11º SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA
2º SEMINÁRIO DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU
4, 5 e 6 NOVEMBRO 2020 ONLINE

A TRIGONOMETRIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO DAS ESCOLAS ESTADUAIS DE LINHARES/ES À LUZ DOS TRÊS MUNDO DA MATEMÁTICA

Leonardo Martins
(Bolsista CAPES | PROSUP – UNIAN – SP)
professor@leomartins.net

Maria Elisa Esteves Lopes Galvão
(Orientadora – UNIAN – SP)
elisa.galvao@anhanguera.com

Resumo

Neste trabalho, trata-se de uma pesquisa documental com objetivo de examinar as propostas de abordagem e de experiências para construção do conhecimento sobre a trigonometria no triângulo contidas nos livros didáticos adotados nas escolas estaduais de Linhares/ES. Os materiais utilizados foram os livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) nos anos de 2018 e 2020. As análises foram orientadas à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática de David Tall, por meio da identificação das possibilidades de percursos corporificado-simbólico-formais propiciados pelas atividades contidas nos livros. Observa-se que o conteúdo matemático relacionado à Trigonometria é explorado nos livros didáticos de forma a proporcionar a transição entre os três mundos e, por sua vez, prevalecem aspectos do mundo simbólico por meio de abordagens mais procedimentais do que reflexivas.

Palavras-chave: Trigonometria. Livro Didático. Três Mundos da Matemática

Introdução

Os livros didáticos são, para alguns, a única fonte de estudo fora do ambiente escolar, conseguem atravessar as fronteiras do muro escolar e estar com o aluno onde ele estiver. Assim, a sua distribuição gratuita aos alunos de escolas públicas, em todo o território nacional, viabiliza que o conhecimento possa alcançar àqueles que mais necessitam.

A trigonometria, enquanto conteúdo matemático, está presente nesses materiais didáticos no Ensino Médio e em alguns livros do Ensino Fundamental. Cada coleção tem a sua particularidade na abordagem, contextualização, linguagem, tipos de exercícios e outros detalhes como as sugestões propostas no manual do professor. A atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC), destituiu esse assunto do Ensino Fundamental, com isso, dentre as onze coleções aprovadas no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2020 apenas cinco coleções abordam a trigonometria.

Nessa perspectiva nos coube analisar a construção de novos conceitos matemáticos, em especial os relativos à trigonometria por meio dos livros didáticos. Para tanto, temos como objetivo: examinar as propostas de abordagem e de experiências para a construção do conhecimento em trigonometria contidas nos livros didáticos adotados nas escolas estaduais de Linhares/ES. Para tanto, consideramos a seguinte questão de investigação: a abordagem e as propostas contidas nas coleções de livros didáticos de Matemática viabilizam experiências que caracterizem um percurso corporificado-simbólico-formal?

Para Tall (2013) o mundo corporificado está relacionado aos objetos, modelos e suas propriedades, como na construção geométrica, podendo ser verbalizado ou ainda relacionado a gráficos, diagramas, tabelas dentre outros; o mundo simbólico desenvolve a partir das operações e suas propriedades, utilizando dos símbolos para realização dos cálculos e das manipulações algébricas; o mundo formal ou axiomático é construído com base em definições formais, propriedades e deduções por meio de uma prova matemática. Abrantes e Galvão (2020) destacam que não há hierarquia entre os três mundos, ou seja, eles são independentes, contribuindo para que o percurso possa variar conforme as experiências pessoais de aprendizagem.

Este estudo é uma pesquisa documental, segundo Gil (2008) esse tipo de procedimento utiliza materiais que não foram analisados ou que poderão ser reelaborados conforme objetivos de pesquisa. Esta pesquisa foi realizada por meio de livros didáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio que abordam o conteúdo de trigonometria no triângulo. No Ensino Fundamental foram analisados todos os livros que contemplam a trigonometria e no Ensino Médio foram escolhidas três coleções, uma que é utilizada nas escolas estaduais do município de Linhares e outras duas em razão da expressiva quantidade de publicações destinadas às escolas pública em todo o país.

Os resultados obtidos na pesquisa demonstram que o conteúdo relativo à trigonometria no triângulo está presente em alguns livros didáticos do Ensino Fundamental e em todas as coleções do Ensino Médio. Em se tratando da trigonometria no triângulo retângulo tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, as sequências de aprendizagem, como são apresentadas, se assemelham. No Ensino Médio é acrescentado o estudo dos triângulos quaisquer e exploradas as leis dos senos e dos cossenos.

