas que eles apresentam ao resolverem situações e se tais esquemas representam algum avanço quanto à construção do conceito.

Nesse sentido, Vergnaud (1998) afirma que o esquema que o estudante utiliza para resolver uma situação é composto das invariantes operatórias, as quais o autor define como um *teorema em ação* e um *conceito em ação*. O autor define o *teorema em ação* como relações matemáticas que são levadas em consideração pelos estudantes quando eles escolhem uma operação ou sequência de operações para resolver um problema. No caso dos estudantes da professora Graça, ao utilizarem a operação de multiplicação para encontrar a solução das situações envolvendo a *área*, após a aplicação da estratégia do uso de uma malha quadriculada, leva-nos ao entendimento dessa etapa do processo de aprendizagem dos estudantes dessa professora em relação à Configuração Retangular.

No nosso entender, quando a professora Graça afirma: *eles não somaram, multiplicaram*, seus estudantes demonstraram um avanço na compreensão da operação a ser utilizada para resolver a situação, diferentemente do que ocorreu no momento da aplicação das situações envolvendo *área de uma figura retangular*, quando ainda não dispunham de um repertório suficiente de informações que permitissem realizar suas resoluções com correção. Ao planejar uma estratégia que poderia levar a maioria de seus alunos ao acerto das situações propostas, a professora Graça mostrou-se decepcionada ao declarar que o desempenho da turma foi insatisfatório, levando em consideração apenas suas dificuldades para desenvolver o algoritmo da multiplicação, apresentando indícios de que o entendimento do domínio dos conceitos de multiplicar e dividir dos seus alunos residia, fundamentalmente, em operar corretamente os algoritmos dessas operações.

As discussões realizadas pelo grupo de estudos nesse episódio, possivelmente a levaram a uma (re)leitura do que havia ocorrido, uma vez que os alunos dessa professora compreendiam a ideia da multiplicação presente na Configuração Retangular, porém, apenas não estavam utilizando o algoritmo com correção. A esse respeito, Vergnaud (1996) afirma que as competências dos estudantes na resolução de situações surgem na escolha certa dos dados e das operações. Entendemos, entretanto, que isso não exclui a necessidade de o professor desenvolver propostas para trabalhar os procedimentos de cálculo escrito<sup>33</sup>.

Outro momento de reflexão nessa sessão de estudos ocorreu durante as discussões acerca do depoimento da professora Jamile.

*Eu apliquei anteriormente as duas questões no quadro (referindo-se às que foram elaboradas na Formação OBEDUC/E-Mult). Dei a malha quadriculada, pra eles tentarem responder, olhando as questões pela malha, entendeu? Aí, dando aula sobre comprimento, largura, pra eles verem a diferença: o comprimento na horizontal, e a largura ou a altura na vertical. E aí, através disso, a gente foi trabalhando o conceito de área em relação aos probleminhas (professora Jamile).*

Analisando o ocorrido, é possível perceber que professora Jamile apresentou indícios de que percebia que seus estudantes compreenderam os procedimentos a serem utilizados nas situações propostas e que isso facilitou a compreensão deles sobre a noção de área de uma figura retangular.

Em continuação às discussões nessa sessão de estudos, a professora Raíssa apresentou para o grupo outras estratégias utilizadas por ela para o ensino de medidas na sua forma introdutória.

*Levei uma régua normal, falei da medida do lápis, aí mostrei a fita métrica que tinha um metro, falei da utilidade dela, para medir tecidos. [...] Para trabalhar a multiplicação e a divisão, peguei umas caixas de ovos vazias, pintei de cores diferenciadas, azul, vermelha, amarelo. (...) como a caixinha vem com 30 ovos, aí a gente contou, fez a divisão, mostrei pra eles como era a divisão [referindo-se à quantidade de gomos de cada coluna]. Usei um tabuleiro também de multiplicação, levei, coloquei no quadro lá na parede. Mostrei como era a multiplicação e que era o inverso da divisão. Fiz a multiplicação, depois a divisão. Mostrei tudo direitinho (professora Raíssa).*

Nesse episódio, observamos a disponibilidade da professora Raíssa em ir para além da descrição do desempenho dos seus alunos, ao utilizar a malha quadriculada como material de apoio. Ela apresentou indícios de que detectou ser necessário explorar algumas noções básicas sobre: o ato de medir, medidas de comprimento, antes de trabalhar com a medida de superfície – *área*. Para tanto, buscou levar para a prática da sala de aula, materiais como caixa de ovos e tabuleiro da multiplicação para explorar os

<sup>33</sup> O grupo mostrou interesse em retomar esse episódio no próximo ano, com a proposta de se discutir estratégias para trabalhar com o procedimento de cálculos com suas turmas. Isso foi acordado por todos como uma das primeiras ações nas próximas sessões de estudo.

conceitos necessários da Configuração Retangular para o aprendizado eficaz de seus alunos. Atividades similares àquelas que a professora Raíssa propôs aos seus alunos, são vistas em pesquisas de Fosnot e Dolk (2001) para o trabalho com as operações matemáticas, pois os autores entendem que “contar de *um em um* não é multiplicar” e afirmam que a “forma progressiva das estratégias de contagem de *um em um*, ao uso da multiplicação atravessa vários estágios do desenvolvimento”. Com isso, entendemos que a professora Raíssa percebeu a necessidade de desenvolver esses estágios com seus alunos, antes de trabalhar o conceito de área de uma figura retangular. Fosnot e Dolk (2001) complementam esse entendimento ao afirmar que à medida que as crianças investigam contextos multiplicativos, sua estratégia de contagem de *um em um* torna-se ineficiente e, assim, constroem maneiras melhores de manter o controle sobre essa situação. Nesse caso, ao se utilizar da malha quadriculada, elas encontram uma forma mais simples de resolver atividades com o tema área de uma figura retangular.

A análise dos depoimentos gerados nas discussões do grupo de estudos nessa sessão gira em torno da utilização da malha quadriculada como estratégia para introdução ao conteúdo *área*, a partir do entendimento da Configuração Retangular. Resumindo, recortes de dois dos depoimentos apresentados como: *tinha outras maneiras para encontrar o 36* (professora Graça) e *mostrei como era a multiplicação e que era o inverso da divisão* (professora Raíssa) apontam para um conhecimento especializado dos professores acerca das propriedades da multiplicação e o conhecimento a ser explorado pelos seus estudantes para resolverem as situações propostas.

A utilização da malha quadriculada gerou, nesse grupo, diversas reflexões sobre o aprendizado da multiplicação e suas propriedades e, com isso, o conceito de área não foi a único a ser explorado pelos participantes do grupo de estudos, ao se utilizarem dessa estratégia de ensino.

Por outro lado, percebemos que expressões utilizadas pela professora Raíssa, como “levei”, “falei”, “mostrei”, “coloquei”, “fiz” nos leva ao entendimento de que o protagonismo do ensino na aula relatada estava centrado na professora e não no aluno e que suas concepções estavam longe dos princípios defendidos pela tendência pedagógica construtivista ou socio culturalista como denominada por Fiorentini (1995)<sup>34</sup>.

---

<sup>34</sup> Fiorentini (1995), descreveu alguns modos historicamente produzidos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil. Identificou, por meio de algumas categorias, seis tendências: a formalista clássica, a empírico ativista, a formalista moderna, a tecnicista e suas variações, a construtivista e sócioetnoculturalista.

No próximo tópico, analisamos os depoimentos dos participantes do grupo de estudo quanto ao seu retorno ao último encontro da Formação OBEDUC/E-Mult.

#### 4.2.2.4 *Dos estudos no interior do grupo para a Formação OBEDUC/E-Mult*

No último encontro da Formação OBEDUC/E-Mult (Vide Quadro 3) foi tratado o eixo Produto de medidas e suas classes: Combinatória e Configuração Retangular. Após a apresentação dos relatórios de forma oral e escrita das atividades desenvolvidas sobre o tema, foi propiciado uma avaliação das suas ações formativas.

Reiteramos que, em cada encontro presencial, os participantes por ano escolar, relatavam experiências quanto à aplicação das situações elaboradas pelos professores, suas estratégias utilizadas, o desempenho das suas turmas e como foram trabalhados os erros dos alunos em relação ao tema proposto no encontro anterior.

Apresentamos, neste tópico, os depoimentos transcritos dos professores que participaram da Formação OBEDUC/E-Mult e do grupo de estudos, concomitantemente, com o objetivo de analisar as reflexões geradas e explicitadas nesse encontro, após a aplicação das situações e avaliar o uso da malha quadriculada como estratégia de ensino do tema trabalhado.

As professoras Raíssa e Graça, representando os 3º/4º anos e 5º/6º anos, respectivamente, fizeram sua apresentação oral para o grupo de professores participantes da Formação OBEDUC/E-Mult. Escolhemos depoimentos que remetiam ao que fora trabalhado nas sessões do grupo de estudo.

*A dificuldade que vocês tiveram com os seus alunos [referindo-se aos outros professores que não fizeram parte do grupo de estudos, que anteciparam a fala da professora e apresentaram as dificuldades que tiveram em trabalhar o ensino da Configuração Retangular] não foi o meu caso, nem o de Raíssa nem o de Jamille, porque, no caso de vocês, não puderam participar do grupo [referindo-se ao grupo de estudo] por não terem carga horária para estar. No meu caso, eu precisei colocar também alguém no meu lugar para dar aula pra mim, para poder participar do grupo (professora Graça)*

*E valeu a pena, foi muito bom participar dele que, a partir do próximo ano, eu vou estar aposentada, mas como eu sou apaixonada por matemática, eu vou continuar no grupo de estudo e ajudar na continuação dele. Esse trabalho (referindo-se à malha quadriculada), a pesquisadora fez conosco. Tudo que ela trabalhou conosco, eu, Raíssa e Jamille trabalhamos com nossos alunos. Eu fiz isso em cinco aulas. Na hora de eu cheguei no assunto (área), foi bem mais fácil (professora Graça).*

Apesar de todos os professores participantes da Formação OBEDUC/E-Mult relatarem o mecanismo de intervenção para trabalhar a Configuração Retangular, com seus alunos, a afirmação da professora Graça sobre a atividade da malha quadriculada apresentou indícios de ter sido relevante em detrimento das outras estratégias utilizadas e explicitadas por eles.

A atividade da malha quadriculada proporcionou aos participantes do grupo de estudos (conforme o depoimento da professora Graça) uma ação prática que, ao trabalhar com suas turmas como estratégia de ensino da Configuração Retangular, contribuiu para que seus alunos não vivenciassem as mesmas dificuldades que foram explicitadas pelos professores dos anos escolares que não participaram das sessões de estudos, ao resolverem situações com esse tema.

Dando continuidade aos relatos, foi solicitado aos participantes que explicassem se houve diferença entre a atividade planejada descrita pelos professores no Relatório 1<sup>35</sup>, no encontro anterior, e a atividade desenvolvida e registrada no Relatório 2<sup>36</sup> quanto à aplicação das situações. A professora Graça continua seu relato, juntamente com a professora Raíssa.

*No meu caso houve, porque eu nunca trabalhei assim como trabalhei agora, eu explicava, tudo mais, era totalmente diferente, eu nunca levava algo pra que eles fizessem. Então, pra mim foi diferente (professora Graça).*

*O meu caso foi diferente do seu [referindo-se ao depoimento da professora Graça], no dia que eu estava para fazer essa atividade, eu tive que fazer a prova de recuperação para quem perdeu. Eu dividi a sala em dois grupos e em um grupo eu apliquei a prova de recuperação e no outro eu dei essa atividade (referindo-se à da malha quadriculada), mas eu não fiz intervenção nenhuma, eu só dei a atividade. E aí eles perguntavam e eu respondia como fazia, você conta aqui, altura e largura e faz a adição ou a multiplicação (professora Raíssa).*

Esse momento nos faz perceber a diferença entre as duas professoras, no ato de aplicação das situações, antecipado com uma estratégia que favorecesse a sua resolução e o aprendizado do tema envolvido. Para a professora Graça, foi importante o fato de levar para a sala de aula uma atividade exploratória de um conceito (no caso, *a área*) e reconhecer da importância disso ao refletir sobre a sua prática. E, por motivos relatados pela professora Raíssa, relacionando a atividade da malha com a aplicação das situações com sua turma, ela não teve a oportunidade de fazer a intervenção antes da aplicação.

Em continuação aos relatos, a professora Graça explicou sobre os esquemas utilizados pelos alunos para responder as situações propostas.

*(Referindo-se à Situação 1: Se a janela de nossa sala de aula medisse 2m de altura e 3m de comprimento, qual o valor dessa área?) Nós encontramos, na sala de Raíssa, que eles usaram a adição para resolver. Todos somaram. Na minha turma, eu encontrei a adição bem pouca, foram dois ou três. Mas a segunda questão (referindo-se à situação 2: o telhado de uma cozinha tem 22 fileiras, com 18 telhas em cada fileira. Quantas telhas foram usadas para cobrir a cozinha?), o meu problema que fiz era uma multiplicação por dois números. Na correção das situações, vi então que eles não tinham conhecimento da multiplicação*

<sup>35</sup> Conforme mostra o Anexo C, esse relatório refere-se às atividades descritas por ano escolar a serem desenvolvidas após o encontro presencial da Formação OBEDUC/E-Mult, nas turmas dos professores participantes.

<sup>36</sup> Esse relatório é organizado com um resumo das ações dos professores por ano escolar, realizadas após as atividades aplicadas aos alunos das turmas dos participantes.

(referindo-se ao algoritmo). *Eu pensava que eles sabiam a multiplicação. Pelo menos, se não soubessem, tivessem a noção de como fazer por dois números, mas não tinham* (professora Graça).

O que chamou a atenção da professora Graça, nesse relato, é que suas turmas, ao resolverem as situações sobre *área*, usaram a operação de multiplicação das dimensões das figuras representativas das situações, porém não tiveram sucesso em resolver o algoritmo e indicavam resultados incorretos, especificamente na Situação 2, por ser uma multiplicação com dezenas. Ao analisarmos o depoimento dessa professora, observamos indícios de que as discussões vivenciadas por ela e pelo grupo de estudos a levaram a uma (re)significação de sua prática quanto à utilização de estratégias de ensino que favorecessem a visualização e até a manipulação de figuras.

Quanto ao trabalho com os erros dos alunos, a professora Graça e a professora Raíssa posicionaram-se com as seguintes observações.

*Voltei a trabalhar tudo de novo pra poder eles chegarem lá* (professora Graça).

*Como falei anteriormente, apliquei a sugestão que “a pesquisadora” trouxe, mas não fiz nenhuma intervenção, explicando nada, porque até mesmo para não atrapalhar os que estavam fazendo recuperação. Quando terminaram de responder, corrigi e vi que eles não tinham ido bem na atividade. Na aula seguinte, fiz uma caixa, pra mostrar como fazer a medição. Usei a fita métrica, expliquei pra eles sobre quando se compra tecidos com medidas, se faz medidas com ela ou com uma régua maior. Falei do lápis, o lápis que eles usavam no dia a dia, que tinha “tantos” centímetros, medi com uma régua de dez centímetros, mostrando também a mesa, pegaram a fita métrica pra medir a mesa. Trouxe um tabuleiro de multiplicação, coloquei na parede. Peguei a caixa de ovos, pintei de cores diferenciadas, uma fileira de rosa, outra de azul e outra de vermelha e expliquei que naquele tabuleiro da caixa de ovos tinha espaço para 30 ovos. Então, ali, a gente poderia fazer uma multiplicação ou uma divisão e fui mostrando. Também falei pra eles que poderia dividir em seis. Depois de falar tudo isso, aí mostrei que a questão falava da janela, mostrei a janela, o comprimido. [...] Escrevi no quadro as questões e assim passo a passo, desenhando a malha, e mostrando como se resolvia. Foi dessa forma que fiz o meu trabalho* (professora Raíssa).

O relato da professora Raíssa mostra que a sua turma demonstrou outra necessidade do entendimento de novos conceitos de medida e que a professora se utilizou de estratégias que viessem a atender essa demanda na aprendizagem de seus estudantes, posteriormente à aplicação das situações elaboradas na Formação OBEDUC/E-Mult.

As duas professoras, ao perceberem as limitações apresentadas pelos seus alunos, quando resolviam as situações propostas, embora de maneira diferenciada, procuraram utilizar as reflexões ocorridas para (re)significar a sua própria prática. A professora Graça utilizou-se da revisão da malha e do ensino do algoritmo da multiplicação e suas formas de resolução. Já a professora Raíssa lançou mão de materiais concretos para levar os seus alunos a conhecerem o ato de medir e as diferentes formas de medição e, só depois, voltou a trabalhar com as situações propostas, utilizando-se da malha quadriculada. Analisando

o ocorrido, é possível perceber que a professora Raíssa valeu-se de uma estratégia discutida no grupo de estudos, mas complementou essa ação prática com outros materiais que favorecessem os seus estudantes a completar as lacunas de seu aprendizado sobre medidas.

Como parte final dos depoimentos, a professora Graça expõe sua satisfação pelo avanço dos seus alunos.

*Eu achei minha parte muito boa, porque, no começo, como eu disse aqui, foi muito difícil, foi muito ruim, eu não conseguia nada, ficava apavorada, mas hoje em dia, graças a Deus, não estão ótimos, mas meus alunos estão bem melhores do que estavam e eu gostei bastante e quero dar continuidade a esse trabalho [referindo-se à continuidade do grupo de estudos] (professora Graça).*

No nosso entender, a professora Graça apresentou indícios na mudança de postura, ao acreditar em sua prática e no avanço do aprendizado de suas turmas, ao declarar a sua relação aprendizagem do aluno com a Formação OBEDUC/E-Mult. É possível notar aqui o princípio descrito por Zeichner (1993), quando considera que à medida que o professor reflete sobre a sua prática, vão ocorrendo análises, críticas, reestruturação e incorporação nova de conhecimentos que poderão respaldar o significado das ações posteriores. Nesse sentido, é possível perceber um (re)significado na prática da professora Graça, a partir de um olhar diferenciado sobre as estratégias utilizadas por seus estudantes, o qual consideramos, segundo Day (2001), um aspecto de seu desenvolvimento profissional.

Como parte da análise dos dados coletados em 2015, na Formação OBEDUC/E-Mult, apresentamos as situações elaboradas pelos participantes do grupo de estudos em seu último encontro presencial, com o objetivo de comparar o *antes* e o *depois* do envolvimento dos professores nesses dois contextos e, com isso, analisar os aspectos encontrados que apresentaram indícios de aprimoramento de sua prática docente.

#### *4.2.3 O Conhecimento Especializado analisado na elaboração de situações: o antes e o depois da participação na Formação OBEDUC/E-Mult e no grupo de estudos*

Ao final da Formação OBEDUC/E-Mult, foi solicitado aos participantes que elaborassem oito situações distintas (Anexo D) envolvendo as estruturas multiplicativas. O objetivo era comparar o *antes* e o *depois*, no tocante às situações elaboradas e na busca de indícios de aprimoramento do conhecimento das estruturas multiplicativas trabalhadas nos encontros presenciais e virtuais da Formação OBEDUC/E-Mult e no interior do grupo de estudos. Analisamos cinco instrumentos preenchidos com 40 situações, das quais apenas uma delas consideramos aberta, pela composição de multiplicação e uso da

estrutura aditiva, por esse motivo seus dados impediram de classificá-la segundo as categorias defendidas por Vergnaud (1983, 2009) para as estruturas multiplicativas.

Listamos, a partir do Quadro 15 até o Quadro 18, as situações elaboradas pelos participantes do grupo de estudos – Alice, Gerson, Graça, Janaína, Raíssa –<sup>37</sup> após a Formação OBEDUC/E-Mult.

Inicialmente, apresentamos as situações no Quadro 15, propostas pela professora Alice. Reiteramos que, no início da Formação OBEDUC/E-Mult, elaborou as oito situações (Quadro 7), em que 02 delas foram consideradas abertas e possíveis de diferentes resoluções, não se enquadrando nas categorias de Vergnaud (1983). Em dados gerais, 01 das situações sugeria a ideia de Comparação Multiplicativa e 05 delas foram de Proporcionalidade Simples, onde 02 propunham a multiplicação e 02, a divisão por partes como formas de resolução, e 01 apresentou forma mista de resolução, composição de multiplicação e divisão por partes.

**Quadro 15** – Situações elaboradas pela professora Alice após o Formação OBEDUC/E-Mult

Situação	Categoria
S1) Para uma receita de bolo de milho, Joana utiliza uma dúzia de ovos. Se ela fizer 04 bolos, quantos ovos ela precisará?	Isomorfismo de Medidas/ Proporcionalidade Simples Multiplicação
S2) O piso do quarto de Gustavo tem como comprimento 3 m. Sabendo que a largura é de 4 m, qual é a medida da área do piso do quarto de Gustavo?	Produto de Medidas Configuração Retangular Multiplicação
S3) A loja Doce Mel lançou a seguinte promoção: duas caixas de bombons por 9,00 reais. Se eu comprar 4 caixas nessa promoção, quanto pagarei?	Isomorfismo de Medidas Quarta proporcional
S4) Renata vai ladrilhar a calçada de sua casa que tem como área 24 m <sup>2</sup> . Sabendo que o comprimento é de 8m, qual a largura da calçada de Renata?	Produto de Medidas Configuração Retangular Divisão
S5) A casa de Silbene fica a 3 km de distância da escola em que trabalha. Alda mora 5 vezes mais distante. Qual a distância da casa de Alda para a escola que Silbene trabalha?	Comparação Multiplicativa
S6) João tem 48 anos de idade, seu filho Pedro tem seis vezes menos a sua idade. Qual a idade de Pedro?	Comparação Multiplicativa
S7) Tenho 32 pirulitos para compartilhar igualmente com 8 colegas. Quantos pirulitos cada um irá receber?	Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples Divisão por partes
S8) Maria Luiza comprou 4 pares de sapatos. Cada par custou 54,00. Quanto Maria Luiza gastou nessa compra?	Isomorfismo de Medidas/ Proporcionalidade Simples Multiplicação

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult (ANEXO D).

Diferentemente do ocorrido no início, a professora Alice elaborou as oito situações, no fim da Formação OBEDUC/E-Mult, com um repertório diversificado das categorias de Vergnaud (1983, 2009). Metade das situações estão no eixo Isomorfismo

<sup>37</sup> Reiteramos que não consta o nome dos outros 05 participantes, por motivo de terem elaborados as situações apenas em um (ou em nenhum) dos momentos da Formação OBEDUC/E-Mult

de Medidas, sendo que duas sugerem a operação de multiplicação (S1, S8); uma, a operação de divisão por partes (S7) e uma com a categorização de 4ª proporcional (S3). As restantes apresentam, em sua composição, a categoria de Comparação Multiplicativa (S5 e S6) e o Produto de Medidas, sendo uma (S2) com a ideia de multiplicação das partes, para achar o todo (área) e uma (S4), a ideia de divisão, ou seja, apresenta o toda (área) e uma parte (comprimento) para encontrar uma das partes (largura).