As coleções dão ênfase a percursos no mundo simbólico por meio dos processos algébricos que são explorados nas explicações, exemplificações e que acabam se repetindo nas atividades que, poucas vezes, levam o aluno à reflexão. Porém, não deixam de viabilizar percursos com características dos Três Mundos da Matemática.

Material e Métodos

A pesquisa neste estudo é caracterizada como documental, possibilitando dados fidedignos com a reprodução das informações encontradas (SAMARA; TUPY, 2010). Samara e Tupy (2010, p. 67-68), destacam que

> [...] Cada vez mais acessíveis, as informações sobre um determinado tema provêm das mais diversas origens: jornais, revistas, livros, noticiários de rádio e televisão, filmes, documentários, internet, anedotário, linguagem e oralidade, entre tantas outras, constituem apenas alguns exemplos [...] (SAMARA; TUPY, 2010, p. 67-68).

Evidencia-se no texto de Samara e Tupy (2010) os livros como fonte para pesquisa quantitativa. O pesquisador Thiengo (2001) defende que os livros didáticos se incluem no campo de aplicação das pesquisas documentais, e com base nesses autores a presente pesquisa lançou mão das obras destinadas ao ensino de Matemática para obter os dados para análise.

Os materiais utilizados neste estudo foram as coleções de livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental e três coleções do Ensino Médio. Buscou-se, inicialmente, identificar as coleções de livros didáticos de Matemática que são utilizadas nas escolas estaduais localizadas no município de Linhares/ES, o que possibilita explorar o conteúdo que os alunos de fato têm acesso. Recorreu-se também aos dados estatísticos do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE, 2020) para quantificar os exemplares que foram distribuídos gratuitamente no Brasil pelo Governo Federal. Identificou-se que as coleções “A Conquista da Matemática” e “Matemática Ciência e Aplicações” são as únicas utilizadas pelas escolas estaduais do município de Linhares/ES, respectivamente, no Ensino Fundamental e no

Ensino Médio. Os dados do FNDE demonstram que essas coleções são as mais distribuídas gratuitamente pelo Governo Federal em todo o Brasil.

Em cada livro, foram selecionados os elementos correspondentes às propostas de abordagem e de experiências para construção do conhecimento em trigonometria no triângulo contida nos livros didáticos.

Algumas perguntas nortearam a exploração dos materiais em cada coleção: Os materiais didáticos possibilitam a transição corporificado-simbólico-formal enquanto são construídos os conceitos da trigonometria do triângulo? Se sim, como ocorre a transição e/ou interação entre os Três Mundos da Matemática? Qual dos três mundos é o mais explorado nesses materiais didáticos?

Para auxiliar na análise entre a trigonometria no triângulo retângulo e os três mundos da matemática, observou-se a pesquisa de Abrantes e Galvão (2020). Nesse estudo são explicados alguns percursos que, com adaptações, podem contribuir a nossa análise.

Resultados e Discussão

As orientações curriculares do Espírito Santo propõem que a trigonometria no triângulo retângulo seja ensinada a partir do nono ano do Ensino Fundamental. Por sua vez, a atual BNCC retirou do Ensino Fundamental esses tópicos referentes à trigonometria. Assim, algumas coleções podem atender à BNCC em nível nacional, porém podem deixar uma lacuna sobre esse conteúdo matemático quando observado o Currículo do Espírito Santo (CES).

Ao analisarmos o Guia Digital do PNLD 2017 notamos que cinco coleções (LDEF03, LDEF06, LDEF07, LDEF08, LDEF09) se mantiveram no PNLD 2020 e que todos os livros didáticos para o 9º ano tinham o conteúdo de trigonometria. Por sua vez, das 11 coleções de livros didáticos que foram aprovadas no PNLD de 2020 para o Ensino Fundamental apenas cinco coleções abordam a trigonometria, o Quadro 1 apresenta uma síntese das coleções aprovadas.

Quadro 1 – Síntese da trigonometria nas coleções aprovadas no PNLD 2020

COLEÇÃO	EDITORA	SIGLA	TRIGONOMETRIA
A Conquista da Matemática	FTD	LDEF01	Não.
Apoema	Editora do Brasil	LDEF02	Não.
Araribá Mais Matemática	Moderna	LDEF03	Não.
Geração Alpha	SM	LDEF04	Não.
Matemática Realidade e Tecnologia	FTD	LDEF05	Não.
Teláris	Ática	LDEF06	Não.
Convergência Matemática	SM	LDEF07	Sim. 9º Ano. Uma seção no capítulo "Relações no triângulo retângulo"
Matemática Bianchini	Moderna	LDEF08	Sim. 9º Ano. Possuí um capítulo específico.
Matemática Compreensão e prática	Moderna	LDEF09	Sim. 9º Ano. Uma seção no capítulo "Relações métricas no triângulo retângulo".
Matemática Essencial	Scipione	LDEF10	Sim. 9º Ano. Uma seção no capítulo "Relações no triângulo retângulo".
Trilhas da Matemática	Saraiva	LDEF11	Sim. 9º Ano. Possuí um capítulo específico.

Fonte: Pesquisadores (2020).

As informações contidas no Quadro 1 destacam que as 11 coleções aprovadas no PNLD 2020 são provenientes de 7 editoras, e que três delas já retiraram a trigonometria de seus materiais (Ática, Editora do Brasil e FTD), duas delas têm opção com ou sem o conteúdo (Moderna e SM) e outras duas contemplam a trigonometria (Saraiva e Scipione). Nenhuma das coleções aprovadas no PNLD 2020, para o Ensino Fundamental, contemplam a trigonometria no triângulo qualquer.

Das cinco coleções que contemplam a trigonometria no Ensino Fundamental, apenas duas (LDEF08 e LDEF11) reservam um capítulo específico para o assunto. As outras coleções (LDEF07, LDEF09 e LDEF10) apresentam a trigonometria em seções nos capítulos que tratam das relações métricas no triângulo retângulo.

A respeito do Ensino Médio as coleções vigentes para o ano 2020 corresponde ao PNLD 2018. Ao todo oito coleções foram aprovadas e todas elas incluem o conteúdo de trigonometria. O Quadro 2 apresenta uma síntese da trigonometria nas coleções utilizadas neste estudo.

Quadro 2 – A trigonometria nas coleções utilizadas neste estudo

COLEÇÃO	EDITORA	CÓDIGO	A TRIGONOMETRIA
#Contato Matemática	FTD	LDEM01	**1º Ano:** Triângulo retângulo e quaisquer. **2º Ano:** Circunferência trigonométrica e Funções trigonométricas. **3º Ano:** Os conceitos são explorados em outros conteúdos.
Ciência e Aplicação	Saraiva	LDEM02	**1º Ano:** Triângulo retângulo **2º Ano:** Triângulo Quaisquer, circunferência trigonométrica, funções trigonométricas **3º Ano:** Os conceitos são explorados em outros conteúdos.
Conexões com a Matemática	Moderna	LDEM03	**1º Ano:** Triângulo Retângulo. **2º Ano:** Triângulo Quaisquer, Circunferência trigonométrica e funções trigonométricas. **3º Ano:** Os conceitos são explorados em outros conteúdos.

Fonte: Pesquisador.

A maioria dos livros didáticos inicia a abordagem das razões trigonométricas explorando a semelhança de triângulos, como ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Abordagem das razões trigonométricas a partir da semelhança de triângulos


Seno de um ângulo agudo

Considere os triângulos retângulos ABC, AB_1C_1, AB_2C_2 e AB_3C_3.

Os triângulos retângulos AB_1C_1, AB_2C_2 e AB_3C_3 são semelhantes ao triângulo ABC, pois têm em comum o ângulo $\hat{A}$ e o ângulo reto (caso AA). Assim, podemos escrever:

- $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ $\quad \frac{AC}{AC_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$
- $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$ $\quad \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$
- $\triangle ABC \sim \triangle AB_3C_3$ $\quad \frac{AC}{AC_3} = \frac{BC}{B_3C_3}$

Pela propriedade fundamental das proporções, temos:

- $\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{BC}{AC}$
- $\frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{BC}{AC}$
- $\frac{B_3C_3}{AC_3} = \frac{BC}{AC}$

Observe que:

$$\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3} = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo de medida } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Vale lembrar que podemos traçar infinitos triângulos retângulos semelhantes ao triângulo ABC, com vértice A e lado oposto ao vértice A formado por segmentos paralelos a $\overline{BC}$ com vértices situados nos prologamentos de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

A razão que relaciona a medida do cateto oposto ao ângulo $\hat{A}$ com a medida da hipotenusa, em todos esses triângulos, é constante e recebe o nome de **seno** do ângulo de medida α. Assim:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\textbf{medida do cateto oposto ao ângulo de medida } \alpha}{\textbf{medida da hipotenusa}}$$

seno do ângulo de medida α; lemos: "seno de α"

Em todo triângulo retângulo, denominamos **seno de um ângulo agudo** a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

Fonte: Silveira (2018, p. 188).