O conhecimento acerca da categorização de Produtos de Medidas, tanto envolvendo a operação de multiplicação como a de divisão, nos fez entender que a professora Alice pareceu preocupar-se, nessa segunda elaboração, em apresentar situações que envolvessem o produto das dimensões para encontrar a área (S2) e, dada a medida da área, encontrar uma das dimensões (S4), diferentemente do ocorrido no início da Formação OBEDUC/E-Mult, registrado no Quadro 07.

A seguir, apresentamos as situações elaboradas pelo professor Gerson, no Quadro 16. Reiteramos que, no início da Formação OBEDUC/E-Mult, elaborou as oito situações, sendo cinco delas caracterizadas por Proporcionalidade Simples, quatro tendo a operação de divisão por partes e, uma, a multiplicação como forma de resolução. Três das situações apresentaram a ideia de Comparação Multiplicativa em seu formato.

**Quadro 16** – Situações elaboradas pelo professor Gerson após a Formação OBEDUC/E-Mult

Situação	Categoria
S1) Num pacote de pirulitos tem 24 unidades, se Joana comprou 3 pacotes, qual o total de pirulitos?	Isomorfismo de Medidas/ Proporcionalidade Simples Multiplicação
S2) Em um retiro da igreja, na praia, a turma foi para uma pousada que tinha 12 quartos, com 04 camas em cada quarto. Qual o total de camas?	Isomorfismo de Medidas/ Proporcionalidade Simples Multiplicação
S3) Se, no retiro, forem 60 pessoas e a pousada tem 12 quartos, quantas pessoas ficarão em cada quarto com a mesma quantidade?	Isomorfismo de Medidas/ Proporcionalidade Simples Divisão por partes
S4) João Otávio ganhou de presente 5 carrinhos de bois. Cada carrinho vem com 12 bois. Qual é a quantidade total de bois?	Isomorfismo de Medidas/ Proporcionalidade Simples Multiplicação
S5) Marcos tem 60 figurinhas e quer repartir em partes iguais entre 5 amigos seus. Com quantas figurinhas cada amigo ficará?	Isomorfismo de Medidas/ Proporcionalidade Simples Divisão por partes
S6) Carlos comprou um celular no valor de R\$ 900,00 e quer dividir o pagamento em 3 parcelas iguais. Qual o valor de cada parcela?	Isomorfismo de Medidas/ Proporcionalidade Simples Divisão por partes
S7) Para ornamentar um salão de festas, Ana comprou 2 dúzias de tulipas, 3 dezenas de palmas e 5 dúzias de rosas. Qual o total das flores para o evento?	Aberta - multiplicação e uso de estrutura aditiva
S8) Jéssica quer distribuir, em partes iguais, 60 lápis para 30 alunos. Com quantos lápis cada aluno ficará?	Isomorfismo de Medidas/ Proporcionalidade Simples Divisão por partes

Observação registrada pelo professor Gerson: *faltaram questões com m<sup>2</sup>, a preocupação com o tempo de elaboração não deu para pensar.*

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult (ANEXO D).

O professor Gerson elaborou as oito situações, sendo uma delas (S7) com o uso da multiplicação e a da utilização da estrutura aditiva, o que motivou sua classificação como uma situação aberta e por isso, não se enquadra entre as categorizações de Vergnaud (1983). As sete restantes foram identificadas como Isomorfismo de Medidas, Proporcionalidade Simples, em que três delas adotaram a multiplicação como resolução (Situações S1, S2 e S4), enquanto quatro envolviam a divisão por partes (S3, S5, S6 e S8). O professor não elaborou nenhuma situação que envolvia o eixo Produto de Medidas/Configuração Retangular, todavia, justifica tal fato (utilizando a unidade m<sup>2</sup>, para indicar área da figura retangular) pela falta de tempo para “pensar”. Observamos que as situações elaboradas pelo professor, no início do processo e registradas no Quadro 8, apresentam também a Proporcionalidade Simples como formato em quatro delas e, nessa segunda elaboração, o professor usou essa categoria em sua maioria. A sua justificativa, no fim dos registros, manifestou o desejo de apresentar situações envolvendo o conceito de área, o que indica sua preocupação em elaborar situações diversas.

Apresentamos, no Quadro 17, as situações elaboradas pela professora Graça. Reiteramos que, no início da Formação OBEDUC/E-Mult, ela elaborou as oito situações (Quadro 9), sendo uma delas de Comparação Multiplicativa, sete categorizadas como Proporcionalidade Simples, em que duas utilizaram a operação de multiplicação, quatro, a divisão por partes, e uma sugerindo a 4<sup>a</sup> proporcional para a sua resolução.

**Quadro 17** – Situações elaboradas pela professora Graça após a Formação OBEDUC/E-Mult

Situação	Categoria
S1) A distância de São José a Buerarema é de 16 km, sendo que a distância de Buerarema a Itabuna é 2 vezes maior. Qual a distância de São José a Itabuna?	Comparação Multiplicativa
S2) Pedro tem 15 litros de mel. Pagou R\$ 3,00 por litro. Quanto gastou em 15 litros?	Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples Multiplicação
S3) Marta tem 56 bonecas e quer distribuir com 7 coleguinhas, para que todos tenham a mesma quantidade. Quantas bonecas cada uma receberá?	Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples Divisão por Partes
S4) Antônio tem 3.000 litros de vinho na sua adega. Ele pagou R\$ 15,00 por litro. Quanto ele pagou nos 3.000 litros?	Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples Multiplicação
S5) Se a porta da nossa sala medisse 2 metros de altura e 1 metro de comprimento, qual o valor total da área?	Produto de Medidas Configuração Retangular Multiplicação
S6) Um ônibus tem 4 fileiras de cadeiras. Se, em cada fileira, há 11 cadeiras, quantas cadeiras há no ônibus?	Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples Multiplicação

S7) Maria vende 60 pizzas por noite. Ela ganha R\$ 120,00. Quantas pizzas ela tem que vender na noite para ganhar R\$ 360,00?	Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples Quarta Proporcional
S8) Guida ganhou uma dúzia de flores. Ela tinha que colocar as flores em 4 vasos, sabendo que todos têm a mesma quantidade. Quantas flores caberá em cada vaso?	Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples Divisão por Partes

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult (ANEXO D)

Analisando o Quadro 17, é possível observar que as situações escolhidas pela professora Graça apresentam uma variedade maior, segundo as categorias de Vergnaud (1983), do que as elaboradas no início da Formação OBEDUC/E-Mult. Mesmo sendo da categoria Isomorfismo de Medidas, Proporcionalidade Simples, duas delas (S2 e S6) com a operação de multiplicação como forma de resolução, enquanto a S3 e a S8, com a divisão por partes e, a S7, a quarta proporcional. A professora também elaborou uma situação envolvendo o eixo Produto de Medidas, com as dimensões dadas para encontrar a área. A categoria de Comparação Multiplicativa foi encontrada na elaboração da situação S1.

Apresentamos, no Quadro 18, as situações elaboradas pela professora Janaína. No início da Formação OBEDUC/E-Mult, ela elaborou (Quadro 10) uma situação com a ideia da estrutura aditiva e sete da categoria Proporcionalidade Simples, envolvendo a multiplicação e a divisão por partes, em que sugeriam a ideia da multiplicação e da divisão por partes como resolução.

**Quadro 18** – Situações elaboradas pela professora Janaína após a Formação OBEDUC/E-Mult

Situação	Categoria
S1 – Ricardo foi ao mercado e comprou, na promoção ofertada, 3 litros de sucos por R\$12,00. Quanto custou cada litro de suco?	Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples Divisão por Partes
S2 – Lara comprou 5 pacotes do seu biscoito preferido. Sabendo que em cada pacote há 10 biscoitos, quantos biscoitos Lara obteve no total?	Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples Multiplicação
S3 – Gustavo pagou R\$ 9,00, por 2 metros de tecido comprados. Se 2 metros custaram R\$9,00, quanto custou cada metro?	Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples Divisão por partes
S4 – Luísa organizou uma festa de aniversário onde foram distribuídas, pelo salão, 15 mesas com 6 lugares (cadeiras) cada. Sabendo disso, quantas pessoas (sentadas) cabem na festa?	Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples Multiplicação
S5 – O piso de uma sala de aula tem 20m de comprimento e 8 metros de largura. Qual a área total desse piso?	Produto de Medidas Configuração Retangular Multiplicação
S6 – Sabendo que uma parede mede 10m em seu comprimento e tem uma área total de 40m <sup>2</sup> , descubra qual a largura dessa parede.	Produto de Medidas Configuração Retangular Divisão
S7 – Observe a promoção: 4 pacotes de fraldas por apenas R\$32,00. E, aí, quanto custou cada pacote?	Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples Divisão por Partes

S8 – Uma janela mede 12m de comprimento e 5m de largura. Qual a medida total (área) dessa janela?	Produto de Medidas Configuração Retangular Multiplicação
---	--

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult (ANEXO D).

As situações elaboradas pela professora Janaína registradas no Quadro apresentam-se, em sua maioria, categorizadas como Isomorfismo de Medida/Proporcionalidade Simples; nas situações S2, S4, a multiplicação aparece como sugestão de resolução e a divisão por partes nas situações S1, S3 e S7. Diferentemente das situações elaboradas pela professora do Quadro 10, o eixo Produto de Medidas/Configuração Retangular aparece nas duas formas, ou seja, a S5 e a S8, com as medidas das dimensões (comprimento e largura) e procura-se a medida-produto (área), enquanto a situação S6, com os dados de uma das dimensões (comprimento) e, a medida-produto (área), questionando a medida da outra dimensão. A professora Janaína, nesse segundo momento de elaboração de situações, mostra um conhecimento acerca da categorização Produto de Medidas.

No Quadro 19, apresentamos as situações elaboradas pela professora Raíssa que, no início da Formação OBEDUC/E-Mult, elaborou as oito situações, das quais duas delas foram consideradas abertas, por possibilitar diferentes soluções. As seis restantes foram de Proporcionalidade Simples, com uma apresentando a multiplicação para sua resolução, quatro, a operação de divisão por partes e, uma, a categoria Comparação Multiplicativa.

**Quadro 19** – Situações elaboradas pela professora Raíssa após a Formação OBEDUC/E-Mult

Situação	Categoria
S1 – Laiane quer mudar o piso da sua sala que tem 8 cm de comprimento e 7 cm de largura. Qual a área dessa sala?	Produto de Medidas Configuração Retangular Multiplicação
S2 – Mônica quer fazer uma pizza de forma retangular que tem 15 cm de comprimento e 10 cm de largura. Qual a área dessa pizza?	Produto de Medidas Configuração Retangular Multiplicação
S3 – A merendeira da escola fez 558 pães para ser distribuído por 18 salas. Quantos pães cada sala recebeu?	Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples Divisão por partes
S4 – Um retângulo tem 5 cm de comprimento por 8 cm de largura? Qual é a área desse retângulo?	Produto de Medidas Configuração Retangular Multiplicação
S5 – Analu fez uma festa na escola com uma bandeja contendo 57 pedaços de bolo para distribuir entre suas 3 colegas. Quantos pedaços cada colega recebeu?	Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples Divisão por partes
S6 – Maria tem 18 bonecas e sua amiga tem o dobro. Qual a quantidade de bonecas da sua amiga?	Comparação Multiplicativa
S7 – Cecilia tem quatro saias e sua amiga tem o quádruplo. Qual o total de saias de sua amiga?	Comparação Multiplicativa
S8 – Luciana desenhou um retângulo de 8 cm de comprimento e 7 cm de largura? Qual a área do retângulo?	Produto de Medidas/Configuração Retangular/Multiplicação

**Fonte:** Dados do Programa OBEDUC/E-Mult (ANEXO D).

Diferentemente das situações elaboradas no início da Formação OBEDUC/E-Mult, a professora Raíssa elaborou as suas oito situações, na sua maioria, utilizando-se do eixo Produto de Medidas, envolvendo a Configuração Retangular, ou seja, a metade das situações (S1, S2, S4 e S8). A categoria Isomorfismo de Medidas, Proporcionalidade Simples, sugerindo sua resolução com a divisão por partes aparece em duas situações (S3 e S5) e a categoria Comparação Multiplicativa (S6 e S7) completa a diversidade das situações propostas. A professora demonstra um conhecimento do eixo Produto de Medidas, classe Configuração Retangular, nessa segunda elaboração de situações, mesmo utilizando apenas o produto das dimensões da figura para encontrar a sua área.

No Quadro 20, apresentamos os dados observados acerca da totalidade de situações elaboradas pelos professores participantes deste estudo (Alice, Gerson, Graça, Janaína e Raíssa) sobre as estruturas multiplicativas, no início e no fim da Formação OBEDUC/E-Mult.

**Quadro 20** - Quadro comparativo das situações elaboradas pelos participantes do grupo de estudos no início e ao final da Formação OBEDUC/E-Mult

Categorização das Situações do Campo Conceitual Multiplicativo	Situações elaboradas na Formação OBEDUC/E-Mult			
	No Início		Ao final	
	Quantidade	%	Quantidade	%
Isomorfismo de Medidas-Proporcionalidade Simples/ Multiplicação	11	27,5	10	25
Isomorfismo de Medidas-Proporcionalidade Simples/ Divisão por Partes	15	37,5	12	30
Isomorfismo de Medidas Proporcionalidade Simples/ 4ª Proporcional	1	2,5	2	5
Produto de Medidas Configuração Retangular/Multiplicação	-	-	8	20
Produto de Medidas Configuração Retangular/Divisão	-	-	2	5
Comparação Multiplicativa	6	15	5	12,5
Mistas – Composição de Categorias	2	5,0	-	-
Abertas – Possíveis de diferentes resoluções	5	12,5	1	2,5
<b>Total de situações</b>	<b>40</b>	<b>100%</b>	<b>40</b>	<b>100%</b>

Fonte: Dados dos protocolos do Programa OBEDUC/E-Mult.

Quanto à elaboração das situações pelos participantes do grupo de estudo, ao final da Formação OBEDUC/E-Mult, a nossa análise de forma geral, mostra a variedade de situações elaboradas quanto a sua categorização segundo a proposta por Vergnaud 1983). Comparando com as que foram elaboradas no início da Formação OBEDUC/E-Mult, consideramos que o Produto de Medidas, classe Configuração Retangular que não tinha sido contemplada nas proposições dos professores, apareceram, nesse segundo momento, em 10 delas (25% da totalidade), elaboradas pelos participantes do grupo de estudos,

destacando, também, a operação de divisão como forma de resolução de situações envolvendo *área de um retângulo* (dado a medida-produto e uma das dimensões para encontrar a outra dimensão), o que indica, a nosso ver, que, por tratar de situações que envolvem conhecimento da geometria vinculadas a esse eixo e que foram trabalhadas no Formação OBEDUC/E-Mult e discutidas no interior do grupo de estudos, em forma de estratégias para o seu ensino, proporcionou aos professores inserirem no rol das situações por eles elaboradas, as que apresentam a Configuração Retangular como proposta de resolução. A classe Comparação Multiplicativa aparece nos dois momentos de elaboração com quantidades e percentuais próximos.

Analisamos, portanto as situações elaboradas e verificamos a variedade das categorias estudadas nos contextos de formação, sugeridas como propostas de resolução. Esse dado revela que os professores compreenderam a discussão proposta por Magina, Santos e Merlini (2014) de que os conceitos que envolvem as estruturas multiplicativas somente ganham significados se envolvidos em diferentes situações.

Um outro dado considerado relevante foi que, nenhuma das situações apresentou a proposição do uso exclusivo do algoritmo da operação sugerida e sim, todas elas envolviam a necessidade de uma interpretação para sua resolução. Quanto às situações que sugeriram a divisão como forma de resolução, tanto no Isomorfismo de Medidas como no Produto de Medidas, os participantes do grupo de estudos demonstraram ter diversificado essa operação entre as duas categorias, o que, no início do processo, não ocorreu, restringindo-se apenas à primeira, na categoria Proporcionalidade Simples.

Considerando o fato de não haver ainda, nesse segundo momento, elaboração de situações com a categoria Isomorfismo de Medidas/divisão por quotas, baseamo-nos em Nunes e Bryant (1997) quando afirmam ser a divisão por quotas um tipo que *guarda maior complexidade em seu entendimento* e, por isso, entendemos que as limitações no ensino dessa classe podem ser a causa de isso não ter sido pensado pelos professores durante os dois momentos de elaboração.

Analisando os dados apresentados neste capítulo pudemos observar consensos entre a nossa pesquisa e a de Etcheverria (2008). A autora também realizou sua investigação na própria escola em que os participantes atuavam e observou que, a partir da constituição de grupos de estudos ampliou-se [...] “a possibilidade de mudança na prática educativa vinculada ao processo reflexivo provocado no coletivo” (ETCHEVERRIA, 2008, p. 80). Nos dados aqui apresentados, notamos, também, mesmo que timidamente, que os estudos provocaram mudanças na prática dos participantes e,

muito disso, deve-se à reflexão ocorrida durante todo o processo.

Assim como no estudo relatado por Etcheverria (2008), a participação dos professores no grupo de estudo, apresenta indícios de terem sido ampliados seus conhecimentos e consideramos que eles puderam olhar de outra maneira para o ensino das estruturas multiplicativas e refletiram em sua forma de trabalhar esse conhecimento.

No tópico seguinte, apresentamos uma análise prévia, a partir dos critérios adotados e baseados em Day (2001) nos quais trataremos do desenvolvimento profissional dos participantes do grupo de estudos, cenário desta pesquisa.

### **4.3 Analisando indícios de desenvolvimento profissional dos professores, a partir do ocorrido no interior do grupo de estudos.**

No capítulo 3 dos Procedimentos Metodológicos, registramos que, a partir da definição de Day (2001), analisaríamos o desenvolvimento profissional dos docentes envolvidos no grupo de estudos, procurando indícios de o professor se portar como “agente de mudança”. Para tanto, em primeiro lugar, buscamos analisar as possíveis (re)significações de seus conhecimentos sobre o ensino das estruturas multiplicativas, suas reflexões sobre a temática, seus planejamentos de aula e sua execução – prática docente. No Quadro 20, sintetizamos alguns aspectos que consideramos importantes para a busca de indícios que representassem o comportamento desse profissional enquanto “agente de mudanças” caracterizando esse dado como um dos fatores determinantes para seu desenvolvimento profissional.

**Quadro 20** – Síntese dos aspectos de (re) significação de conhecimentos analisados dos participantes do grupo de estudos

<b>Ações geradoras</b>	<b>O que os professores reviram</b>	<b>Quando ocorreu</b>	<b>Em que os professores renovaram e ampliaram seus conhecimentos</b>
Elaboração das situações com o foco nos procedimentos de cálculos (Quadro 13)	Análise do desempenho dos alunos, de seus esquemas e o estudo sobre a aplicação de uma intervenção acerca do tema área de uma figura retangular	Indícios encontrados nas reflexões geradas no grupo de estudos para a sala de aula e da sala de aula para o grupo de estudo e para a Formação OBEDUC/E-Mult	Elaboração de situações com diferentes categorias do Campo Conceitual Multiplicativo (Quadro 19); O conhecimento especializado acerca do Campo Conceitual Multiplicativo

Análise dos erros e reconhecimentos das dificuldades dos alunos quanto às operações de multiplicação e divisão	Estudos sobre as diferentes categorias de situações do Campo Conceitual Multiplicativo, em especial o Isomorfismo de Medidas/Multiplicação e Divisão e a Configuração Retangular	Nos encontros do grupo de estudos promovidos nos intervalos entre os encontros da Formação OBEDUC/E-Mult que trataram do tema Isomorfismo de Medidas/Multiplicação e Divisão e da Configuração Retangular; Aplicação da intervenção da malha quadriculada	Compreensão das operações envolvidas nas situações analisadas, o que significa ampliação do conhecimento do conteúdo e do estudante e do conteúdo e do ensino.
--	--	---	--

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Em suma, em relação aos aspectos descritos no Quadro 20, de forma sintetizada, nossa compreensão quanto ao desenvolvimento profissional dos participantes de um processo formativo no interior de um grupo de estudos e, de forma concomitante da Formação OBEDUC/E-Mult, gira em torno de seus depoimentos que refletem características de que os professores renovaram e ampliaram seus conhecimentos quanto aos temas que foram discutidos nos dois contextos de formação, atendendo, portanto, em parte, o objetivo proposto deste estudo, até então analisado no primeiro ano das ações do grupo (2015). É preciso considerar, também, que a (re)significação dos conhecimentos sobre as estruturas multiplicativas e a abordagem de novas propostas de estratégias para o seu ensino não são imediatas, demandam tempo para que se perceba. Portanto, nesta investigação, foi preciso que, muitas vezes, as discussões fossem retomadas sobre os conceitos que já haviam sido abordados em sessões anteriores, conforme afirma Miranda (2014) *a ampliação de conhecimentos emerge também por meio da explicitação de dúvidas e descobertas*.

No próximo capítulo, analisaremos os episódios que trataram do tema Isomorfismo de Medidas – Proporcionalidade Simples – operação divisão, estudados e analisados pelo grupo no ano 2016, quando do retorno dos estudos no interior do grupo, após o término da Formação OBEDUC/E-Mult.

## **CAPÍTULO 5**

### **DISCUSSÃO E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS**

### **COLETADOS NA PESQUISA DE CAMPO EM 2016**

Neste capítulo, analisamos e discutimos o ocorrido no processo formativo durante os encontros do grupo dos participantes desta investigação no ano 2016. Por solicitação dos professores neste ano, tratamos de uma demanda relacionada ao processo ensino e aprendizagem dos diferentes significados da divisão.

Da mesma forma que no capítulo anterior, procuramos aprofundar os estudos a respeito de Vergnaud (1983,2009); discutir propostas metodológicas para o ensino da divisão, observando e refletindo sobre a prática dos professores participantes. Para tanto, neste capítulo, analisamos episódios, os quais, segundo nosso ponto de vista, possibilitaram um nível maior de reflexão do grupo sobre a divisão e seu ensino.

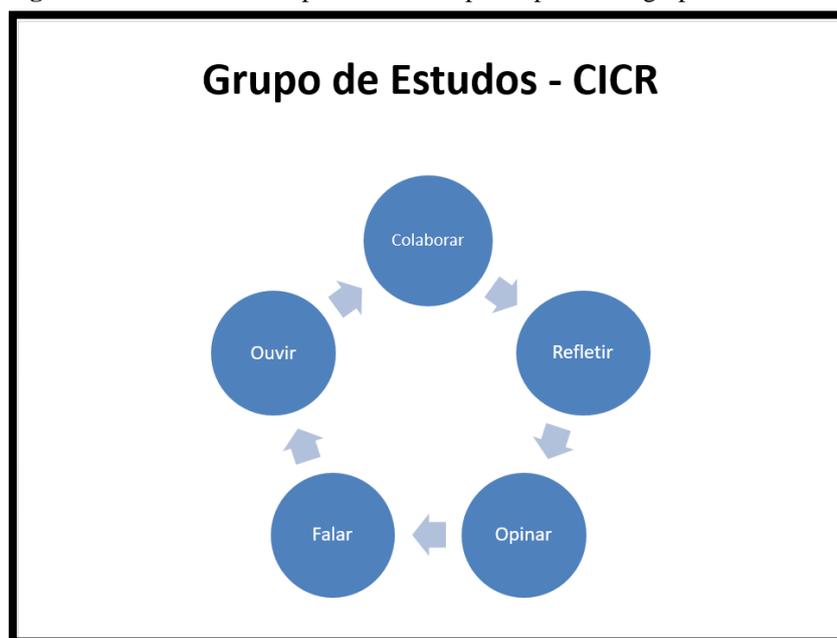
Fundamentamos a análise das informações coletadas em Day (2001); Ball, Thames e Phelps (2008); Zeichner (1993) e Serrazina (2012). Em seguida, apresentamos as reflexões iniciais dos professores a partir do ocorrido em 2015.

Os dados relatados nos episódios a seguir, foram coletados no ano seguinte ao término da Formação OBEDUC/E-Mult e geraram as discussões em grupo sobre a categoria Isomorfismo de Medidas: Proporcionalidade Simples: Divisão.

#### *5.1 Reflexões sobre o ensino da categoria Isomorfismo de Medidas – Proporcionalidade Simples – Divisão: algumas inferências sobre a prática docente*

No primeiro encontro de 2016, procuramos analisar os estudos realizados no ano anterior e rediscutir os pressupostos que perpassaram as ações do grupo. Após expor a programação prévia, a pesquisadora apresentou uma tela com a imagem, a seguir.

**Figura 30** – Primeira tela apresentada aos participantes do grupo



Fonte: Acervo pessoal.

*Eu queria iniciar pedindo que vocês lembrassem de verbos com sentido de nos fazer pensar em ações que podem acontecer conosco durante nossos encontros. Somos um grupo\_e, como um grupo, podemos fazer um monte de coisas, por exemplo, podemos e precisamos OUVIR uns aos outros, podemos FALAR, falar o que quer, como quer, perguntar o que quer, a gente aqui dialoga ensina e aprende, dialoga, troca. São esses sentimentos que envolvem um grupo de estudos (pesquisadora).*

*Verdade, pesquisadora, aqui somos ouvidos e podemos falar tudo o que sentimos. (professora Larissa).*

*Isso que pretendemos mesmo. [continuando a olhar para a tela da Figura 30] Quanto ao OUVIR e FALAR, a gente pode e deve OPINAR: “Não, eu não concordo com isso não” ou “eu quero desse jeito”. A opinião é sua e o grupo vai acatar, sim ou não, discutir, ver o que é melhor para o grupo. Isso é uma espécie de um minicontrato didático para esse retorno. A outra coisa é REFLETIR, o concordar ou não, vai depender da reflexão que vocês fizerem do que o outro pensa e no contexto de um grupo, isso reforçará o espírito colaborativo. Essa é nossa busca procurar COLABORAR com o que acontecer aqui. Todos concordam com o que estamos propondo? (pesquisadora).*

*Concordamos (todos os professores).*

Nesse primeiro momento, apoiamo-nos em Zeichner (1993) por considerarmos assim como esse autor, ser importante que os docentes assumam uma atitude reflexiva em relação à forma como desenvolvemos nossas ações no grupo e às condições sociais que o influenciam. Esperávamos, igualmente, que as discussões nos ajudassem a refletir como se dá o ensino e tudo o que pode influenciá-lo.

Em seguida, solicitamos que o grupo de professores nos dissesse, em poucas palavras, o que ficou e o que faltou em nossos encontros em 2015, após entregarmos a eles uma folha contendo a descrição de algumas das ações desenvolvidas no ano anterior

e retomamos o ocorrido. Depois disso, alguns dos professores se manifestaram.

*No ano passado, já no finalzinho quando você deu algumas atividades pra gente até boas e, vou ser sincera, como costume ser, eu prefiro os encontros com você do que com os dias que tinha a formação [referindo-se aos encontros da Formação OBEDUC/E-Mult]. Esse ano não, esse ano, eu amei [referindo-se à outra formação com a equipe do GPEMEC sobre geometria], foi bom. Mas, no ano passado, eu percebi assim que era mais teoria, parecia que nós éramos o motivo de trabalho deles, tipo assim, estávamos sendo estudadas... (professora Larissa).*

*Você conseguia entender o que se estudava lá, estudando aqui no grupo (professora Alice).*

*Isso, e eu dizia, só vou participar, porque era sábado letivo ..., mas não vi muita coisa não. Agora, no grupo, era bom, você sentava com a gente aqui na sala, você trazia sugestões, você explicava “tete a tete” pra gente. Lá não. Tudo o que era passado pra gente, era dito, não é desse jeito. Até o jeito que era passado pra gente, era uma maneira meio chata, cobrança demais para uma coisa que não era tão real (professora Larissa).*

*Mesmo assim, o que fizemos ainda pode ser melhorado. Sabemos que ficou alguma lacuna e gostaria que fosse lembrado, porque queremos melhorar enquanto grupo (pesquisadora).*

As discussões aqui exibidas apresentam indícios de que a proposta da Formação OBEDUC/E-Mult não foi compreendida pela professora Larissa, quando afirma, por exemplo: *eu percebi assim que, era mais teoria...que não era tão real*, acreditamos que ela se refere ao fato de a teoria estar, naquele momento, bastante distante de sua prática. Isso é confirmado quando ela diz: *agora, no grupo, era bom, você sentava com a gente aqui na sala, você trazia sugestões, você explicava “tete a tete” pra gente*. Acreditamos que, talvez, essa profissional precisasse naquele momento, de exemplos práticos que pudessem ajudá-la no cotidiano da sala de aula e, quem sabe, um espaço maior para expor suas dúvidas. Serrazina (2013, p.78), afirma que: “a formação como desenvolvimento profissional tem que estar baseada nas práticas de sala de aula”. Diante do contexto aqui descrito, a professora Larissa parece ter encontrado, no grupo de estudo, um cenário que estabeleceu uma maior proximidade com suas necessidades. Diferentemente da professora Larissa, a professora Alice parece ter encontrado apoio no grupo de estudo para sua participação na Formação OBEDUC/E-Mult. A reflexão sobre o ocorrido continuou a ser feita pelo grupo.

*Em relação ao grupo, o que faltou foi a questão da organização, em relação ao espaço, em relação ao tempo, a questão de todos estarem sempre. Algumas vezes, uns vinham, outros não (professora Jamille).*

*No meu caso, foi a falta de informação. Eu mesma participei, mas foi por um acaso. Eu não era informada. Eu via o grupo reunido e ia ver o que estava acontecendo. Foi quando descobri o que era e comecei a participar (professora Raíssa).*

*Esse horário mesmo ficou bom, no ano passado, eu faltava porque trabalhava em outra escola no horário do grupo. E no quesito “o que ficou”, pra mim, foi o aprendizado mútuo (professora Larissa).*

*Pra mim, eu não sei se faltou, é como já se falou aqui, eu aprendi bastante no grupo da formação, mas depois que comecei a fazer, você vindo, depois que você começou a vir, pra mim melhorou mais. É só a gente aqui, agora, mais restrito, só a gente, melhora muito mais a aprendizagem (professora Graça).*

*Pra mim, o que ficou foi só o que teve no grupo (professora Larissa).*

Os depoimentos das professoras Jamile e Raíssa dão-nos pistas de algumas lacunas observadas por elas quando o grupo se encontrava para estudar como, por exemplo, a questão de espaço e tempo e a participação constante do grupo de professores. Miranda (2014, p.201) descreve que a constituição de um grupo de estudos esbarra em alguns fatores que dificultam sua organização, fortalecimento e permanência. Uma delas, segundo a autora, é o fato de o professor, na maioria das vezes, possuir uma carga horária intensa e nem sempre conseguem conciliar seu tempo para participar das sessões de estudos, mesmo entendendo ser importante para contribuir com a sua prática docente.

## *5.2 Relação entre as diferentes categorias do conhecimento para o ensino da categoria Isomorfismo de Medidas – Proporcionalidade simples – Divisão*

Partindo da análise dos depoimentos sobre a operação divisão como uma dificuldade detectada pelos professores, quando observaram os esquemas e o desempenho dos seus estudantes após resolverem as situações elaboradas por eles durante a Formação OBEDUC/E-Mult, propomos para os participantes deste encontro, uma atividade envolvendo essa operação.

*Vamos trabalhar situações com uma categoria vista no início (referindo-se aos primeiros encontros presenciais da Formação OBEDUC/E-Mul), proporcionalidade simples/divisão, a pedido do grupo por entender [o grupo] que a operação de divisão foi uma dificuldade encontrada nas respostas às situações pelas crianças. Muitas delas pareciam entender a situação, conseguiam até armar um esquema, mas, na hora da divisão, não conseguiam resolver e não encontravam a resposta certa. Aí, a gente quer começar por essa operação, para rever um pouco do que foi trabalhado na formação, claro, em seu início, mas trabalhado ponto a ponto (pesquisadora).*

Baseado na compreensão de resultados de pesquisas com alunos dos anos iniciais quanto à operação de divisão, apresentado por Santos, Merlini, Magina e Santana (2014) ao investigarem a sua maturidade cognitiva para esse ensino, propusemo-nos, inicialmente, a organizar uma atividade que gerasse discussões acerca da forma lúdica utilizada por alunos desses anos escolares para resolver situações que sugerissem a divisão por partes e por quotas para sua resolução.

Apresentamos aos professores uma atividade que denominamos Caso de Ensino 1 (APENDICE 01), com duas situações (A e B) de Proporcionalidade Simples, envolvendo a divisão por partes (Situação A) e a divisão por quotas (Situação B),

solicitando a eles que resolvessem por meio de desenhos (representação pictórica) como seus estudantes pensariam em resolver.

**Figura 31** - Situações apresentadas aos participantes do grupo de estudos

Situação A) *O médico mandou Marta tomar 24 comprimidos em 8 dias. Ela tem que tomar a mesma quantidade de comprimidos todos os dias. Quantos comprimidos ela tomará por dia?*

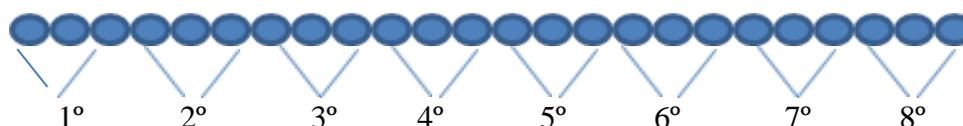
Situação B) *Para ficar boa de uma doença, Ana tomou 32 comprimidos. O médico mandou Ana tomar 4 comprimidos por dia. Quantos dias esse tratamento durou?*

Fonte: Gitirana et al., 2014, p. 95 e 98.

Selecionamos alguns dos depoimentos dos professores para análise, os quais se referiam a uma maneira lúdica de representar o cálculo para resolver as situações A e B. Os desenhos feitos foram baseados na forma como seus estudantes fariam.

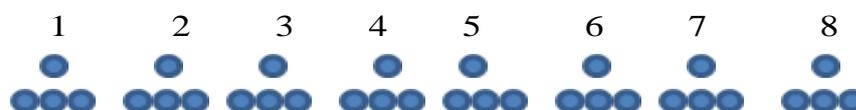
Quanto à Situação A)

*Eles não sabem usar a divisão. Eles iam somando até eles acharem quantos comprimidos iam dar por dia. Como eu já sei, vão ficar 3 pra cada. Iam fazer isso (mostra no quadro). Para cada 03 comprimidos, um dia. Antes disso, eles ficariam somando até conseguir, mas eles iam fazer assim (professora Graça).*



Quanto à Situação B)

*No mesmo sentido, só que agora é ao contrário. Os quatro comprimidos e aí agora, vamos dividir esses 32. Eles iam ficar botando as bolinhas, iam fazendo até encontrar, aí depois eles fechariam, porque vai dar 8, entendeu? Eles fechariam e uniam. Um (aluno) só na V2<sup>38</sup>, fazia isso, pra cada um ele botava igual, a hora que ele achasse o 32. Pra nós, era diferente, mas pra ele era do jeito dele, era assim que achava e dava certo. Aqui (mostrando no quadro) ele fazia assim, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. E aqui ele fazia 4 com o mesmo valor (quantidade) (professora Graça).*



Analisando a descrição da professora Graça, é possível notar que sua representação é a mesma para as duas situações. Concernente à situação A, a docente até descreve que calculou mentalmente a divisão, provavelmente pensando na partição, mas não discute com o grupo essa operação mental e representou as duas situações da mesma forma. Em seguida, a professora Jamile pede a palavra e apresenta a seguinte representação, explicando em seguida.

<sup>38</sup> A turma da professora é representada por V2, pois é a segunda turma do vespertino.

Situação A							
1º dia	2º dia	3º dia	4º dia	5º dia	6º dia	7º dia	8º dia

Situação B							
1º dia	2º dia	3º dia	4º dia	5º dia	6º dia	7º dia	8º dia

*Eu acredito que alguns deles, além de fazer da forma correta, que a gente já conhece – da divisão, [e explica:] afinal de contas, já são do 7º e 8º anos, mas alguns iriam fazer dessa forma: os 8 dias, utilizando a configuração retangular, eles iriam desenhar um retângulo, fazer os 08 dias e depois ia contar e desenhar 24 quadradinhos (situação A) que seriam os comprimidos (o desenho da professora assemelhou-se a uma cartela de comprimidos). E depois que montassem tudo, iam colocar 24 comprimidos e não iam dizer qual era a resposta, se eram 3 ou eram 8, porque acreditam que 24 comprimidos já é a resposta. Aí eu iria perguntar depois, e iria fazer a intervenção, para que eles encontrassem a resposta 3 ou 8. Do outro problema (B), seria da mesma forma (professora Jamile).*

Quanto a afirmação, *utilizando a configuração retangular*, a professora Jamile apresentou uma das categorizações vistas e trabalhadas em um dos encontros da Formação OBEDUC/E-Mult, e que, naquele momento de reflexão sobre o que o seu aluno poderia utilizar para representar as duas situações propostas (A e B), esse conhecimento foi explicitado por ela para justificar a ludicidade utilizada nas representações.

No nosso entendimento, a professora Jamile representou o que ela pensava que seus alunos fariam, caso utilizassem a representação pictórica, por serem dos anos finais do ensino fundamental. Ela explicou que, a partir das ideias geométricas: *iriam desenhar um retângulo*, com a forma de uma cartela de comprimidos, como sugere o modelo da Figura 32 a seguir:

**Figura 32** - Cartela de comprimidos em formato retangular



Fonte: Acervo pessoal

Como as duas situações referem-se ao contexto que poderiam ser representadas no mesmo formato da Figura 32, a professora Jamile declara que após o desenho da cartela com as quantidades totais das duas situações (A e B), seus alunos aguardariam a

intervenção que os levassem a entender o que está sendo perguntado, para depois resolvê-las.

Em continuação às discussões sobre a representação da distribuição equitativa na primeira situação (A), mostramos na lousa que precisávamos distribuir equitativamente os 24 comprimidos, nos oito dias, para saber quantos comprimidos seriam tomados por dia. A situação B, sabíamos que teríamos que identificar quantos quatro (comprimidos) caberiam em 24 (comprimidos) para descobrirmos quantos seriam os dias. Para elucidar o ocorrido, escolhemos depoimentos gerados nas discussões.

*Essas duas situações (A ou B) são dois casos diferentes. Está se falando em comprimidos e está se falando em dias, mas são duas situações diferentes. Trata-se de uma situação de divisão por partes e outra, de divisão por quota. Como podemos diferenciar uma da outra? O que eu tenho no primeiro diferente no segundo, já que estamos falando de comprimidos e dias nas duas situações? (pesquisadora).*

*Os dois têm a quantidade de comprimidos (professora Graça).*

*O primeiro não tem a quantidade de dias. No primeiro, tem o número de comprimidos e o número de dias. No segundo, só tem o número de comprimidos, não tem o número de dias (professora Janaína).*

*Tem também quantidades diferentes. No primeiro, tem “em 8 dias”. No segundo, são “4 por dia” (professora Graça).*

*No primeiro, é como se pegasse o todo e perguntasse as partes e, no segundo, é como se pegasse a parte do todo (professora Janaína).*

Retomamos nossos estudos, baseados em Santos (2012) e em Gitirana et al. (2014) acerca dos tipos de grandezas encontradas nas situações A e B e a diferença dos esquemas para a sua resolução, segundo Vergnaud (2009). Em seguida, apresentamos em slides, na Figura 33, referindo-se à utilização do Escalar Multiplicativo.

**Figura 33** - Slides referentes ao esquema do Escalar Multiplicativo

#### Situação A

O médico mandou Marta tomar 24 comprimidos em 8 dias. Ela tem que tomar a mesma quantidade de comprimidos todos os dias. Quantos comprimidos ela tomará por dia?

#### Escalar Multiplicativo



Solucionando temos: 24 comprimidos : 8 = 3 comprimidos.

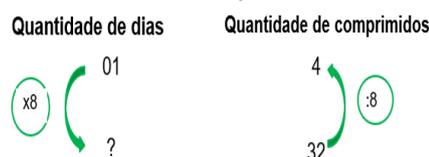
Resposta: Marta tomará 03 comprimidos por dia

Proporção simples/ Divisão partitiva

#### Situação B

Para ficar boa de uma doença, Ana tomou 32 comprimidos. O médico mandou Ana tomar 4 comprimidos por dia. Quantos dias este tratamento durou?

#### Escalar Multiplicativo



? = 32 : 4 = 8 (escalar multiplicativo)

? = 01 x 8 = 8

Resposta: Ana tomará os comprimidos em 08 dias.

Proporção Simples/Divisão Quotitiva

**Fonte:** Dados da pesquisa.

*No primeiro (Situação A), temos duas grandezas de naturezas diferentes sendo trabalhadas – 24 comprimidos em oito dias – ou seja, elas apresentam os valores correspondentes. E no segundo (Situação B) – 32 comprimidos e quatro comprimidos por dia – as duas grandezas de naturezas iguais sendo trabalhadas. O primeiro dá a ideia de distribuir, como aconteceu no desenho que a professora Graça fez para representar o que seus alunos fariam. Pegou 24 comprimidos e foi distribuindo até dar três comprimidos no primeiro dia, três no segundo e assim até completar os 24 comprimidos. Na segunda situação, Ana já tem a quantidade, que são quatro comprimidos por dia, precisa só saber quantos dias vai durar o tratamento – quantos quartos cabem em 24. No primeiro, a ideia é de repartir, Partição e, no segundo, Quota, ou seja, quantos grupos de quatro cabem em 24 (pesquisadora).*

Os depoimentos, a seguir, apresentam indícios quanto ao entendimento dos participantes em relação à diferença entre as duas situações.

*Então, agrupamentos quer dizer quota? (professora Graça).*

*Sim. Nesse caso, significa a mesma coisa (pesquisadora).*

*No caso desse esquema, quando a gente for passar para o aluno, a quantidade de dias, eu aumento oito vezes ( $1 \times 8$  que dá 8). Do lado de cá (apontando para coluna de número de comprimidos), se eu tenho 24, eu vou dividir por 8, não é uma divisão? De um lado, é multiplicação e do outro uma divisão (professora Graça).*

*De cima pra baixo, aumentou ou diminuiu? (professora Alice). De cima para baixo aumentou oito vezes (professora Graça).*

*Então, aí é multiplicação. Daqui pra cá (apontando para a coluna do número de comprimidos) vai aumentar ou vai diminuir? (professora Alice).*

*Vai diminuir, daí eu penso que seja assim, diminuiu, eu sei que divide (professora Graça).*

*Sim, eu sei que divide. Mas o que eu quero saber é o que tenho a dizer pro aluno que, de um lado, é multiplicação e, de outro, é divisão (professora Graça).*

*O número 8 é apenas um escalar, um número, uma razão entre a mesma grandeza, o “aumentou” ou “diminuiu” é o que aconteceu entre os dois valores. O que você pode fazer também é perguntar pra ele, qual o número que multiplicado por 8 dá 24, que é a operação inversa. Mas, como Alice falou, também é correto (pesquisadora).*

*Aí fica melhor pra fazer, senão ele vai entender que, de um lado é multiplicação e, do outro, é divisão. É para eles entenderem. Nós entendemos, mas eles não vão entender dessa maneira. No meu caso, que são alunos da aceleração, é preciso explicar dessa maneira (professora Graça).*

*É preciso que as crianças compreendam que a razão se mantém, mas eu preciso compreender o que está acontecendo na situação: depende qual é meu referencial. Veja um outro exemplo: eu tenho 1,55m e Graça 1,75m. Eu posso dizer que [nesse momento foi para a lousa] sou **mais baixa** que Graça, ou Graça é **mais alta** que eu. Depende de onde eu começo minha frase, para compreender essa situação pelo escalar depende de onde estou olhando. Por isso que tem uma outra forma de resolução pelo esquema de Vergnaud, que é a relação funcional (pesquisadora).*

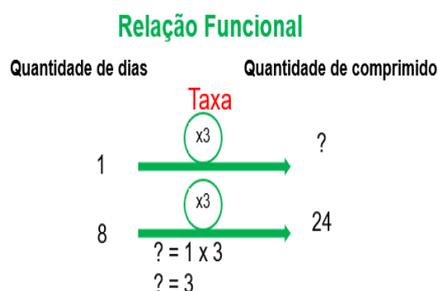
Explicamos para o grupo, o esquema da relação funcional para resolver as duas situações A e B, chamando a atenção que a divisão por quota sugere pensar de “quantas

vezes essa quota cabe no total dado”

**Figura 34** - Slides referentes ao esquema utilizando a Relação Funcional

**Situação A**

O médico mandou Marta tomar 24 comprimidos em 8 dias. Ela tem que tomar a mesma quantidade de comprimidos todos os dias. Quantos comprimidos ela tomará por dia?

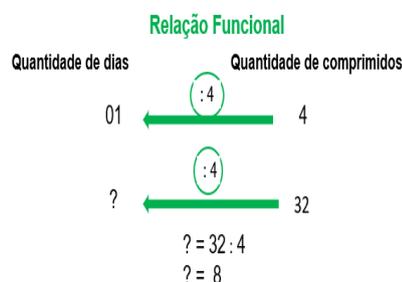


Resposta: Marta tomará 03 comprimidos por dia

**Proporção Simples/Divisão partitiva**

**Situação B**

Para ficar boa de uma doença, Ana tomou 32 comprimidos. O médico mandou Ana tomar 4 comprimidos por dia. Quantos dias este tratamento durou?



Resposta: Ana tomará os comprimidos em 08 dias.

**Proporção Simples/Divisão Quotitiva**

Fonte: Dados da pesquisa

*Essa forma já é mais clara* (professora Alice).

*Vocês podem trabalhar com uma das duas, o escalar multiplicativo e a relação funcional* (pesquisadora)

Como já tínhamos encerrado o nosso tempo, ao final do encontro, distribuímos uma folha com 09 situações (APÊNDICE 02) e solicitamos aos participantes que distinguíssem quais delas sugeriam uma divisão por partes ou uma divisão por quotas e que escolhessem uma de cada para trabalhar com seus estudantes de uma só turma, as quais iríamos recolher de suas mãos para correção e análise antes do próximo encontro. Todos concordaram com a proposta.

Analisando o ocorrido na perspectiva de Ball, Thames e Phelps (2008), é possível observar que nem todos os participantes conseguiam diferenciar as operações de pensamento envolvidas nas duas situações. Consideramos ser necessário ainda para esse grupo retomar as discussões uma vez que, segundo esses autores, a falta de conhecimento especializado sobre as ideias que envolvem a divisão, pode limitar a compreensão das estratégias utilizadas pelos seus alunos ou a proposição de outras questões envolvendo as duas ideias. Acreditamos que, pela não ampliação do conhecimento do conteúdo especializado dos docentes, o conhecimento pedagógico desse conteúdo (do estudante e do ensino) venha a ser prejudicado. Todavia, acreditamos que os professores distinguiriam os dois tipos de situações e trariam os resultados para a discussão.

### 5.3 Do grupo de estudos para a sala de aula e da sala de aula para o grupo de estudo: a prática em foco

Este tópico está dividido em oito momentos dos encontros com os participantes, por tratar-se de ações posteriores às atividades discutidas no grupo e utilizadas pelos professores para aplicação em sala de aula e retorno ao grupo para discussões e reflexões. *Iniciamos* com os registros dos depoimentos gerados após a aplicação de duas situações de divisão (por partes e por quota) escolhidos pelos professores, entre uma lista de dez com essas características. No *segundo momento*, tratamos da apresentação de uma estratégia para a introdução do ensino dos procedimentos de cálculo da divisão com a ideia da distribuição, utilizando dinheirinho de papel para trabalhar a divisão por partes. No *terceiro momento*, descrevemos uma atividade prática aplicada com o uso do dinheirinho de papel por duas professoras. No *quarto momento*, para reflexão em grupo, analisamos os depoimentos gerados com a apresentação dessa atividade prática. No *quinto momento*, apresentamos esquemas dos estudantes de uma professora do grupo, ao resolver uma situação de divisão por quota. No *sexto momento*, trabalhamos a escala de Cuisenaire como uma estratégia envolvendo a ideia de divisão por quotas. Enfim, no *sétimo momento*, retornamos com a abordagem de Vergnaud (1983, 2009) acerca das estruturas multiplicativas, em específico a operação de divisão, encerrando no *oitavo momento* com uma avaliação final das ações do grupo de estudos na fase posterior a Formação OBEDUC/E-Mult.

#### *Primeiro momento – Situações aplicadas, desempenhos e esquemas dos estudantes*

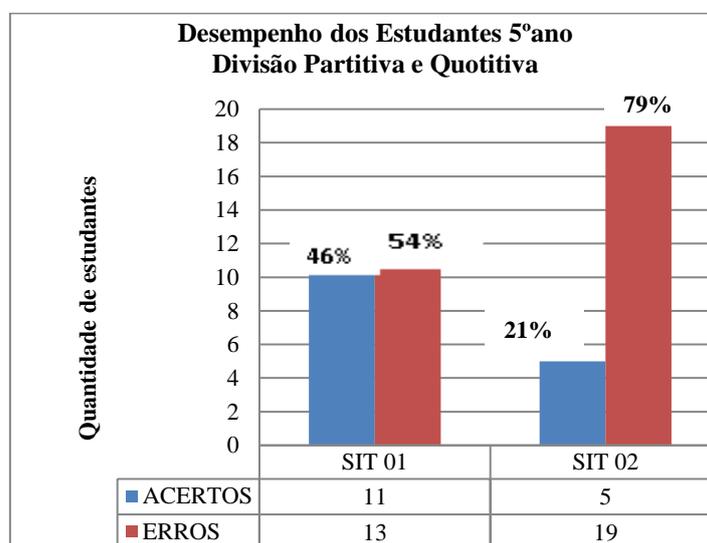
As duas situações aplicadas aos estudantes sugeriam a divisão por partes (Situação 1) e a divisão por quotas (Situação 2). São elas:

- *Situação 1: João tem 30 figurinhas e quer dividir igualmente com os seus 6 amigos. Quantas figurinhas cada um dos seus amigos vai receber?*
- *Situação 2: João tem 30 figurinhas e vai dar 5 figurinhas para cada um dos seus amigos. Quantos amigos de João ganharão figurinhas?*

Retomamos com as definições estudadas sobre a *divisão por partes* que representam o ato de dividir quantidades de naturezas diferentes ou busca do valor unitário e a *divisão por quotas* como o ato de dividir quantidades de mesma natureza ou busca de quantidade de unidades. Com essas definições trabalhadas com os participantes, iniciamos as discussões sobre o desempenho dos alunos de uma das professoras, selecionando alguns depoimentos após a entrega dos resultados, em forma de gráficos os

quais a pesquisadora havia analisado anteriormente, constando o número de acertos e erros nas situações aplicadas. A Figura 35 apresenta o modelo de gráfico distribuído como forma de representar esses resultados quanto ao desempenho dos alunos dos participantes do grupo

**Figura 35** - Desempenho dos estudantes de uma das professoras acerca das situações de divisão por partes e divisão por quota



**Fonte:** Acervo pessoal.

*O que eu queria que vocês pensassem nesse primeiro momento é sobre como foi o desempenho dos estudantes em relação às situações de divisão por partição e divisão por quota para fazermos uma reflexão. O que vocês percebem que aconteceu em suas turmas quanto ao desempenho dos seus alunos ao aplicar as situações proposta a eles? (pesquisadora).*

As professoras analisaram seus gráficos de forma individual.

*Na minha, foram sete acertos, 39 por cento [professora Janaína].*

*O meu foram 11 acertos e 13 erros [referindo-se à Situação 1] (professora Raíssa).*

*Os meus acertaram 39 por cento (professora Rosa).*

Após todos citarem seus resultados, a pesquisadora iniciou as discussões.

*Os alunos da professora Jamille, obtiveram mais de 70 % de acertos nas duas situações e os outros, menos de 50%. Quanto aos esquemas que observei no geral, alguns alunos fizeram a divisão (referindo-se ao algoritmo), outros representaram em desenhos cada situação e também acertaram a resposta. Outros deixaram em branco (pesquisadora).*

*Eu percebo que, na minha sala, na atividade que fizemos esta semana, que meus alunos precisavam ver mais multiplicação. Eu fiz até como diagnóstico, para ver como eles estavam, e vi que nem multiplicação eles não sabiam ainda. Assim, eles têm noção de multiplicação sim, mas pra armar e precisar fazer a conta, multiplicar, ele não sabe ainda não (professora Janaína).*

*Podemos pensar que essa dificuldade em multiplicação acontece por quê? (pesquisadora).*

*No meu modo de pensar, eles não gostam, na hora que olham os números, eles querem logo somar ou diminuir não é, Janaína? Os meninos não querem pensar (professora Larissa).*

*Por exemplo, eu penso assim, eles chegam no quarto ano sem saber multiplicação, no caso, é no quarto ano que eles devem aprender multiplicação?* (professora Janaína).

*Não* (responde professora Raíssa).

*Porque, se eles têm que aprender a multiplicação antes de chegar no quarto ano, então, já era pra eles estarem chegando pelo menos dominando como saber armar, como saber fazer a multiplicação. Eu percebi que, na minha sala, você tira assim contado um ou outro que sabe mais ou menos, mas eu vou ter que entrar mesmo com a situação da multiplicação pra eles, a partir disso aí, poder trabalhar a divisão. Por que ele não vai fazer uma conta de dividir se ele não sabe fazer uma conta de multiplicar, entendeu? Porque precisa né?* (professora Janaína).

*É, o que eu percebi assim quando eu entrei nos quintos anos é que eles têm “preguiça” de ler a multiplicação* (professora Raíssa).

*Como é que pode, antigamente não era assim não, os meninos chegavam na quarta série já sabendo dividir, já hoje, não é assim* (professora Larissa).

Esses depoimentos revelam que os professores dos estudantes os quais não obtiveram êxito na resolução das situações com divisão, entendem ser necessário ter uma sequência no ensino das operações matemáticas, na qual a divisão aparece como a última, depois da multiplicação que vem depois da subtração e, esta, vem após o ensino da adição. Os termos *eles chegam no quarto ano sem saber multiplicação* e *os meninos chegavam na quarta série já sabendo dividir* denotam esse entendimento acerca do encaminhamento desse ensino nos anos iniciais. Tais resultados nos fazem refletir sobre o fato de que os professores ainda sofrem influência de concepções observadas no fim do século passado. Estudos como os de Carvalho e Gonçalves e Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), por exemplo, discutem no fim do século 20 e nas últimas décadas, que a aprendizagem da disciplina matemática, nos anos iniciais, estava intimamente ligada ao ato de ensinar aritmética e, dessa forma, compreender a matemática resumia-se à memorização ou mesmo até à compreensão dos procedimentos de cálculo e da tabuada. A nosso ver, entendemos que tanto a tabuada como os procedimentos de cálculo ainda hoje se consolidam, na escola, como a forma hegemônica com que tais conteúdos são ensinados.

Outro olhar para justificar o desempenho vem com a afirmação *eles têm “preguiça” de ler a multiplicação*. A compreensão acerca do entendimento dos professores em relação ao desempenho dos alunos, ou seja, o processo da linearidade nas operações e a ausência da disponibilidade na leitura da situação para sua resolução. Depoimentos como; *vi que nem multiplicação eles não sabiam ainda [...] eles têm noção de multiplicação sim, mas pra armar e precisar fazer a conta, multiplicar ele não sabe ainda não*, denotam que o professor entende que, se seus alunos não resolvem o algoritmo, significa que não sabem fazer o processo operatório da divisão.

Correa (2004) afirma que “a experiência inicial da criança com situações de

divisão colabora para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo e este desenvolvimento permite o entendimento de contextos cada vez mais complexos de divisão, como das diferentes formas de representação e assim sucessivamente, em uma relação de causalidade recíproca”.

Entendemos que os participantes do grupo de estudos, apresentaram em seus depoimentos uma preocupação quanto a conhecer uma metodologia que permitisse dar significados aos procedimentos de cálculo. O grupo parecia preocupar-se em ter em mãos um recurso (ou uma estratégia) de ensino que levasse os seus alunos a um aprendizado significativo da divisão, para além do uso do algoritmo.

*Não posso deixar de registrar que os estudos de Vergnaud consideram que a resolução pelos algoritmos é um esquema utilizado, mas o foco na operação pode dificultar a compreensão do que acontece na situação. Entretanto, não podemos negar que o foco na operação e o uso dos procedimentos de cálculo é um processo já sedimentado, um processo de construção social. Então, como já falamos, percebi que existe uma demanda de se trabalhar o conceito da divisão com os alunos. Vocês concordam? (pesquisadora).*

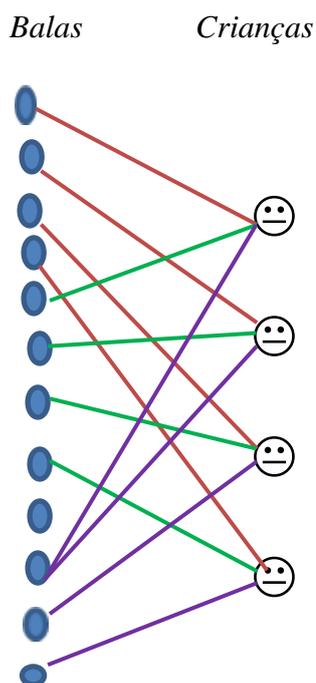
*Com certeza (professora Janaína).*

Para tanto, iniciamos com uma discussão acerca do tema divisão por meio da distribuição, por partes.

*Podemos rever como a criança dos anos iniciais aprende a dividir. O que ela traz quando se trata de fazer a operação. Na divisão (segundo a literatura que fala a respeito disso), ela pode pensar na questão de distribuição. E questiona: o que seria, então, a divisão por partes? (pesquisadora).*

A pesquisadora mostra um desenho na lousa que representa a seguinte situação: *Para distribuir 12 balas entre 4 crianças, quantas balas cada criança receberá?* A Figura 36 apresenta esse desenho, posteriormente discutido entre os participantes sobre como a criança representa a divisão em forma de distribuição, segundo a literatura que aborda este tema.

**Figura 36** – Representação da divisão por partes, com a ideia de distribuição



Fonte: Acervo Pessoal

*O que que uma criança faz? Ela vai fazer isso, ela vai dar as balas... (desenha no quadro e conta (1... 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12, são as balinhas) e vai desenhar as criançinhas que são quatro e vai fazer o seguinte. Ela tem 12 balas e dá uma bala pra uma criança, outra bala pra outra, não é isso? (Desenha a seta ligando as balas sendo distribuídas para as crianças) (pesquisadora).*

*Você vai ligando, até acabarem as balas (professora Alice).*

*Depois, você volta para a primeira criança até acabarem as balas (professora Larissa).*

*Acabou as crianças. Ainda tem bala pra distribuir. Aí ela vai novamente e começa a distribuir de novo... Não é isso, gente? (pesquisadora).*

*Então, a ideia da distribuição da criança é essa. Um pra cá, outro pra cá, outro pra cá e outro pra cá (fazendo as setas). Acabou não. Ainda tem mais essa aqui. Volta pro começo. Aí, sabe o que ela faz? Já distribuí, não tenho nada na minha mão. Agora eu vou contar quanto ela tem. Agora ela conta. Quantos você tem aí? Uma, duas, três. Aí ela conta, tem 3. Então o que ela fez? Ela fez 12 dividido por quatro crianças e deu três pra cada um e na mão dela não tinha nada (pesquisadora).*

*A criança, segundo estudiosos (da educação), registra a situação de forma pictórica (ou icônica), no início, para mostrar como ela está compreendendo a situação, nesse caso (observando o registro no quadro), pega o primeiro, esse pra um, esse pra esse, outro pra o outro, outro pro o outro. Aí descobre que sobrou e volta para distribuir de novo até acabarem as balas. Essa é a ideia de distribuir que a criança tem. Isso é uma divisão a partir da ideia de partição. É uma divisão partitiva (pesquisadora).*

*Isso eles até sabem. Mas quando chega na hora, eles não sabem (referindo-se ao fato de que os alunos não dominem o algoritmo da divisão) (professora Larissa).*

Assim como os demais, a professora Larissa reforça que o conhecimento do

conteúdo divisão depende exclusivamente da resolução do seu algoritmo. É necessário sim, a sua abordagem com os estudantes dos anos iniciais. Mas, segundo Ball, Thames e Phelps (2008), torna-se necessário ao professor desses anos *o conhecimento especializado desse conteúdo* para o seu ensino, os quais elencamos a distinção entre as ideias que envolvem a divisão por partes e por quotas, tratadas por meio do uso de situações envolvendo as duas classes, pois, ao analisar as representações simbólicas e os esquemas utilizados pelos estudantes (como aqueles utilizados para resolver a situação exposta pela pesquisadora no início das discussões), pode favorecer o seu aprendizado dos diferentes significados da operação de divisão.

*Segundo Momento – Trabalhando a divisão por partes com o auxílio do uso do dinheirinho de papel*

Levamos para o encontro, o “dinheirinho” de papel para trabalhar a divisão por partes com os participantes do grupo, ao mesmo tempo associando com o algoritmo e com a ideia do QVL (Quadro Valor Lugar).

As operações trabalhadas foram:  $369 \div 3$        $423 \div 3$        $132 \div 3$        $312 \div 3$

A dinâmica consistiu em separar notas de 100 reais para representar a centena; as de 10 reais para trabalhar as dezenas e, as de um real, as unidades (Vide Figura 33), organizado a partir do QVL. Convidamos três professoras e batizamos uma de centena, outra de dezena e outra de unidade e elas estariam encarregadas de distribuir as notas para outros três que representariam o divisor, ou seja, cada professora representando uma ordem, ficaria encarregada de distribuir aos três sujeitos, somente um tipo de nota, por exemplo, a professora Centena só distribuiria notas de 100 e, assim por diante. Separamos outro professor para ser o caixa do banco que faria as trocas sempre que necessário, explicamos que, hipoteticamente, nesse estabelecimento bancário, só havia notas de 1, 10 e 100.

**Figura 37** – Imagens do dinheirinho de papel representando a Centena, a Dezena e a Unidade, respectivamente



Fonte: Acervo pessoal.

Iniciamos vivenciando e descrevendo a operação  $369$  divididos por  $3$ . A

professora Alice recebeu três notas de 100, representando trezentos reais e um cartaz indicando que o seu nome era Centena. A professora Graça seria a Dezena e a professora Janaína a unidade.

A professora Alice, representando a Centena, distribuiu as notas entre os outros três professores. A pesquisadora pergunta: *quanto ficou para cada?* Todos responderam que cada um recebeu **uma** nota de 100 reais. A pesquisadora questiona novamente: *se eu der **uma** nota de 100 reais para cada um dos três que receberão o dinheiro, quanto teremos?* Todos respondem **três notas de 100 reais** e a pesquisadora indaga: *sobrou alguma coisa?* Todos respondem que *não sobrou nada*. Em seguida, a professora Graça – representando a Dezena – ficou com seis notas de 10 reais. Fez o mesmo que a professora Alice, distribuindo duas notas de 10 reais – dezenas – para cada e não restando nada em sua mão. A professora Janaína, representando a Unidade, recebeu nove notas de um real e distribuiu três notas para cada e não restou nenhuma nota em sua mão. Para finalizar, pedimos a todos que contassem quantos reais cada um tinha recebido. 123 reais foi a resposta. Ao mesmo tempo em que era feita a distribuição do dinheirinho de papel, eram registrados, no quadro, os números da distribuição e o resto zero, por meio do algoritmo da divisão utilizando os processos longo e curto. As outras operações também foram feitas da mesma forma utilizando o recurso da troca – os participantes iam ao banco para trocar por notas de ordem inferior.

Os depoimentos registrados pelos professores apresentam a sua avaliação quanto ao uso da estratégia do dinheirinho de papel para trabalhar o conceito da divisão por partes, a saber.

*Quero fazer uma pergunta: o aluno que não sabe a divisão, não entende ainda o processo, eu vou começar a trabalhar a divisão com eles e você acha que aprender dessa maneira não é mais difícil? Na minha opinião, para trabalhar o conceito da divisão dessa forma, parece ser mais difícil, seria bom pensar em dizer que o 1 por ser menor que 3, não pode ser dividido por 3 e “pede emprestado” o próximo (no caso da divisão de 132 por 3) e dizer: agora o 13 eu posso dividir por 3 (professora Janaína).*

Em seu depoimento, a professora Janaína reforça a maneira de se trabalhar a continuidade de uma ideia que é vista pela maioria dos professores no ensino do algoritmo da divisão, ou seja, a questão do *pedir emprestado* de uma unidade a outra para completar o número que compõe o dividendo. Vergnaud (2009) explica que:

Além das dificuldades que já vimos no caso da multiplicação, há uma que se constitui em um obstáculo incontestável para as crianças; e o caso em que o divisor, tendo  $n$  algarismos, os  $n$  primeiros algarismos do dividendo formam um número inferior ao divisor (VERGNAUD, 2009, p.189)

O autor chama a atenção para essa forma de resolver por meio de procedimentos de cálculos do algoritmo da divisão com o exemplo  $285 \div 4$

$$\begin{array}{r|l} \widehat{285} & 4 \\ \hline & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \text{p b u} & \\ 285 & 4 \\ \hline -28 & \text{p b u} \\ 005 & 07 \end{array}$$

Vergnaud (2009) afirma que “qualquer disposição que permita marcar as ordens de grandeza e, em particular, enquadramento utilizado – barras – placas, ... favorece a compreensão das operações em jogo”. A professora Janaína ao afirmar que *seria bom pensar em dizer que o 1 por ser menor que 3, não pode ser dividido por 3 e “pede emprestado” o próximo*, deixa claro que ela entende ser este o método mais fácil para se obter o resultado deste tipo de divisão. O exemplo sugerido pelo autor expressa a resolução do algoritmo, com esse mesmo entendimento, ou seja, ele afirma que

2 placas não podem ser distribuídas para 4 pessoas de modo que fiquem elas com partes iguais. E preciso então transformá-las em barras. Isto resulta em 20 barras mais as 8 que sobram, 28 dividido por 4 dá 7. Descobre-se assim, de pronto, que o primeiro algarismo do quociente é aquele das barras (dezenas). O que se segue não traz problema (VERGNAUD, 2009, p.190)

Retomando as discussões que tratam do uso da estratégia do dinheirinho de papel para resolver a operação no caso da divisão de 132 por 3, a pesquisadora discutiu que a proposta seria compreender o significado do que se estava fazendo na prática uma vez que, no dia a dia *100 reais dá para dividir por 3, o que não dá é uma nota de 100 dividir para 3 pessoas. Nesse caso, é necessário trocar por notas de dez – que seria a dezena. Na verdade, quando eu agrupo uma centena com três dezenas, tenho igualmente 13 dezenas* explicou que seria necessário trabalhar também a ideia do QVL e explicar sempre que o segundo algarismo ocupa o valor de 30 dezenas e não só o 3

*O ideal seria já começar assim? Porque eu acho que começar assim é mais difícil.* (insiste a professora Janaína).

*Não. Eu, como professora que tenho mais anos que todos vocês, pra começar, você não iria começar com reservas, e sim com operação em que não tem reservas. Você vai devagarinho, depois vai aumentando...* (professora Graça).

A dinâmica do dinheirinho de papel proporcionou aos participantes do grupo conhecer uma nova estratégia de ensino, o que motivou a preocupação dos professores quanto a essa nova abordagem do ensino dos procedimentos de cálculo para a divisão. A esse respeito, considerando a divisão por partes com a ideia de distribuição, Nunes e Bryant (1997) afirmam que distribuir é uma ação que envolve um raciocínio multiplicativo e exemplificam com uma situação envolvendo distribuir equitativamente *doces* entre o número de receptores – *crianças*. *Se há 20 doces (o todo) e quatro crianças*

*para partilhá-los (a parte), quantos doces ficarão com as crianças?* De uma forma resumida, para os autores, as relações parte-todo estão também envolvidas em distribuição e divisão, em que três elementos precisam ser considerados: o tamanho do todo, o número de partes e o tamanho das partes, que deve ser o mesmo para todas as partes. E, na distribuição, as crianças precisam entender as relações entre esses elementos. A estratégia que utilizamos (o dinheirinho de papel) com os professores se, planejadas e bem elaboradas, poderiam promover um aprendizado das relações entre os valores estabelecidos, que levasse aos alunos a compreensão do algoritmo da divisão, estabelecendo as relações existentes entre seus componentes.

Para tanto, convidamos os participantes a replicarem a mesma atividade com seus estudantes, a partir de um planejamento prévio do uso do dinheirinho de papel e as operações de divisão a serem trabalhadas. As professoras Alice e Raíssa dispuseram-se a usar essa estratégia em uma de suas turmas e a pesquisadora solicitou autorização para filmar sua prática.

Apresentamos, no terceiro momento, uma descrição breve da atividade do dinheirinho de papel aplicada e registrada, em vídeo, pela pesquisadora.

#### *Terceiro Momento – Descrição da atividade prática das professoras Alice e Raíssa*

As professoras Alice e Raíssa, levaram para uma de suas turmas a estratégia que fizemos no grupo (dinheirinho de papel) e, da mesma forma, replicaram com seus alunos. A professora Alice “treinou” com seus filhos e com a orientação da pesquisadora. Na semana seguinte, escolheu uma turma e executou a atividade. A professora Raíssa, diferentemente, planejou individualmente a atividade e aplicou na semana seguinte ao encontro do grupo de estudos.

A professora Alice, ao iniciar a atividade, solicitou que um dos alunos lesse um poema sobre divisão que chamava a atenção acerca da forma equitativa de distribuição com a frase; “dividir de forma justa e com retidão” explicando que essa forma é a ideal quando se trata de dividir igualmente entre todos, utilizando termos como *partir, repartir, agrupar, separar e dividir* de forma justa. O dinheirinho de papel também foi utilizado para trabalhar o sistema monetário com os alunos durante a atividade. As operações foram as mesmas que foram feitas com os participantes do grupo e o entrosamento da turma na aplicação da estratégia foi considerada boa. A professora Alice desenvolveu das duas formas, registrando, no quadro, as operações e, à medida que ia distribuindo as moedas do dinheirinho de papel, ia resolvendo o algoritmo, chamando a atenção para os termos

da divisão: dividendo, divisor, quociente e resto, confirmando os valores na moeda (100 reais para centena, 10 reais para a dezena e 1 real para a unidade) para as operações que fez com seus alunos, registrado no quadro cada uma delas e dialogando com a turma o resultado da divisão e os valores que tinham em mãos. O mesmo ocorreu com a professora Raíssa com a participação e o envolvimento da turma durante a atividade do dinheirinho de papel.

#### *Quarto Momento – Análise das professoras quanto à aula prática*

Enfim, fizemos a apresentação, para reflexão em grupo, de partes do vídeo da aula prática desenvolvida utilizando o dinheirinho de papel pelas duas participantes do grupo de estudos. Iniciamos solicitando à professora Alice, que relatasse como foi o planejamento dessa atividade antes de aplicá-la aos seus alunos. Em seguida, a professora Raíssa relatou como aconteceu e o que ela percebeu durante a aplicação da atividade.

*Assim, eu cheguei em casa e treinei com os meninos (filhos) e três almofadas. Tive dúvidas quando fui trabalhar com o 12 (referindo-se à operação 123:3). Mas lembrei que a pesquisadora tinha comentado que o 12 na operação refere-se a 12 dezenas. Mas, na hora que fiz com a turma, já tinha entendido e fiz certo. Foi muito bom. Eu gostei da atividade. Eles (os alunos) gostaram tanto que pediram: tia traz mais, pra gente fazer em grupo, mas a senhora não vai lá pra frente, é a gente que vai apresentar (professora Alice).*

*Percebi o movimento deles, também deu pra perceber que tem alunos que ainda não conhecem o dinheiro (todas as moedas). Ainda têm essa dificuldade. Apliquei em outras salas também. Foi assim uma aula muito boa. Eles se envolveram. No dia, eu me “perdi” um pouco. Comentei com eles porque eles perceberam e disse que a gente erra também, e que ninguém é dono do saber. Tem aluno esperto. Observa tudo. Eles são muito observadores. A gente tem que ficar atento ao que fazemos ou planejamos em nossas aulas, senão a “coisa pega” (professora Raíssa).*

*Conseguiram fazer a relação da atividade do dinheirinho com o algoritmo da divisão? (pesquisadora).*

*Sim. Conseguiram sim (professora Raíssa).*

*Fizemos um resgate do que foi filmado e queremos apresentar a todos para nossa reflexão: assistindo à filmagem: a professora Raíssa fez a leitura de um poema sobre a divisão. Com a leitura, foram feitas várias perguntas aos alunos. Alguns respondiam, outros não. Na hora da aplicação, foi feito primeiro o algoritmo [369 divididos por 3] e depois aplicou a atividade do dinheirinho. Esqueci de levar a “plaquinha” que fixaria no aluno obedecendo a ordem do QVL (centena, dezena e unidade). Isso não deveria ter faltado. Quando colocamos essa indicação, fica entendido por todos que aquela posição em que o aluno está, é de uma centena ou de uma dezena, ou de uma unidade. Improvisamos, na hora, isso. Consideramos isso muito importante. A professora Raíssa fez primeiro o algoritmo e depois utilizou a estratégia (pesquisadora).*

*Esse tipo de divisão uma divisão por partes, não é? (relembra professora Alice).*

*Exatamente. Estão distribuindo em partes o que têm em mãos igualmente com os que estão recebendo. As crianças pegaram o dinheirinho e foram distribuindo do jeito delas. Vejam o que aconteceu? Uma distribuiu um a um. A outra criança já veio com o valor na cabeça e entregou a quantidade toda para cada um. Aconteceu também na turma da professora Alice*

(pesquisadora).

*Outra coisa que é importante: quando fiz a primeira vez, na divisão onde tinha que acrescentar o zero, eu ia me atrapalhar (professora Raíssa).*

*O que entendo que era preciso, eu ter sentado com você (dirigindo-se para professora Raíssa) para planejarmos juntas essa atividade. Isso eu também me culpo por não ter feito. Essas continhas dão uma certa confusão mesmo na hora de dividir. É bom quando outro professor for aplicar pela primeira vez a atividade, que faça antes todas as possibilidades, da mais simples à mais complexa (pesquisadora).*

*Tenho uma experiência com uma turma quando fiz uma atividade com eles. Eles perguntaram se eu ia dar o visto no caderno deles antes ou depois de socializarmos os erros (ou corrigirmos). Eu aproveitei e disse a eles que os erros são necessários para que aprendamos também com eles. Já se tornou rotina, a socialização dos “erros” com minhas turmas (professora Alice).*

Diante dos depoimentos das professoras com o grupo e, por se tratar de uma atividade envolvendo a operação de divisão, o uso do algoritmo e a busca das professoras em inserir, na sua aula, uma estratégia que favoreça o entendimento das relações existentes entre o distribuir e dividir por partes, analisamos essa prática como um fator gerado a partir da necessidade de aprimorar o aprendizado dos seus estudantes quanto ao conceito dessa operação. Em um primeiro momento, a fala das professoras como: *Assim, eu cheguei em casa e treinei com os meninos (filhos) (professora Alice) e a gente tem que ficar atento ao que fazemos ou planejamos em nossas aulas (professora Raíssa)* indica que, diante de uma atividade prática, há necessidade de um planejamento prévio de forma a atingir o objetivo a ser alcançado. As duas professoras demonstram um entendimento sobre o ato de planejar suas atividades a ponto de se sentir seguro ao lidar com aquele conhecimento necessário para o ensino dos anos iniciais. A utilização do QVL e do Sistema Monetário utilizado nessa atividade foi também um item a mais a ser explorado pelas professoras na sua aplicação.

A exploração da classe divisão por partes não ocorreu, de forma explícita, mas, intuitivamente, favoreceu o entendimento da professora Alice, no momento do seu relato ao grupo, conforme seu depoimento: *esse tipo de divisão, uma divisão por partes, não é?* Outro detalhe observado durante as discussões foi a ênfase dada em relação ao trabalho com os “erros” dos estudantes. A professora Alice, em seu depoimento, *já se tornou rotina, a socialização dos “erros” com minhas turmas.*

Essa experiência vivenciada pelas professoras e compartilhada com o grupo de estudos corrobora com as ideias de Zeichner (1993), quando discute acerca de que, quando os professores cultivam, de forma ativa, uma postura reflexiva, isso resulta em um reconhecimento de que esse profissional tem muito a nos “ensinar” por meio da análise de suas experiências, sobre o ensino e sobre a sua reflexão coletiva a respeito

dessas experiências.

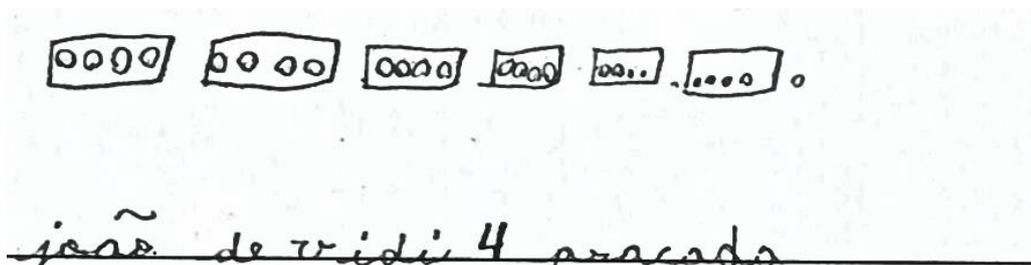
Com o objetivo de proporcionar reflexões acerca da divisão por quotas, levamos para o grupo esquemas dos estudantes ao resolverem as situações que sugeriam essa classe de divisão por meio de desenhos (pictóricos) e relatamos, no quinto momento, a seguir.

*Quinto Momento – Discussões acerca de três esquemas dos estudantes de uma professora ao resolver a Situação 2, registrada no primeiro momento*

Com o objetivo de refletir sobre o conhecimento do conteúdo e do estudante, assim como propõe Ball, Thames e Phelps (2008), apresentamos aos participantes do grupo de estudos, os esquemas dos estudantes da professora Larissa ao resolver a Situação 2: *João tem 30 figurinhas e vai dar 5 figurinhas para cada um dos seus amigos. Quantos amigos de João ganharão figurinhas?*

Registramos alguns depoimentos oriundos dessas discussões, após a apresentação dos slides como mostram as Figuras 38, 39 e 40, respectivamente.

**Figura 38** -Esquema 1 apresentado em slides



**Fonte:** Dados da pesquisa.

*Essa é uma situação envolvendo divisão .... (pesquisadora).*

*Divisão por quota. Ele já deu o todo e já especificou o quanto desse todo (professora Alice).*

*Quer saber quantos amigos vão ganhar essas cinco figurinhas. Duas grandezas que estão sendo trabalhadas com os valores. Olhem o que os alunos da professora Larissa fizeram. Tentem interpretar os desenhos deles (pesquisadora).*

*Ele fez errado esse aí. Não está errado? (professora Alice).*

*Sim. Mas vamos analisar o esquema em si (pesquisadora).*

*Ele fez o agrupamento. Ele agrupou (professora Alice).*

*Ele fez o agrupamento de quanto? (pesquisadora).*

*Ele, ao invés de agrupar de cinco, agrupou de quatro (professora Alice).*

*Mas agrupou. A ideia da quota está aí? (pesquisadora).*

*A ideia tá, mas a interpretação que ele fez está errada (professora Alice).*

*Quantas figurinhas ele agrupou? Vocês conseguem contar?* (pesquisadora).

*Agrupou de quatro e sobrou uma bolinha lá fora* (professora Alice).

*Vocês elaboraram alguma hipótese para o que ocorreu?* (pesquisadora).

*Estou pensando agora.... acho que ele pode ter feito mentalmente, achou o seis e, quando representou, se equivocou* (professora Alice).

*Verdade, não tinha pensado nisso* (professora Raíssa).

*Concordo. Também concordo* (professora Larissa, seguida das demais).

*E a resposta do aluno?* (pesquisadora).

*João dividiu quatro pra cada uma das seis pessoas, mas não disse qual seria a resposta. Nós é que estamos interpretando assim* (professoras Alice e Larissa lendo juntas).

*O raciocínio que ele teve de quota valeu, porém ele não colocou os valores de cada um, não prestou atenção ao enunciado, nas grandezas* (professora Alice).

No fim dessa discussão, a pesquisadora chamou a atenção do grupo para o fato de que estratégias erradas podem nos dar informações acerca de aspectos que ainda não foram compreendidos.

*Observei que a principal dificuldade do aluno foi, aparentemente, a representação do seu esquema de ação. É importante atentarmos para isso, ao analisar o que ele fez e isso faz com que possamos elaborar melhor um esquema de intervenção que venha ao encontro das suas dificuldades* (pesquisadora).

O depoimento da professora Alice: *acho que ele pode ter feito mentalmente* foi uma forma de avaliar o conhecimento do estudante acerca do que ele sabe sobre a Situação 1, a ele apresentada. O papel da professora Alice foi central e as demais professoras foram-se inserindo na discussão aos poucos. Inicialmente, elas analisaram o tipo de representação e perceberam que nele estava presente a ideia de quota e, só depois, inferiram. Isso pode ter ocorrido, pois o primeiro aluno fez mentalmente.

Vergnaud (1988) afirma que:

o conhecimento dos estudantes tanto pode ser explícito, no sentido que ele pode expressá-lo de forma simbólica (linguagem natural, esquemas e diagramas, sentenças formais, etc) quanto implícito, no sentido que os estudantes podem usá-lo em ação, escolhendo operações adequadas, sem, contudo, conseguirem expressar as razões dessa adequação (VERGNAUD, 1988, p.141).

O conjunto de Invariantes (I) e o conjunto de representações simbólicas (R) estão relacionados à representação que sustenta um conceito. O que se torna difícil para o aluno e para o professor, na visão de Gitirana et al. (2014, p.14) é estabelecer essa interação entre esses dois aspectos do pensamento (I) e (R). Para as autoras, não é um ato simples, depende de muito esforço para ambos.

Seria muito interessante um maior aprofundamento do tema sobre o ocorrido, que, devido à limitação do tempo, isso não foi possível nas discussões.

O próximo esquema da Figura 39 apresenta outro tipo de representação usada para resolução da Situação 2, que foi analisado pelos participantes do grupo de estudo.

**Figura 39** - Esquema 2 apresentado em slides



**Fonte:** Dados da pesquisa.

*Ele fez os bonequinhos e desenhou as figurinhas. Foi mais criativo (professora Raíssa).*

*E esse daí acertou (professora Alice).*

*Cinco, seis figurinhas pra cada (professora Raíssa).*

*Ele respondeu ainda "João vai dar para 6 amigos". Seis amigos vão receber as figurinhas (professora Alice).*

*Vocês conseguem perceber a ideia de quota nesse esquema? Ele agrupou as figurinhas ou ele distribuiu? (pesquisadora).*

*Ele fez a partição, porque ele botou 5 e 5 e foi pegando, puxando. Desenhou as 30 figurinhas. Ele não agrupou (professora Alice).*

*Como ele conseguiu esses seis amigos? (pesquisadora).*

*Pra mim, esse já tem a noção da multiplicação, do algoritmo. Ele não representou ali, mas ele já sabe que existe um número que, multiplicado por 5, vai dar 30 [referindo-se ao cálculo mental] (professora Alice).*

*Interessante, porque a maioria dos alunos está resolvendo a situação dessa forma, por mais que já ensinou o algoritmo, mas eles estão indo por essa forma aí (referindo-se aos desenhos). Essa questão caiu na prova e quase todos resolveram com bonequinhos, com agrupamento de bolinhas.... Conseguem achar a resposta, mas ainda é dessa forma que resolvem (professora Raíssa).*

No fim da discussão, a pesquisadora retomou o fato de que o aluno poderia, inicialmente, ter agrupado, para depois indicar os amigos e, isso, só saberíamos se entrevistássemos os estudantes sendo esse um aspecto importante a ser observado pelo professor: o professor precisa também ser um investigador na sala de aula.

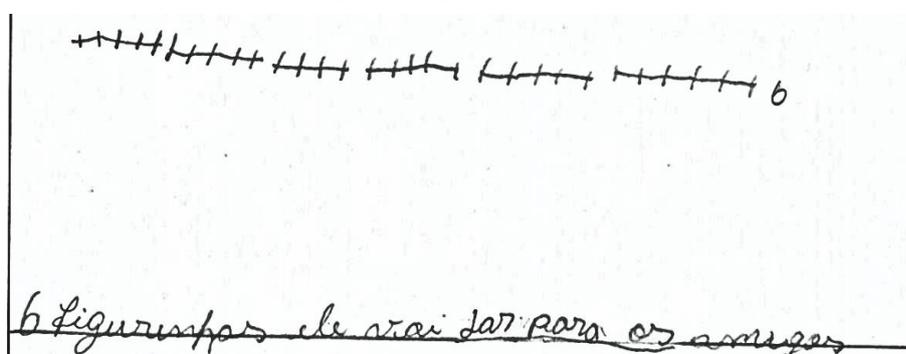
A pesquisadora procurou chamar a atenção dos participantes para uma possível representação da ideia de quota, mas o grupo de professores mostrou estar fortemente ligado em priorizar os procedimentos de cálculo, como mostram os depoimentos: *esse já*

tem a noção da multiplicação, do algoritmo ou por mais que já ensinou o algoritmo, mas eles estão indo por essa forma aí (referindo-se aos desenhos).

Os estudantes, na visão de Vergnaud (1988), podem usar um procedimento escalar numa situação que envolve a divisão por quota e para qualquer tarefa de valor desconhecido. O autor enfatiza que a complexidade das situações depende da sua estrutura, do contexto envolvido, das características numéricas dos seus dados e da sua apresentação; mas o significado desses fatores depende basicamente do nível cognitivo dos estudantes. Essa compreensão torna-se necessária no momento de analisar o esquema utilizado pelo estudante ao resolver uma situação.

Apresentamos para o grupo, na Figura 40, o esquema 3 do estudante ao resolver a Situação 2.

**Figura 40** - Esquema 3 apresentado em slides



Esse daí já é quota. Ele agrupou. Botou os tracinhos e fez os agrupamentos de 5 em 5. Ele separou as figurinhas e contou quantos grupos ele conseguiu formar com aquela quantidade (professora Alice).

A criança quando sabe mais ou menos a noção da leitura, ela lê e vê ali duas grandezas e ali ela vai saber que vai ter que agrupar. Ela sempre pega o maior, coloca na quantidade e vai, se tá pedindo ali figurinhas. Vou pegar de quantas em quantas? Aí pegou de 5 em 5. Ele deu a resposta em grupo, ele não deu a respostas em amigos. Ele contou os grupos. Os grupos representam cada amigo (professora Alice).

Ele desenhou as 30 figurinhas (no caso em forma de tracinhos). Colocou tracinhos de 5 em 5 e contou quantos grupos de cinco ele tinha formado. A divisão por quota está muito clara no desenho dessa criança. Ele entendeu a proposta da situação quanto ao agrupamento das figurinhas. Vocês concordam? O algoritmo que representa isso é o 30 dividido por 5 igual a 6, sem sobrar resto (pesquisadora).

No que diz respeito ao registro do aluno como resposta ao que lhe foi perguntado, ou seja, ~~6 figurinhas de vai dar para os amigos~~ não está correta, pois a pergunta feita foi *quantos amigos de João ganhariam as figurinhas*, o que foi observado pela professora Alice ao afirmar *Ele deu a resposta em grupo, ele não deu a respostas em amigos*, mesmo que a ideia da quota estava sendo registrada no desenho do aluno e observada pela professora.

No fim, a pesquisadora retomou as ideias de Vergnaud (1988) presentes nas representações apresentadas nessa sessão.

A partir das discussões geradas no quinto momento, observamos que os participantes apresentaram um possível avanço em sua compreensão quanto ao conhecimento dos alunos acerca da divisão por quotas, registrado nas suas representações pictóricas e a possibilidade de avançar nesse entendimento, pois isso favoreceria conhecer os processos pelos quais os pensamentos dos seus estudantes desenvolvem-se na resolução das situações envolvendo a operação de divisão. Esse é um tipo de conhecimento que Ball, Thames e Phelps (2009) denominam de conhecimento do conteúdo e dos estudantes e os definem como um domínio específico que articula o conhecimento dos conteúdos com o conhecimento sobre os alunos em relação ao tópico matemático estudado (no caso, a divisão).

Borba e Silva (2016) afirmam que os professores que detêm o conhecimento específico (ou especializado) do conteúdo divisão e das ideias que os seus alunos têm sobre essa operação, conhecem os principais erros que eles cometem ao realizarem divisões e também sabem como podem auxiliá-los na superação de suas dificuldades. Foi o que a professora Alice descreveu, ao analisar o Esquema 3, da Figura 40: *esse daí já é quota. Ele agrupou. Botou os tracinhos e fez os agrupamentos de 5 em 5 ou pra mim, esse já tem a noção da multiplicação, do algoritmo.* Ou ainda, referindo-se ao Esquema 2, da Figura 39: *Ele não representou ali (referindo-se ao desenho), mas ele já sabe que existe um número que multiplicado por 5 que vai dar 30 (cálculo mental).*

Vergnaud (2009, p.15) afirma que o conhecimento aprofundado do conteúdo a ensinar permite ao professor compreender melhor os processos de resolução utilizados pelos alunos e as suas dificuldades.

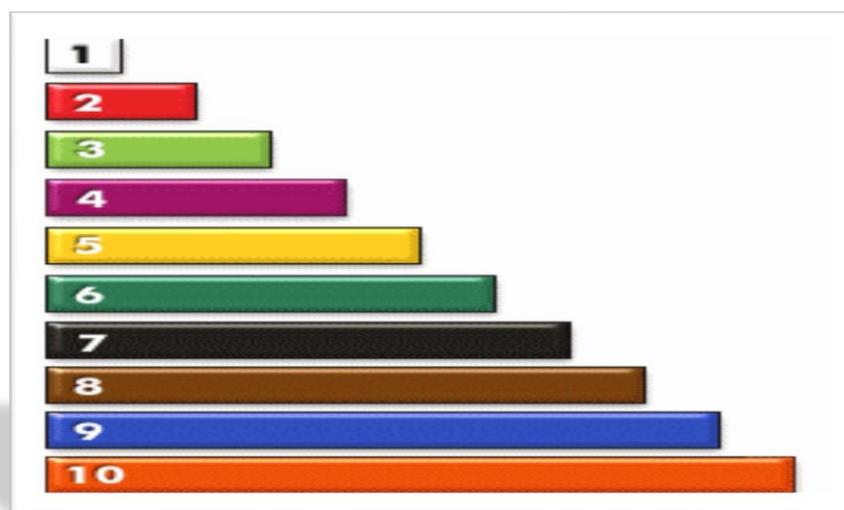
Diante disso, é possível perceber nesse episódio a partir dos depoimentos dos participantes do grupo, a importância de uma análise apurada dos esquemas organizados pelos estudantes e, com isso, oportunizar aos professores manter uma atitude reflexiva em relação ao ensino dos conceitos das operações envolvidas nas situações a eles apresentadas.

O sexto momento, a seguir, trata do uso de uma estratégia que permite favorecer o ensino da classe divisão por quota e que foi trabalhada inicialmente com os participantes do grupo de estudo neste encontro.

*Sexto Momento – Trabalhando a divisão por quotas com o auxílio do uso da Escala de Cuisenaire*

Atendendo à solicitação dos participantes do grupo, apresentamos em slides, a utilização de um material de apoio, que sugere a manipulação do conceito da divisão utilizando a ideia de quota na sua fase introdutória do ensino: A escala de Cuisenaire. Explicamos tratar-se de um material criado por um professor belga, Georges Cuisenaire Hottelet (1891-1980), depois de ter observado a dificuldade de um aluno, que ajudasse no ensino dos conceitos básicos da matemática. Ele cortou algumas régua de madeira, em 10 tamanhos diferentes, e pintou cada peça de uma cor tendo, assim, surgido a Escala de Cuisenaire, como mostra a Figura 41.

**Figura 41** – Escala de Cuisenaire apresentado em slides



**Fonte:** Acervo pessoal.

A seguir, entregamos o material feito na cartolina, no formato de tiras em cores diferentes, conforme as medidas da escala de Cuisenaire. Pedimos que o grupo observasse a sequência e a possibilidade da percepção de sucessor e antecessor, uma vez que cada número poderia ser representado pelo seu antecessor mais a medida que representava 1. Comentamos que essa barrinha poderia ser utilizada para quaisquer operações, mas iríamos nos aprofundar na divisão.

*Quantas vezes a barra verde clara (3) cabe na barra verde escura (6)? (pesquisadora).*

*Duas vezes (professora Janaína).*

*A verde claro é a parte... três (professora Janaína).*

*E o que representa a barra verde escuro? (pesquisadora).*

*É o todo... seis. (professora Janaína).*

*Vamos montar o algoritmo e tentar entender (pesquisadora).*

*Seis dividido por 3. Como você diz: quantos três cabem nesse seis? (professora Janaína).*

*Olhem só, que operação você usou para fazer isso? (pesquisadora).*

*A divisão com a ideia de medida (professora Janaína).*

*Ok. E o que representa o 3? E o 6? E o 2? (pesquisadora).*

*O 3 é o divisor, o 6 é o dividendo e o 2 é o quociente (professora Larissa).*

A pesquisadora monta o algoritmo no quadro e questiona se sobrou algo na representação da escala de Cuisenaire, quanto à operação feita e explica a relação disso com o zero, no resto da divisão.

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 3} \\ 0 \quad 2 \end{array}$$

A discussão continua com outro questionamento.

*Quantos vezes a barra vermelha cabe na barra marrom? Ou quantos 2 cabem em 8? (pesquisadora).*

*Dez? (professora Raíssa).*

*Quatro (professora Larissa).*

*Sobrou alguma coisa? (pesquisadora).*

*Não (professora Raíssa).*

Em outro momento, foi trabalhada a questão do resto diferente do zero.

*Como seria o 15 dividido por 4, ou seja, quantos 4 cabem no 15? (pesquisadora).*

*Aí vai trabalhar a ideia de medida (apontando para a barra laranja somada com a barra amarela) (professora Janaína).*

Após algumas tentativas com as barras, os professores observaram ser possível a divisão, porém com resto, concluindo com a seguinte fala:

*Quatro vezes três é igual a 12 e “vai” ao 15 com o 3 de resto (professora Janaína).*

Os participantes fizeram uma avaliação da Escala de Cuisenaire como uma estratégia interessante a ser utilizada para introdução ao ensino da divisão.

*Gente, é bom demais trabalhar com isso aqui (referindo-se à escala de Cuisenaire). Numa aula de divisão, os meninos (alunos) vão adorar isso (professora Janaína).*

Percebemos, nesse quarto momento, que o grupo identificou essa forma como mais uma para ampliação de conhecimentos, quando avaliou a utilização do Cuisenaire como mais uma estratégia de ensino. Depoimentos como: *o 3 é o divisor, o 6 é o dividendo e o 2 é o quociente* ou *“quatro vezes três é igual a 12 e “vai” ao 15 com o 3 de resto”*, nessa discussão, deixam claro o entendimento do professor quanto ao procedimento de cálculo utilizando o algoritmo. O que entendemos por ampliar esse conhecimento é que ele possa estabelecer uma relação desses componentes do algoritmo, utilizando-se de ferramentas como a que trabalhamos, nessa sessão, com seus estudantes.

Estudos como os de Correa (2004), por exemplo, apontam para uma série de pesquisas, nas últimas décadas, sobre o crescente interesse no desenvolvimento de conceitos matemáticos pelas crianças. Tais estudos sublinharam a relevância das estratégias intuitivas da criança para lidar com tais conceitos matemáticos mesmo antes que eles lhes fossem formalmente ensinados na escola, tais como o cálculo mental e o agrupamento, que são exemplos do uso dessas estratégias. A autora declara também que, apesar da diversidade de propósitos e metodologias, esses estudos mostraram que as crianças são capazes de resolver problemas de divisão muito antes de serem formalmente ensinadas sobre esse conceito na escola. Diante desse fato, a utilização de estratégias que impulsionem a produção de esquemas associados ao que a criança traz em sua bagagem intuitiva, pode proporcionar ao professor dos anos iniciais o ensino da divisão com significados, assim como o entendimento dessa operação e de suas relações com as demais operações matemáticas.

Esses momentos de apresentação das estratégias para o ensino da divisão deixaram claro o que afirmam os autores Costa, Santos, Pessoa e Teles (2018) quanto “ao organizar o trabalho com o conteúdo de divisão nos anos iniciais do Ensino Fundamental auxilia o aluno a reconhecer que não há uma estratégia única para realizar o cálculo. Além disso, desenvolve nele a capacidade de escolher a estratégia mais eficiente para diferentes situações”.

Ao analisar os depoimentos dos professores ao ocorrido neste encontro, em relação ao conhecimento pedagógico do conteúdo, sobretudo do conteúdo do ensino e do estudante, conforme descrito por Ball, Thames e Phelps (2008), percebemos que os conhecimentos necessários ao professor para o ensino da divisão, deveriam incluir o uso de materiais didáticos que permitissem favorecer a compreensão desse conteúdo pelos estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental.

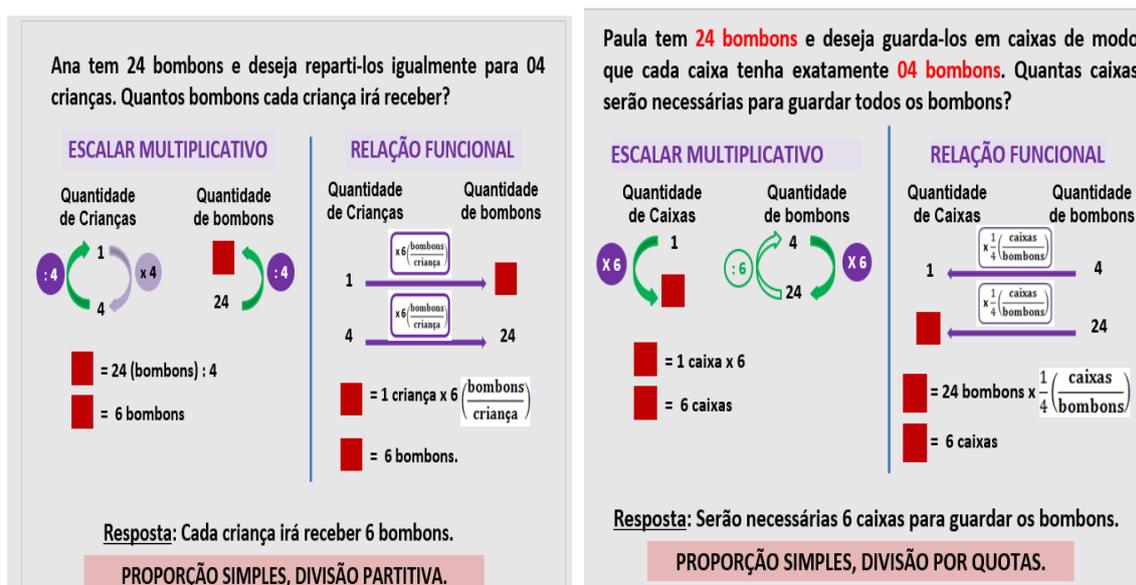
Para finalizar a sessão, apresentamos o registro dos depoimentos, gerados no *sétimo momento* em que a pesquisadora levou alguns slides com resolução de situações a partir do uso da proporcionalidade simples, defendidas por Vergnaud (1983, 2009).

#### *Sétimo momento – Utilização de slides com as categorias de Vergnaud*

Com o objetivo de finalizar as discussões em grupo, a pesquisadora retomou as categorias de Vergnaud (1983, 2009), em slides, chamando a atenção sobre sua utilização na resolução das situações envolvendo a multiplicação ou divisão, diversificando, assim, a maneira de trabalhar as relações entre as grandezas existentes em cada uma delas e

proporcionar aos professores rever essa modalidade de resolução de situações envolvendo as estruturas multiplicativas visto na Formação OBEDUC/E-Mult no ano anterior, dada a importância do reconhecimento dessas categorias para o ensino dos anos iniciais. A Figura 42 expõe essas informações e, com detalhes, explicamos aos participantes deste encontro.

**Figura 42-** Slides com duas situações de Divisão e suas classes, resolvidas utilizando as categorias de Vergnaud (1983, 2009) em sua resolução



**Fonte:** Acervo pessoal.

Devido ao pouco tempo que tínhamos para o encerramento do encontro, não foram geradas discussões pelos participantes do grupo, referindo-se a este momento. Em seguida, a pesquisadora sugeriu que os participantes avaliassem o que tinha ocorrido nos encontros de uma forma oral e escrita (APENDICE 03). Os depoimentos estão registrados no oitavo momento que representa também o momento de encerramento de ações do processo formativo realizado no interior do grupo de estudos, no ano 2016.

#### *Oitavo momento – Avaliação final das ações do grupo de estudos, em 2016*

Os registros, a seguir, referem-se a uma avaliação à qual todos os participantes do grupo deste encontro pronunciaram-se, relatando a importância das suas ações formativas e o que foi gerado na ampliação de seus conhecimentos sobre cada tópico estudado, bem como a percepção do entendimento do que o seu aluno sabe, por meio dos esquemas que eles apresentaram e da sua participação nas estratégias desenvolvidas por eles.

*O objetivo desta sessão é encerrar as atividades do grupo de estudos. Não o grupo, mas as atividades que foram organizadas. Começou com uma proposta de pesquisa, mas o que aconteceu aqui, foi para mim, algo tão prazeroso, que foi para além disso. Essa vivência nos fez repensar, cobrar de mim, enquanto formadora, outra postura, na questão de*

*compartilhar conhecimentos, práticas e, para mim, esse grupo ficou realmente marcado positivamente (pesquisadora).*

*Eu só acho errado encerrar sem uma festa, sem bolos. Pra tirar fotos do nosso grupo de estudos. Muito bom. (professora Alice).*

Solicitamos aos professores que recordassem algo dos encontros que possa ter marcado a sua prática. O que cada um conseguisse lembrar das ações do grupo durante e depois do término da Formação OBEDUC/E-Mult.

*Lembro da gente sentando para analisar os esquemas que foram utilizados pelos alunos, das questões que você (a pesquisadora) trazia pra gente trabalhar com eles. Lembro também da gente classificando as situações de acordo com a classe, se era por partes ou por quota (professora Alice).*

*Lembro do dinheirinho. Foi uma aula pra mim, tanto agradável aqui no grupo como para os meus alunos, porque apliquei com eles. Eles gostaram muito. Ficaram maravilhados. Descobri que tinha alunos que não conhecem dinheiro. Foi mais fácil, quando eu coloquei no quadro (o algoritmo) e chamei, e todo mundo queria participar. Foi uma aula que eu falei pra todo mundo (na escola) o que tinha feito. Mas porque eles gostaram. Foi uma aula super. legal, animada. Fiz, além das que você sugeriu, outras divisões com eles. Através disso, eles conseguem aprender a divisão. Tenho um aluno que trabalha em feira mesmo sendo criança, não sabia fazer a divisão correta e, com o dinheiro na mão, muitas vezes passava o troco errado. E eles conseguiram. Teve um deles que perguntou: ah, tia, como posso dividir 100 reais? Ele achou que não podia. Eu disse que poderia trocar por 10 reais. E poderia pegar dez notas de 100 reais e tornar esse valor por 1.000 reais. Eles nunca tinham visto tanto dinheiro. Pra mim, o que tenho sim, além do que Alice já disse, esse é um momento que eu vou levar pra vida, porque a gente aprende hoje e não esquece. Só esquece aquilo que não tem interesse. Mas quando se interessa, aprende. Pra mim, falta mais. No ano que vem, se ainda continuar, quero participar novamente (professora Rosa).*

*Sempre a gente está se surpreendendo com o aluno. Na semana passada, fiz uma atividade com o aluno. Ele fez uma avaliação, perdeu e aí eu voltei a fazer uma recuperação. Achei tão interessante que fui até a secretaria mostrar o esquema que o aluno tinha feito. Não usou o algoritmo e resolveu corretamente. 240 dividido por 4. Ele fez um agrupamento e chegou no resultado. O aluno fez uma bola, dentro da bola colocou 60 em cada parte de 4 que ela dividiu (professora Raíssa).*

*Você reconhece que se trata de uma divisão que se utiliza da medida, de saber quantos cabem em cada quatro partes? (pesquisadora).*

*Sim. Uma divisão por quota (professora Raíssa).*

*Como eu pequei. Eu sempre procurei dar o meu melhor. Nunca gostei de matemática. Não vou mentir. Mas isso não impediu que eu não buscasse ajuda, não corresse atrás. Eu sempre tirava nota que não era a melhor, mas passava sempre. Eu estudava pra passar. No meu magistério, quando eu fiz, eu não gostava da matemática, eu ficava nervosa no meu estágio. Foi por causa dos professores que tive. Ficou, assim, uma lacuna. Eu ensinava do jeito que aprendi. Quando eu cheguei ao grupo, vi o que está por detrás de uma simples situação, que tinha todo o contexto quanto tem atrás, eu descobri o quanto eu pequei, por não observar o que o aluno fazia como esquema. Eu dizia, “tá errado, tá errado. Que negócio é esse de tracinhos?” Hoje eu consigo fazer que nem a Raíssa, que vem correndo pra gente mostrar o que o aluno dela fez, com a maior alegria porque entende aquele esquema que fez com o aluno acertasse (professora Alice).*

*Então, foi um avanço, porque, quando a gente fez aqui no ano passado, um teste com os meninos vindos, um teste da UESC, em março (a professora referiu-se ao instrumento diagnóstico aplicado aos alunos da escola, antes do início das ações da Formação OBEDUC/E-Mult), foi um desastre. Eu fiquei assombrada. A primeira questão do teste*

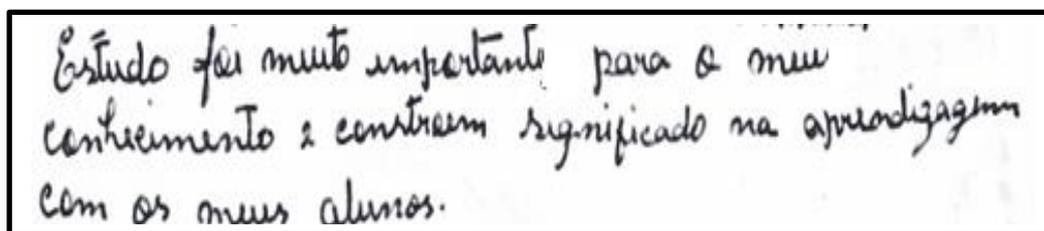
*ninguém acertou dos meus alunos. A gente vê hoje, uma atividade assim e eles fazendo. Não é um avanço? E esse avanço foi por causa do acompanhamento dela (a pesquisadora). Foi explicando pra gente, a gente foi aplicando na sala, e o nosso aluno foi avançando (professora Raíssa).*

*As novas formas que trouxe pra gente, os novos métodos ... (professora Rosa).*

*Abriu-se um leque (professora Alice).*

*O que percebo, é que começamos como um grupo maior, e vocês ficaram com esse interesse de continuar, de aplicar as situações, de ir lá, de voltar, de trazer para compartilhar aqui no grupo o que fizeram. Os outros colegas, por motivos que cada um deles sabe, não conseguiram participar, outros não estão mais na escola, como Jamile. Vocês não, continuaram, insistiram e hoje vocês têm uma visão mais ampla do conhecimento dos seus alunos (pesquisadora).*

Os depoimentos avaliativos dos professores, assim como o que foi registrado pela professora Raíssa em avaliação escrita, descritos, a seguir



Estudo foi muito importante para o meu conhecimento e construiu significado na aprendizagem com os meus alunos.

(professora Raíssa)

demonstram que as ações do grupo de estudos envolveram diferentes momentos de aprendizagem, de ampliação e (re)significação de conhecimentos acerca do campo conceitual multiplicativo e seu ensino.

Fundamentados em Zeichner (1993), procuramos fazer com que os participantes trouxessem à tona suas teorias práticas. Segundo o autor:

Expondo e examinando as suas teorias práticas, para si próprio e para os seus colegas, o professor tem mais hipóteses de se aperceber das suas falhas; discutindo publicamente no seio de grupos de professores, estes têm mais hipóteses de aprender uns com os outros e de terem mais uma palavra a dizer sobre o desenvolvimento de sua profissão (ZEICHNER, 1993, p. 2).

Os momentos gerados no interior do grupo de estudos, durante e após a Formação OBEDUC/E-Mult, e registrados em formas de depoimentos pelos professores apontam para uma aprendizagem em conjunto com os pares, e indicativos de desenvolvimento profissional de forma individual.

No Quadro 21, apresentamos, de forma sintetizada, alguns desses depoimentos que consideramos importantes, registrados nesse oitavo momento e que mostram, de forma satisfatória, o ocorrido no interior do grupo, em sua segunda fase.

**Quadro 21** – Análise de depoimentos dos professores acerca dos temas estudados

<b>Ações</b>	<b>Depoimentos Avaliativos</b>	<b>Interpretação dos depoimentos</b>
Análise dos esquemas dos alunos	<i>Lembro da gente sentando para analisar os esquemas que foram utilizados pelos alunos (professora Alice). Eu descobri o quanto eu pequei, por não observar o que o aluno fazia como esquema. (professora Alice).</i>	Os esquemas dos alunos analisados pelos professores, oportunizaram aos participantes do grupo uma reflexão sobre como seu aluno pensa acerca de situação proposta.
Aplicação da estratégia do dinheirinho de papel para o ensino da divisão por partes	<i>Lembro do dinheirinho. Foi uma aula pra mim, tanto agradável aqui no grupo como para os meus alunos, porque apliquei com eles. Eles gostaram muito (professora Rosa). As novas formas que trouxe pra gente, os novos métodos (professora Rosa).</i>	As estratégias utilizadas como apoio ao ensino da divisão proporcionaram aos participantes, ao utilizá-las com seus alunos, a compreensão dos procedimentos de cálculo abordada com significados.
Análise e reflexão sobre os erros e as dificuldades dos alunos	<i>Ele (o aluno) fez uma avaliação, perdeu e aí eu voltei a fazer uma recuperação. Achei tão interessante que fui até a secretaria mostrar o esquema que o aluno tinha feito. Não usou o algoritmo e resolveu corretamente. 240 dividido por 4. Ele fez um agrupamento e chegou no resultado (professora Raíssa).</i>	Trabalhando os erros dos alunos e utilizar esse erro como forma de aprendizado, a professora demonstra ter ampliado a base de conhecimento para o ensino, sobretudo o conhecimento especializado do conteúdo e também do conteúdo e do estudante.
Análise e reflexão sobre as situações elaboradas e aplicadas aos alunos	<i>Eu ensinava do jeito que aprendi. Quando eu cheguei ao grupo, vi o que está por detrás de uma simples situação, que tinha todo um contexto (professora Alice).</i>	A professora demonstra uma mudança de postura quanto à formação inicial e sua prática, estimulada pelas reflexões geradas nas sessões de estudos.
Análise do desempenho dos estudantes quanto à aplicação das situações propostas	<i>Então, foi um avanço, porque quando a gente fez aqui no ano passado, um teste com os meninos vindos, um teste da UESC, em março (a professora referiu-se ao instrumento diagnóstico aplicado aos alunos, antes do início das ações da Formação OBEDUC/E-Mult), foi um desastre. Eu fiquei assombrada. A primeira questão do teste ninguém acertou dos meus alunos. A gente vê hoje, uma atividade assim e eles fazendo (professora Raíssa).</i>	A professora apresenta uma compreensão do desempenho dos alunos antes e após as ações formativas. Demonstra satisfação com os resultados obtidos comparando o antes e o depois de sua participação na Formação OBEDUC/E-Mult e no grupo de estudos.

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Avaliamos que o trabalho organizado em grupo, na sua maioria, tende a gerar frutos de aprendizado mútuos e, conforme declarado por Serrazina (2012),

O professor precisa de oportunidades para construir situações de aprendizagem, experimentá-las com os seus alunos na sala de aula e refletir sobre essas experiências. Para que isso aconteça os professores têm, eles próprios, de ser envolvidos em experiências de aprendizagem de modo que experimentem o conhecimento e a “vivência pessoal” dos processos e da natureza da atividade matemática (SERRAZINA, 2012, p. 282).

Aprender como os alunos pensam por meio da análise de seus esquemas foi um momento vivenciado nos encontros do grupo. Pesquisadores como Zeichner (2008) declaram isso, em seus estudos, como uma necessidade.

Os professores precisam saber o conteúdo acadêmico que são responsáveis por ensinar e como transformá-lo, a fim de conectá-lo com aquilo que os estudantes já sabem para o desenvolvimento de uma compreensão mais elaborada. Precisam saber como aprender sobre seus estudantes – o que eles sabem e podem fazer, e os recursos culturais que eles trazem para a sala de aula. Os professores também precisam saber como explicar conceitos complexos, conduzir discussões, como avaliar a aprendizagem discente, conduzir uma sala de aula e muitas outras coisas (ZEICHNER, 2008, p. 546).

As declarações geradas pelos professores, ao avaliarem as ações do grupo de estudo mostram indícios apontados nas declarações de Serrazina (2012) e Zeichner (2008) sobre o que essas ações significaram para a prática docente dos participantes.

O Quadro 22, no próximo tópico, apresenta de forma sintetizada, aspectos que consideramos importantes e que mostram indicadores do desenvolvimento profissional dos participantes do grupo de estudos nessa etapa final – ano de 2016.

#### 5.4 Analisando indícios de desenvolvimento profissional dos professores, a partir do ocorrido no interior do grupo de estudos do ano 2016

**Quadro 22** – Síntese dos aspectos de (re)significação de conhecimentos, segundo Ball, Thames e Phelps (2008) que apontam para o desenvolvimento profissional dos participantes do grupo de estudos

<b>Ações geradoras</b>	<b>Conhecimentos vislumbrados</b>	<b>Quando ocorreu</b>	<b>Quais conhecimentos foram desenvolvidos, renovados, ampliados ou (re) significados</b>
Análise do desempenho dos alunos, de seus esquemas utilizados para resolução das situações envolvendo a operação de divisão.	Conhecer formas de representação pictórica (desenhos) da classe divisão por partes.	Após a análise do desempenho dos alunos gerados na resolução de 2 situações de divisão, sendo uma por partes e outra por quotas.	: O conhecimento especializado acerca do conteúdo divisão e do estudante (Conhecimento do conteúdo e do estudante)
Estudo e análise de estratégias para o ensino da divisão	Conhecer duas estratégias metodológicas para introdução do ensino da divisão por partes e da divisão por quotas em sala de aula.	A partir da compreensão da necessidade de conhecer propostas de intervenção para o ensino da divisão.	O conhecimento especializado acerca dos invariantes operatórias existentes no algoritmo da divisão e como se relacionam; O conhecimento acerca da identificação das duas classes de divisão. (Conhecimento do Conteúdo e do ensino)
Análise dos erros e reconhecimento das dificuldades dos alunos quanto a divisão e os procedimentos de cálculos	Levar o professor a conhecer mais sobre seu aluno por meio da reflexão sobre a prática	Por meio da aplicação da intervenção do dinheirinho de papel em duas turmas e o relato das professoras acerca dessa atividade, por meio de vídeo das aulas discutidos no grupo.	Compreensão das operações envolvidas nas situações analisadas, gerando ações práticas em investir na continuidade da análise dos esquemas dos alunos e na busca de novas estratégias de ensino do conteúdo da divisão e suas classes (Conhecimento do conteúdo e do estudante)

**Fonte:** Dados da pesquisa

Diante do que é apresentado no Quadro 22, nossa compreensão leva ao entendimento de alguns dos diferentes aspectos registrados nessa segunda fase dos encontros do grupo de estudos e que, ao analisarmos os depoimentos nelas gerados, encontramos evidências de desenvolvimento profissional docente, a partir dos critérios adotados no capítulo 4 desta investigação. Utilizando-se da definição de Day (2001), quando considera.

O processo através do qual os professores, enquanto agentes de mudança, reveem, renovam e ampliam, individual ou coletivamente, o seu compromisso com os propósitos morais do ensino, adquirem e desenvolvem, de forma crítica, juntamente com as crianças, jovens e colegas, o conhecimento, as habilidades, e a inteligência emocional, essenciais para uma reflexão, planejamento e prática docente eficazes em cada uma das fases de suas vidas profissionais (DAY, 2001, p. 20-21).

Escolhemos para esta análise aspectos dos quais elencamos sobre o que os participantes do grupo de estudos *reviram, renovaram e ampliaram*, de forma individual e coletivamente os seus conhecimentos, que foram essenciais para sua reflexão, planejamento e exercício de sua prática. Retornaremos no capítulo das Considerações Finais a explorar esses aspectos de forma mais detalhada.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

*As salas de aula estão cheias de alunos com diferentes motivações e disposições para aprender, com distintas capacidades e provenientes de meios socioculturais diversos. Ensinar é, por isso, um processo complexo. Embora a complexidade organizacional possa ser minimizada, por exemplo, através de infraestruturas adequadas, um ensino eficaz exigirá sempre destrezas, quer intrapessoais, quer interpessoais, e um empenho pessoal e profissional. Em outras palavras, trata-se da síntese entre a cabeça e o coração.*

(Christopher Day)

Neste capítulo, apresentamos uma síntese dos principais resultados desta investigação e pontos fundamentais de nossa análise, de acordo com o objetivo central e a questão de pesquisa que a norteou. Concluímos com um indicativo de sugestões para futuros estudos sobre o tema do trabalho desenvolvido.

Todavia, consideramos conveniente retomar sumariamente aspectos desta pesquisa. Dessa forma, reiteramos que o seu objetivo foi analisar as possíveis contribuições de um processo formativo sobre o ensino das estruturas multiplicativas para o desenvolvimento profissional de professores ao participarem de um grupo de estudos.

Para atingir tal propósito, trilhamos um percurso o qual descrevemos resumidamente no próximo tópico.

### **Descrição do percurso de investigação realizado**

Iniciamos nossas ações como uma das pesquisadoras do Programa OBEDUC – Observatório da Educação, por meio do projeto em rede intitulado “Um estudo sobre o domínio das Estruturas Multiplicativas no Ensino Fundamental – E-Mult”. Esse projeto previu a realização de três estudos: Estudo 1 – Análise dos descritores da Prova Brasil, na busca de elementos do Campo Conceitual Multiplicativo. No Estudo 2 – Elaboração e aplicação de um instrumento diagnóstico com 13 situações desse campo a estudantes das escolas parceiras e no Estudo 3 – Implementação de um processo formativo, com características colaborativas aos professores das escolas envolvidas. A nossa investigação aconteceu de forma concomitante (no ano 2015) e após as ações do Estudo 3 do Programa OBEDUC/E-Mult, no ano de 2016, a partir da constituição de um grupo de estudos de professores em uma das escolas parceiras.

Resultados de pesquisas como as de Etcheverria (2008, 2014) e Miranda (2014) assemelham-se a nossa proposta de estudos, ao considerarem a importância de se

investigar um grupo constituído na própria escola, por ser esse o ambiente tido como apropriado para trocar experiências e promover estudos que atendam às necessidades formativas do professor e de conhecimento do currículo.

Julgamos relevante, também, investigar o desenvolvimento profissional de professores a partir da leitura de estudos como os de Garcia Silva (2007), por exemplo, quando afirma que, para tal investigação, é importante que se considere o processo reflexivo aliado ao trabalho colaborativo.

Diante da análise desses e de outros resultados de pesquisas, propusemo-nos a organizar um grupo de estudos na própria escola, com professores participantes do Programa OBEDUC/E-Mult, no ano 2015. Os encontros do grupo foram organizados levando em conta a disponibilidade dos participantes interessados e de acordo com as necessidades explicitadas pelos professores<sup>39</sup>.

Como num primeiro momento foi difícil atender a demanda de horário da maioria dos professores interessados em participar dos encontros, comprometemo-nos a realizar nossas reuniões durante o intervalo dos turnos do trabalho docente (matutino e vespertino) ou em alguns momentos nas A.Cs (Atividades Complementares) da área de matemática. Foram organizadas 12 sessões de estudos, com um tempo de duração média de duas horas, sendo cinco delas no ano 2015 e sete em 2016. Essas últimas ocorreram após o término da Formação OBEDUC/E-Mult.

Buscamos elaborar a questão de pesquisa que atendesse ao seu objetivo, descrita a seguir:

*Quais são as possíveis contribuições de um processo formativo sobre o ensino das estruturas multiplicativas, para o desenvolvimento profissional de professores quando participam de um grupo de estudo?*

Para tanto, realizamos uma pesquisa de natureza qualitativa desenvolvida em três etapas: *Estudo Diagnóstico; Pesquisa de Campo e Discussão e Interpretação dos Dados*. Os dados da primeira etapa foram coletados dos protocolos cedidos pelo Programa OBEDUC/E-Mult, da segunda, por meio da recolha de atividades e gravações em áudio e vídeo, as quais foram transcritas para a análise posterior – terceira etapa.

Para analisar os dados, adotamos os seguintes critérios: i) as *reflexões* geradas no processo formativo no interior do grupo de estudos e nos encontros presenciais da Formação OBEDUC/E-Mult; ii) os *conhecimentos para o ensino* das estruturas

---

<sup>39</sup> Em 2015, a pedido dos participantes do grupo, procuramos abordar os mesmos temas trabalhados na Formação OBEDUC/E-Mult.

multiplicativas evidenciados nos protocolos recolhidos do Programa OBEDUC:E-Mult, nos depoimentos explicitados pelos professores nos encontros do grupo e na Formação OBEDUC/E-Mult e iii) as *evidências de mudanças e permanências* da própria prática declaradas em seus depoimentos orais ou escritos e na observação de aula.

Buscamos, em teóricos como Day (2001), fundamentos para analisar as contribuições geradas durante os encontros do grupo que nos forneceram indícios de desenvolvimento profissional dos participantes por meio de possíveis (re)significações de seus conhecimentos sobre o ensino das estruturas multiplicativas, ampliação de reflexões sobre a temática e eventuais mudanças de sua prática docente.

Para nos auxiliar nos critérios de análise dessas contribuições, nos apoiamos em nas etapas definidas por Bardin(2016) denominadas de pré-análise, exploração do material e interpretação dos dados.

A seguir, propomos nossas reflexões com o objetivo de responder à questão proposta.

### **Descrição das análises e da síntese dos principais resultados**

A etapa 01 – Estudo Diagnóstico: constituiu-se de análise das situações elaboradas pelos participantes do grupo de estudos, em sua fase inicial da Formação OBEDUC/E-Mult, com o objetivo de traçar um perfil de seus conhecimentos acerca das estruturas multiplicativas.

Identificamos que os professores indicaram, na elaboração da maioria das situações, o uso dos procedimentos de cálculos como resolução, apresentando, em sua formulação, contextos do cotidiano dos alunos, porém com baixo grau de dificuldade relativo ao seu ano escolar. Entre as categorias estudadas, notamos que proporcionalidade simples foi a mais elaborada nesta etapa. Não identificamos situações que sugerissem a Configuração Retangular nem a classe Divisão por quotas como forma de resolução.

A partir da análise dessa primeira etapa, utilizamos a definição proposta por Day (2001) para designar os critérios de análise dos episódios da segunda etapa. Nela, buscamos indícios do desenvolvimento profissional docente e procuramos identificar momentos dos encontros do grupo e que evidenciassem a *revisão, renovação e ampliação* dos conhecimentos, reflexões, individuais ou coletivas dos participantes que denotassem seus compromissos com o ensino e seus propósitos.

Na Etapa 2 – Pesquisa de Campo selecionamos depoimentos dos participantes gerados nos episódios que se referiram a cada uma das classes de situações analisadas

que foram: Isomorfismo de Medida – Proporcionalidade Simples e Produto de Medidas – Configuração Retangular. Nomeamos esses episódios como: i) discussões e reflexões sobre o ensino: algumas inferências sobre a prática docente; ii) relação entre as diferentes categorias do conhecimento para seu o ensino; iii) do grupo de estudos para a sala de aula e da sala de aula para o grupo de estudos: a prática em foco; iv) do grupo de estudos para a Formação OBEDUC/E-Mult e v) estudo comparativo entre as situações elaboradas antes e no fim da Formação OBEDUC/E-Mult.

i) *Discussões e reflexões sobre o ensino: algumas inferências sobre a prática docente*

Nos encontros do grupo que relatam as inferências quanto ao ensino das estruturas multiplicativas, os professores, ao analisarem o desempenho dos seus estudantes, no primeiro momento, justificaram as limitações das crianças pelo fato de não interpretarem com clareza o que a situação propunha, segundo eles, por “*não serem letrados*”, ou ainda, por apresentarem limitações quanto à *identificação das operações* a serem utilizadas para sua resolução. Identificamos, também, que os professores compreenderam a dificuldade dos seus estudantes quanto ao entendimento sobre *área e perímetro* de uma figura retangular.

As reflexões dos participantes acerca das dificuldades dos estudantes geraram uma necessidade na busca de estratégias de ensino que os levassem a criar condições para apropriação do Campo Conceitual Multiplicativo, oportunizando lhes ampliar o ensino dos conteúdos referentes a esse campo. Identificamos que não só as estratégias de ensino sugeridas e discutidas no grupo de estudos foram utilizadas, mas outras foram criadas pelos professores a partir dessas estratégias, ao relatar o que fez para trabalhar com as medidas de comprimento com seus alunos.

Day (2001, p.16) destaca que uma das principais tarefas de qualquer professor é a de desenvolver, nos seus alunos, uma disposição para a aprendizagem ao longo de toda a vida. A professora Raissa, em seu depoimento, mostrou ter desenvolvido uma dessas tarefas, após as discussões no grupo de estudos, sobre a estratégia da malha quadriculada para a introdução do conteúdo *área da figura retangular*. É possível, portanto, identificar a (re)significação da prática da professora Raíssa, a partir de um olhar diferenciado sobre os esquemas utilizados por seus alunos ao resolverem as situações envolvendo o tema.

i) *relação entre as diferentes categorias do conhecimento para seu o ensino*

O estudo das diferentes categorias do conhecimento das estruturas multiplicativas,

em particular do Isomorfismo de Medidas/Proporcionalidade Simples e do Produto de Medidas/Configuração Retangular, realizado no interior do grupo de estudos e na Formação OBEDUC/E-Mult, permitiu aos participantes lançarem mão desse conhecimento para resolverem as situações, que, anteriormente, utilizavam por meio dos procedimentos de cálculo para o seu ensino. Outro momento percebido em nossa análise está relacionado com o conhecimento dos participantes do grupo acerca da geometria e sua utilização no ensino, por meio de uma preocupação declarada por um deles, no ato da elaboração das situações.

Nesse sentido, a nossa compreensão é que o conhecimento do Campo Conceitual Multiplicativo e seu ensino, analisado à luz dos dois depoimentos citados como exemplos e outros observados ao longo do trabalho, nos conduz ao que foi a (re) significação das categorias de conhecimento observadas por Ball, Thames e Phelps (2008), sobretudo ao conhecimento especializado do conteúdo e do ensino. A partir das discussões e reflexões dos participantes sobre essa temática, o foco passou a ser sobre *como* os professores necessitam saber aquele conteúdo, acrescido de *o que mais* os professores necessitavam saber e *como* e *onde* eles poderiam usar tal conhecimento na prática. A necessidade de ampliação do conhecimento profissional docente referente às estruturas multiplicativas que, de forma implícita foi registrada nos depoimentos da professora Larissa e do professor Gerson denotam a sua preocupação com o seu ensino.

*ii) do grupo de estudos para a sala de aula e da sala de aula para o grupo de estudos: a prática em foco*

A análise deste tópico refere-se aos momentos por meio dos quais os participantes do grupo expuseram suas reflexões percebidas acerca dos esquemas dos seus estudantes ao resolverem as situações propostas por eles. Relatamos um aspecto que consideramos importante em nossa investigação que diz respeito à ênfase que os professores externaram sobre o uso exclusivo dos procedimentos de cálculo como a única possibilidade para a resolução das situações.

Analisamos esse momento no qual os participantes do grupo de estudos ainda estavam mobilizados por suas práticas anteriores, ao acreditarem que apenas o procedimento de cálculo propiciasse aos alunos a resolução com correção das situações propostas. Sob nosso entendimento, os professores focavam o ensino nas operações, limitavam-se à escolha de ser o uso do algoritmo como o único esquema de resolução das situações envolvendo o ensino das operações do Campo Conceitual Multiplicativo.

Consideramos que essa até pode ser uma vivência, mas seria importante que eles se preocupassem também em olhar para as ideias que envolvem cada categoria de situação.

Portanto, para a resolução de uma situação envolvendo essas operações torna-se necessária a ampliação de diversos esquemas em que os estudantes sejam capazes de resolver situações mais complexas, nas quais possam ampliar as invariantes operacionais explicitadas por Vergnaud (1988) para definir um conceito. Para isso, o conhecimento mais aprofundado de diferentes esquemas de resolução das situações do Campo Conceitual Multiplicativo e dos procedimentos de cálculo possibilitaria aos participantes do grupo a (re)significação de sua prática e a ampliação do desenvolvimento profissional docente, o que consideramos, neste estudo, ter ocorrido de uma forma ainda modesta, ao analisarmos este tópico.

### *iii) Do grupo de estudos para a Formação OBEDUC-E-Mult*

A análise registrada neste tópico refere-se ao momento avaliativo das ações e contribuições do grupo de estudo para a compreensão de fatos que proporcionaram aos participantes refletir sobre sua prática, ou seja, as discussões acerca dos esquemas dos estudantes e da aplicação da malha quadriculada como estratégia de ensino, favorecendo a ampliação do conhecimento especializado do conteúdo *área de uma figura retangular* trabalhado nos encontros da Formação OBEDUC/E-Mult.

Quanto à forma avaliativa das ações do grupo, em uma ação prática específica da professora Graça que gerou satisfação ao avaliar o avanço no aprendizado dos seus estudantes sobre o tema *área*, compreendemos que atividades como aquelas que foram organizadas nas sessões de estudo, quando alcançam seus objetivos, ou parte deles, levam a um repensar sobre a necessidade de continuidade dessas ações dentro do contexto da escola, reconhecendo que “as ideias e as práticas devem ser revistas, aperfeiçoadas e renovadas para melhorar os conhecimentos, destrezas e capacidades de aprendizagem dos alunos” (DAY, 2001, p.45).

### *v) estudo comparativo entre as situações elaboradas antes e no fim da Formação OBEDUC/E-Mult*

Os resultados do Estudo Diagnóstico (Etapa 1), comparados com os da Discussão e Interpretação dos dados (Etapa 3), apontam que, no tocante à elaboração das situações envolvendo as estruturas multiplicativas, os participantes do grupo de estudo elaboraram uma maior diversidade de situações que sugeriram interpretações para a sua resolução,

diferentemente do enfoque anteriormente apresentado na Etapa 1. No tocante a essa diversidade, notamos que as situações foram acrescidas, em seu enfoque, pelas categorias estudadas e discutidas no grupo de estudos. Evidenciamos, portanto, que os participantes do grupo compreenderam a importância de se trabalhar os conceitos das estruturas multiplicativas envolvidas nas diferentes situações, motivados pelas discussões e reflexões geradas de forma coletiva, nesse contexto formativo.

### **Respondendo a questão norteadora da pesquisa**

A partir dos critérios adotados, apontamos os resultados obtidos que respondem, de forma sintetizada, a questão norteadora de nossa investigação:

*Quais são as possíveis contribuições de um processo formativo sobre o ensino das estruturas multiplicativas para o desenvolvimento profissional de professores quando participam de um grupo de estudo?*

Citamos, a seguir, os três pontos importantes que nos serviram de base:

i) foi possível identificar que os professores participantes do grupo enfatizavam a resolução das situações por uso exclusivo do algoritmo e compreendermos que as discussões e reflexões geradas nas sessões de estudo contribuíram, mesmo que ainda de forma modesta, para a ampliação dos conceitos e de outros esquemas de resolução que envolvem as estruturas multiplicativas; ii) a análise dos erros e o reconhecimento das dificuldades dos alunos quanto à divisão e aos procedimentos de cálculos os fizeram entender as operações envolvidas e as ações práticas necessárias para investir na continuidade dessas análises e na busca de novas estratégias de ensino da divisão; iii) o conhecimento especializado das estruturas multiplicativas, como as diferentes classes da operação divisão, do eixo Isomorfismo de Medidas e as operações utilizadas na resolução das situações do Produto de Medidas, envolvendo a Configuração Retangular, foram ampliados nas discussões do grupo de estudos e proporcionaram resultados favoráveis no desempenho das turmas dos professores participantes, conforme os depoimentos avaliativos explicitados ao final do processo formativo no interior do grupo de estudos.

Diante desses aspectos, constatamos que o processo de desenvolvimento profissional docente, apesar da sua complexidade, de certa forma, foi contemplado com as ações reflexivas, de forma individual e coletiva, no encontro do grupo, durante e após as ações da Formação OBEDUC/E-Mult, pelo fato de oportunizar aos professores opinarem acerca de suas dificuldades e compartilharem suas experiências como forma de contribuir colaborativamente com os seus pares, influenciando-os a se desenvolverem profissionalmente

## **Limitações e perspectivas futuras**

A constituição e a manutenção de um grupo de estudo na própria escola, diante de uma rotina de trabalho extensa (dois turnos) foram um fator limitante pela falta de disponibilidade dos horários dos professores para participação nas suas reuniões. Tal fato dificultou a presença constante de todos os componentes em todas as sessões realizadas. Para sanar esse entrave, mesmo que parcialmente, a escola e sua gestão, ao compreenderem a importância de investir no desenvolvimento profissional docente, poderiam contribuir em disponibilizar horários fixos de estudos, dentro do seu planejamento anual de atividades, o que é perceptível nos estudos de Day (2001), quando afirma que, em outros países, como a Noruega, nas novas formas de organização dos horários de trabalho dos professores, desde a década de 1960, 190 horas anuais para o trabalho organizado com seus pares são reservadas na totalidade da carga horária. A nosso ver e em diálogos com a equipe docente, a escola que possa investir nessa questão, oportunizaria ao professor, em seu planejamento diário, participar ativamente e, de forma contínua, de encontros de estudos com seus pares.

Outro fator limitante encontrado foi a complexidade do ensino das estruturas multiplicativas, envolvendo variedades de situações e o tempo de estudos sobre essa temática. Seriam necessárias mais discussões e reflexões sobre esse ensino e suas estratégias, de modo a proporcionar uma melhor compreensão das possíveis contribuições de um grupo de estudos para o desenvolvimento profissional de seus participantes.

É importante ressaltar que os resultados positivos encontrados nesta investigação se devem, em grande parte, à disponibilidade dos professores em participar dos estudos em grupo, mesmo com o acúmulo de suas atividades docentes, e isso ocorreu uma vez que o tema e as propostas de estudos que surgiram, foram pautados em suas necessidades de melhoria do ensino das estruturas multiplicativas. Por trabalharem na mesma escola, as demandas dos participantes eram comuns e o apoio da equipe gestora proporcionou organizar os horários e locais dos encontros, mesmo considerando que não foi algo tão fácil de administrar. Portanto, o apoio institucional foi fundamental ao receber a pesquisadora para este momento formativo com seus professores. Reconhecemos a complexidade que envolve a proposta de formação de grupos de estudo na própria escola, mas percebemos a necessidade de continuidade em investigar uma forma operacional que facilite essa ação formativa. A parceria constante universidade-escola é um caminho promissor para contribuir na criação de uma cultura de colaboração entre gestores e professores, como um meio eficaz no desenvolvimento profissional docente.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

BALL, D. L.; BEN-PERETZ, M.; COHEN, R. B. Records of Practice and the Development of Collective Professional Knowledge. **British Journal of Educational Studies**, v. 62, n. 3, p. 317–335, 2014.

BALL, D.L; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389–407, 2008.

BALL, D. L.; HILL, H. C.; BASS, H. Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? **American Educator**, v. 29, n. 3, p. 14–17, 20–22, 43–46, 2005.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Trad. Luís Antero e Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2016.

BRASIL; MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO; SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: ensino de primeira à quarta série**. Brasília: 1997.

BRASIL; SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental**. Brasília: 1998.

CARR, W.; KEMMIS, S. **Becoming Critical: Education, Knowledge and Action Research**. London: Falmer Press, 1986

CLEMENTS, D. H; STEPHAN, M.. Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. In D. H. Clements & J. Sarama (Eds.), **Engaging young children in mathematics** (pp. 299–317). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2004

CORREA, J. **A resolução oral de tarefas de divisão por crianças**. In: Estudos de Psicologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004, pp 145-155

DAY, C. **Desenvolvimento Profissional de Professores: Os desafios da aprendizagem permanente**. Porto Editora, Portugal, 2001

ETCHEVERRIA, T. C. **Educação Continuada em grupos de estudos: possibilidades com foco no ensino da Geometria**. 100 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Faculdade de Física. Porto Alegre, 2008.

ETCHEVERRIA, T. C. **O Ensino das Estruturas Aditivas junto a professoras dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. 2014, 251f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação da Universidade Anhanguera de São Paulo.- São Paulo, 2014

DAY, C. **Desenvolvimento Profissional de Professores: Os desafios da aprendizagem permanente**. Porto Editora, Portugal, 2001

ETCHEVERRIA, T. C. **Educação Continuada em grupos de estudos: possibilidades com foco no ensino da Geometria**. 100 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Faculdade de Física. Porto Alegre, 2008.

ETCHEVERRIA, T. C. **O Ensino das Estruturas Aditivas junto a professoras dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. 2014, 251f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação da Universidade Anhanguera de São Paulo.- São Paulo, 2014

GARNICA, A.V.M. História Oral e Educação Matemática. In BORBA, M.de C. e ARAÚJO, J. de L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, p. 7798, 2004

GITIRANA, V. et al. **Repensando Multiplicação e Divisão: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. São Paulo: PROEM, 2014.

GORE, J.M; ZEICHNER,K.M. Connecting action research to genuine teacher development. In Smyth, J. (ed.) **Critical Discourses on Teacher Development** . London: Cassell, 1995.

IBIAPINA, I. M. L. M. **Pesquisa colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimentos**. Brasília: Líber Livro Editora, 2008.

LIMA, D.C; **A Formação Continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais e as estruturas multiplicativas**. Dissertação de Mestrado. Programa Pós-Graduação em Educação Matemática. UESC, Ilhéus, BA, 2016.

MÄDCHE, F. C.; MALLMANN, T. **Grupo de estudos: o sonho que se sonha em conjunto se torna realidade**. São Leopoldo: Unisinos. Brasília: MEC, 2006.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A. DOS; MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 20, n. 2, p. 517–533, 2014.

MERLINI, V. L. **As potencialidades de um processo formativo para a reflexão na e sobre a prática de uma professora das séries iniciais: um estudo de caso**. 2012. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

MERLINI, V. L.; SANTOS, A.; MAGINA, S. M. P. Estratégias formativas: um elemento potencializador para ressignificação da prática docente. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 19, n. 1, p. 121–140, 26 abr. 2017.

MIRANDA, M.S. **Uma investigação sobre a (re)construção do conhecimento de professores participantes de um grupo que estuda o campo conceitual aditivo**. Dissertação de Mestrado, do Programa de Pós-Graduação da Universidade Anhanguera de São Paulo, 2014

MORAIS, M.; TELES, R. Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização. In: MENDONÇA, R. H. (Ed.). **Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização**. Salto para ed. Rio de Janeiro: TV Escola, 2014. p. 10–16.

MOREIRA, M. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a pesquisa nesta área**, Instituto de Física. UFRGS, 2004

NACARATO, A M.; GRANDO, R.C; MASCIA, M.A.A. Formação Docente em Projetos de Parceria Universidade e Escola. **Acta Scientiae**, v.15, n.1, jan./abr. 2013.p.24-41

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T. et al. **Introdução à Educação Matemática. Os números e as operações numéricas**. 2. ed. São Paulo: PROEM, 2002.

NUNES, T. Seminário Internacional Satélite do 34 PME. Ensinando a multiplicação da pré escola ao fim do primeiro grau. São Paulo: UNIBAN, 2010. Acesso [https://www.youtube.com/watch?v=tolZ\\_DQaunw](https://www.youtube.com/watch?v=tolZ_DQaunw) 21/02/2018.

PITTALIS, M.; CHRISTOU, C.; PAPAGEORGIOU, E. Students' ability in solving proportional problems. Proceedings of the 3rd European Research Conference in Mathematics Education. **Anais...Bellaria**, Italy: 2003. Disponível em: <[http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG3\\_Pittalis\\_cerme3.pdf](http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG3_Pittalis_cerme3.pdf)>. Acesso em: 10/01/ 2017.

PONTE, J. P. Conferência plenária apresentada no Encontro Nacional de Professores de Matemática ProfMat 98, realizado em Guimarães. Actas do ProfMat 98. **Anais...Lisboa**: APM, 1998

PONTE, J. P. Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores Matemática. In: PONTE, J. P. et al. (Eds.). **Desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Que formação?** Lisboa: SPCE, 1995. p. 193–211.

SANTANA, E. R. DOS S. **Estruturas Aditivas: o suporte didático influencia a**

**aprendizagem do estudante?** 2010. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SANTANA, E.R.S; ALVES, A. A.; NUNES, C. B. A teoria dos campos conceituais num processo de formação continuada de professores. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 29, n. 53, p. 1162–1180, dez. 2015.

SANTANA, E.R.S; LAUTERT, S. L.; CASTRO FILHO, J. A.; SANTOS, E. M. Observatório da Educação em Rede: **As Estruturas Multiplicativas e a Formação Continuada. Educação Matemática em Foco (UEPB)**, v. V, p. 77-95, 2016

SANTOS, A. DOS. **Processos de formação colaborativa com foco no campo conceitual multiplicativo: um caminho possível com professoras polivalentes**. 2012. 340 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC/SP, São Paulo, 2012.

SÃO PAULO; SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **EMAI: Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. São Paulo: 2013.

SARAIVA, M; PONTE, J. P. **O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática**. *Quadrante*, 12(2), 2003, pp 25-52

SCHÖN, D. **Educating the reflective practitioner: toward a new design for teaching and learning in the professions**. San Francisco: Wiley, 1987.

SCHÖN, D. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, A. (Ed.). **Os professores e sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1997. p. 79–91.

SCHÖN, D. **Educando o Profissional Reflexivo: um novo design para o ensino e aprendizagem**. Trad. Roberto C.Costa. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000

SERRAZINA, M. L. Desenvolvimento Profissional do Professor: Contributos para Reflexão. In: I. Vale, J. Portela (Eds.), IX SIEM Actas. **Anais...**Lisboa: APM, 1999. p. 63-78.

SERRAZINA, M. DE L. M. Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 266–283, 2012. Disponível em <http://www.reveduc.ufscar.br>.

SHULMAN, L. S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4–14, 1986.

SILVA, J. F. **Um estudo do programa de consolidação das licenciaturas no contexto da formação inicial de professores de matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

SOUZA, E.I.R. **Estruturas multiplicativas: concepção de professor do ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado. Programa Pós-Graduação em Educação Matemática. UESC, Ilhéus, BA, 2015.

SOUZA SANTOS, J.S **Formação de professores com dimensões colaborativas: as estruturas multiplicativas em foco**. Dissertação de Mestrado. Programa Pós-Graduação em Educação Matemática. UESC, Ilhéus, BA, 2017.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: R. Lesh & M. Landau (Eds.) **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983, pp 127-174

VERGNAUD, G. Epistemologia e psicologia da educação matemática. In: KILPATRICK, J.; NESHER, P. (Eds.). **Mathematics and cognition**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. p. 2–17.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. Seminário Internacional de Educação Matemática. **Anais...**Rio de Janeiro: UFRJ, Projeto Fundação - Instituto de Matemática, 1993. p. 131.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escolar elementar**. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 17, n. 2, p. 167–181, 1998.

VERGNAUD, G. A Teoria dos campos conceituais. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 10, n. 2.3, p. 133–170, 1991.

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEEMPA- Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia de Pesquisa e Ação, Tempo de competir para fecundar**, p.11-19, Porto Alegre, 1996

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. In: HIEBERT, H.; BEHR, M. (Eds.) **Research Agenda in Mathematics Education, Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 141–161.

ZEICHNER, K. M. Uma análise crítica sobre a “reflexão” como conceito estruturante na formação docente. **Educação e Sociedade**, v. 29, n. 103, p. 535–554, 2008.

ZEICHNER, K. M. **A formação reflexiva de professores: ideias e práticas**. Lisboa: EDUCA, 1993.

## **ANEXOS**

## ANEXO A

### PERFIL DO PROFESSOR

Nome: \_\_\_\_\_

N<sup>o</sup> \_\_\_\_\_

1ª Parte: Perfil do professor

1. Seu nível de instrução é:  Magistério  Superior Incompleto  Superior Completo

Outro: \_\_\_\_\_

2. Você tem Curso superior em: \_\_\_\_\_ Concluído em (ano): \_\_\_\_\_

3. Em qual(is) rede(s) você ministra aulas?  Estadual  Municipal  Particular (pode marcar mais de uma)

4. Há quantos anos você ensina Matemática?

Menos de 1 ano  1 a 5 anos  6 a 10 anos  11 a 15 anos  mais de 15 anos

5. Quantas aulas de Matemática você leciona (em uma mesma turma) por semana?

1 aula  2 aulas  3 aulas  4 aulas  5 aulas  mais de 5 aulas

6. Em sua trajetória estudantil, qual era o seu gosto pela Matemática?

Detestava  Gostava pouco  Gostava mais ou menos  Gostava muito  Adorava

7. Esse gosto mudou? SIM  NÃO

Se seu gosto mudou, explique: EM QUE? POR QUE?

\_\_\_\_\_

8. Enumere os blocos de conteúdos abaixo na ordem em que você se sente mais seguro(a) para ensinar para seus alunos. (1 = mais seguro, 4 = menos seguro).

Tratamento da Informação

Números e Operações

Espaço e Forma

Grandezas e Medidas

Explique o porquê de suas enumerações:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

9. Em que ano você mais gosta de ensinar Matemática? 1ª  2ª  3ª  4ª  5ª  6ª  7ª

8ª  9ª

tanto faz  nenhuma.

Aponte, pelo menos, 2 motivos para a sua resposta: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

10. Marque o(s) material(is) de apoio didático que você utiliza em suas aulas de Matemática.

Livro Didático  Ábaco  Material Dourado  Blocos Lógico  Soroban  Escala

Cusinara

Software Educacional  Lousa  material pedagógico da SEE  Outro, qual? \_\_\_\_\_

11. Descreva pelo menos 2 atividades que você faz com esse(s) material(is):

Atividade 1: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Atividade 2: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**ANEXO B – Instrumento Diagnóstico a partir de elaboração de situações antes e após a Formação OBEDUC/E-Mult**

Nome: \_\_\_\_\_  
Elabore nos espaços abaixo, oito problemas distintos envolvendo multiplicação e/ou divisão (a seu critério)

Nº \_\_\_\_\_

Prob.1

Prob.2

Prob.3

Prob.4

Prob.5

Prob.6

Prob.7

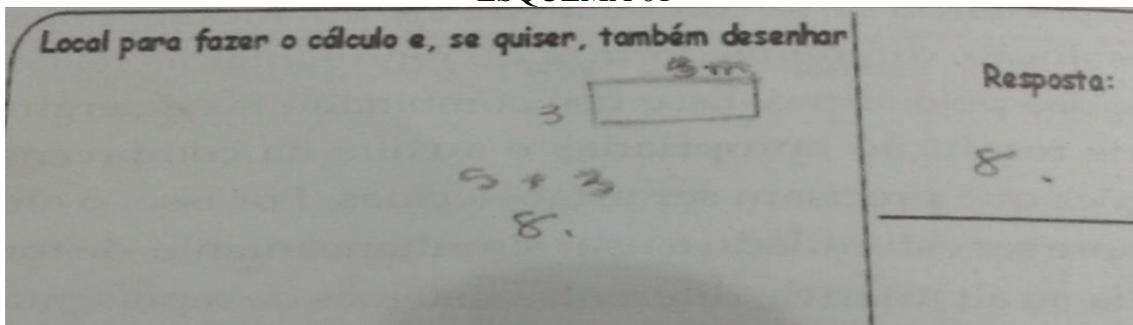
Prob.8

### ANEXO C - Esquemas de estudantes utilizados para resolução de uma situação

O piso da sala de aula da escola Divertida tem um formato retangular com 3 metros de largura e 5 metros de comprimento. Qual a área desse piso?<sup>40</sup>

ESQUEMA 01

Local para fazer o cálculo e, se quiser, também desenhar



3m  
3  
5 + 3  
8.

Resposta:  
8.

ESQUEMA 02

Local para fazer o cálculo e, se quiser, também desenhar

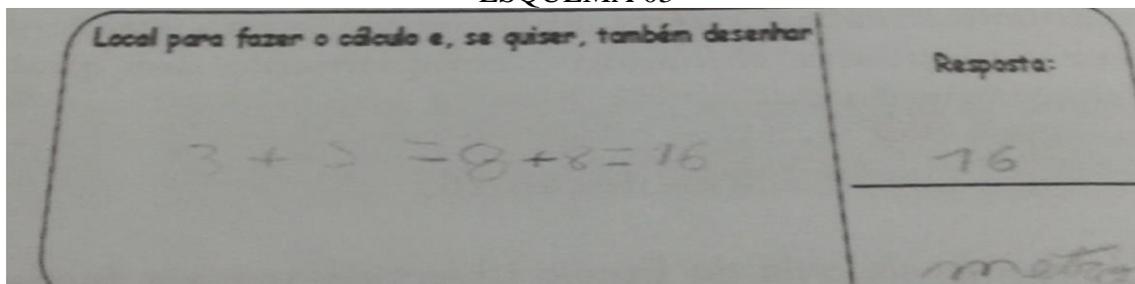


10  
+ 6  
16

Resposta:  
Área da sala de aula é 16m

ESQUEMA 03

Local para fazer o cálculo e, se quiser, também desenhar

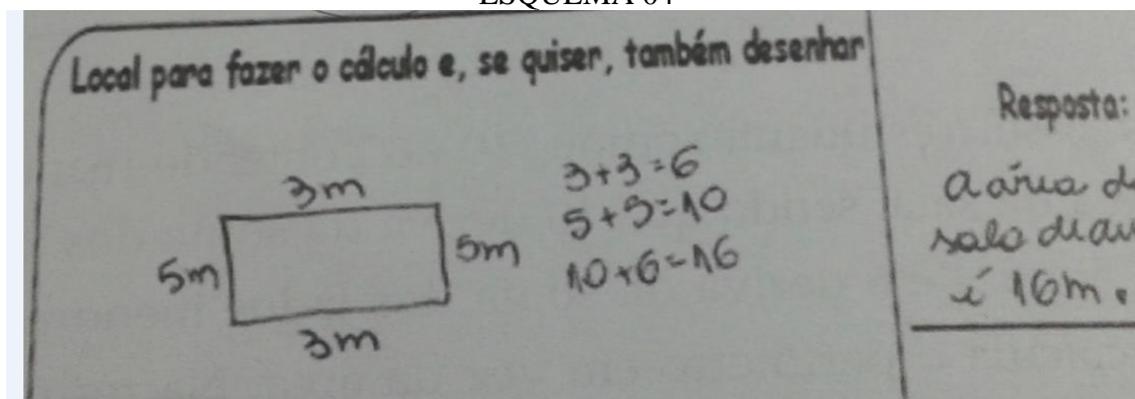


3 + 3 = 6 + 6 = 12  
12 + 4 = 16

Resposta:  
16  
metros

ESQUEMA 04

Local para fazer o cálculo e, se quiser, também desenhar



3m  
5m  
3m

3 + 3 = 6  
5 + 5 = 10  
10 + 6 = 16

Resposta:  
a área da sala de aula é 16m.

<sup>40</sup> Situação retirada do livro de GITIRANA, V; MAGINA, S; CAMPOS, T; SPNILLO, A. Repensando a Multiplicação e a Divisão: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo, PROEM, 2014

**ANEXO D****RELATÓRIO DE ATIVIDADE – planejada**

Escola Parceira: \_\_\_\_\_

Município: \_\_\_\_\_ Estado: \_\_\_\_\_

Relatório nº \_\_\_\_\_ Ano escolar do grupo \_\_\_\_\_ Data \_\_\_\_\_

Professores: \_\_\_\_\_

**Título da atividade 1:** \_\_\_\_\_

Situação 1:

**Conceitos principais a serem trabalhados:**

---

---

---

**Desenvolvimento da aula:**

---

---

---

**Expectativas do professor em relação ao desempenho dos estudantes: \_**

---

---

---

**Título da atividade 2:**

---

## ANEXO E

### RELATÓRIO DE ATIVIDADE – desenvolvida

Escola Parceira: .....

Município: \_\_\_\_\_

Relatório nº \_\_\_\_\_ Ano escolar do grupo: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

Nº total de estudantes participantes: \_\_\_\_\_

Houve diferença entre a estratégia planejada e a que foi efetivamente realizada?

SIM  NÃO

Se SIM, o que mudou e porque: .....

\_\_\_\_\_

Quantos estudantes acertaram: (a) a situação 1? \_\_ (b) a situação 2? \_\_ (c) a situação 3? \_\_\_\_

Quais os esquemas de resolução encontrados? .....

\_\_\_\_\_

Tipos de erro encontrado: .....

\_\_\_\_\_

Como foi trabalhado o erro dos estudantes? .....

\_\_\_\_\_

Você classificaria esta atividade como:

Péssima  Ruim  Razoável  Boa  Ótima

Por quê? .....

\_\_\_\_\_

## **APENDICES**

APENDICE 01 – Cenário de Ensino <sup>41</sup>**Situação A)**

O médico mandou Marta tomar 24 comprimidos em 8 dias. Ela tem que tomar a mesma quantidade de comprimidos todos os dias. Quantos comprimidos ela tomará por dia?

**Situação B)**

Para ficar boa de uma doença, Ana tomou 32 comprimidos. O médico mandou Ana tomar 4 comprimidos por dia. Quantos dias este tratamento durou?

Explique como você resolveria concretamente (ou seja, por meio de desenhos) esses dois problemas. As ações que descrevem ou resolvem cada problema são iguais? Explique.

---

<sup>41</sup> Situações retirada do Livro Repensando Multiplicação e Divisão: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. Gitirana *et al* (2014)

## APENDICE 02

### Situações envolvendo a operação de divisão e suas classes = por partes e por quota

- 1) Ana tem 24 bombons e deseja reparti-los igualmente para quatro crianças. Quantos bombons cada criança deverá receber?
- 2) Paula tem 24 bombons e deseja guarda-los em caixas de modo que cada caixa tenha exatamente quatro bombons. Quantas caixas serão necessárias para guardar todos os bombons?
- 3) João tem 30 figurinhas e que dividir igualmente com os seus 6 amigos. Quantas figurinhas cada um dos seus amigos vai receber?
- 4) João tem 30 figurinhas e vai dar 5 figurinhas para os seus amigos. Quantos amigos de João ganharão figurinhas?
- 5) Gracilene tem 27 bombons para distribuir entre suas três amigas. Quantos bombons cada amiga recebeu?
- 6) Carina realizará uma festa e está preparando a sacolinha surpresa. Ela tem 48 balas, e deve encher a sacolinha com quatro balas. Quantas sacolinhas Carina conseguirá fazer se utilizar todas as balas?
- 7) Diná estava com uma tremenda dor de cabeça. Seu médico pediu que ela comprasse 16 comprimidos e tomasse 2 comprimidos por dia. Quantos dias este tratamento de Diná vai durar?
- 8) O médico de Diná mandou ela tomar 16 comprimidos em 8 dias. Ele avisou ainda que ela precisa tomar a mesma quantidade todos os dias. Quantos comprimidos ela tomará por dia?
- 9) Uma sala de aula tem 27 alunos que farão uma atividade em grupos de 3 alunos. Quantos grupos serão formados nessa sala de aula?

**APENDICE 03****Instrumento de avaliação do grupo de estudos – segunda fase – 2016**

**Professores, gostaria muito de agradecer pelos bons momentos juntos em 2015 e 2016. Preciso desta vez, que escreva o que você achou dos encontros neste ano, a partir do que você aprendeu a cada tópico solicitado. Obrigada**

**1) Conhecimentos sobre a Divisão por Partes e por Cota**

---

---

---

---

---

**2) Conhecimentos sobre os esquemas dos estudantes ao resolver as situações elaboradas**

---

---

---

---

---

**3) Conhecimentos sobre as estratégias “o dinheirinho” e o material Cuisenaire**

---

---

---

---

---

**4) Conhecimentos sobre os esquemas de Vergnaud na resolução das situações problemas de Divisão (Partitiva/Quotitiva)**

---

---

---

---

---

**ESPAÇO PARA COMENTÁRIOS EM GERAL ACERCA DOS ESTUDOS EM GRUPO (Opcional)**