Apenas um dos livros analisados (LDEM02) não utiliza esse caminho, mas apresenta a definição das razões seno, cosseno e tangente da mesma forma que os demais materiais. Ao examinarmos a condução adotada para se chegar à definição do seno do ângulo, reproduzida na Figura 1, observamos que é iniciada no contexto corporificado-simbólico, uma vez que as proporções são obtidas com o apoio da figura. Por outro lado, a constatação de que a razão é constante, permite chegar à definição para o seno do ângulo, agora num percurso simbólico-formal.

Essas definições de seno, cosseno e tangente como razões entre os lados dos triângulos semelhantes marcam, para Abrantes e Galvão (2020), um percurso corporificado-simbólico-formal, que resulta nessas definições no mundo formal, numa interação com o mundo simbólico.

Uma das diferenças entre o conteúdo apresentado no Ensino Médio e no Ensino Fundamental são outras relações envolvendo seno, cosseno e tangente que mais são exploradas no Ensino Médio. No Ensino Fundamental apenas a coleção LDEF11 apresentou as relações entre essas razões já mencionadas.

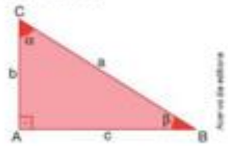
A Figura 2 apresenta a abordagem das relações entre as razões trigonométricas.

Figura 2 – Abordagem das relações ente as razões trigonométricas

Relações envolvendo seno, cosseno e tangente

Observe algumas relações envolvendo o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo.

Considerando o triângulo ABC, temos:



- $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Para demonstrar essa relação, aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC: $a^2 = b^2 + c^2$. Dividindo ambos os membros por a^2, temos:

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \Rightarrow 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

Como $\text{sen}\alpha = \frac{c}{a}$ e $\cos\alpha = \frac{b}{a}$, segue que:

$$1 = (\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\alpha)^2 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

- $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

No triângulo ABC, temos:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{b} = \text{tg}\alpha \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

- $\text{sen}\alpha = \cos\beta$

Essa relação estabelece que o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do complementar desse ângulo, e vice-versa.

A demonstração dessa relação é imediata. Do triângulo ABC, temos:

$$\text{sen}\alpha = \frac{c}{a} = \cos\beta \Rightarrow \text{sen}\alpha = \cos\beta \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a} = \text{sen}\beta \Rightarrow \cos\alpha = \text{sen}\beta$$

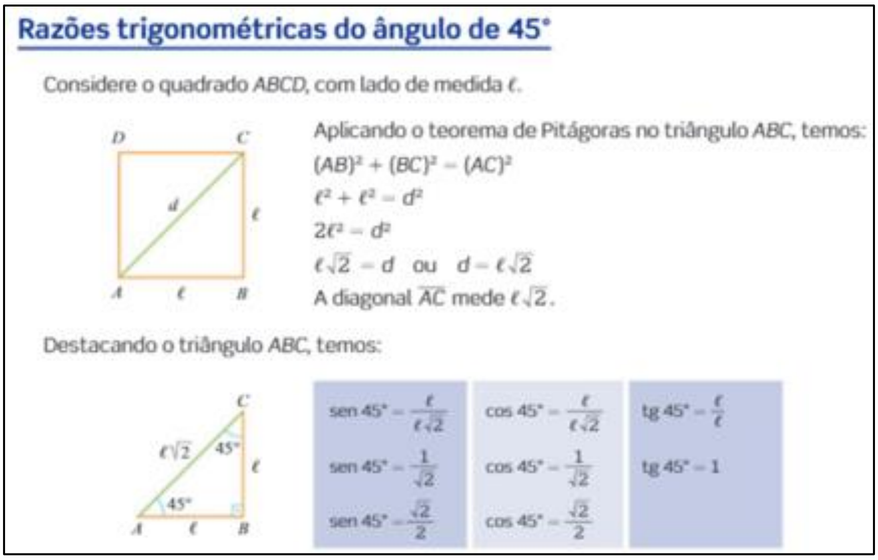
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 245).

Observamos que, embora a figura possa remeter ao contexto corporificado, as relações são obtidas, no contexto algébrico, a partir do teorema de Pitágoras, considerado, nesse caso, um "já-encontrado", que segundo Tall (2013) são os conhecimentos que já temos estruturados como resultado de experiência anteriores.

Notamos que tal interação não ocorre no LDEF11, que não aborda a lei fundamental, se restringe ao mundo corporificado com a discussão dos ângulos suplementares e relaciona o seno e cosseno e um ângulo resultando na tangente. A coleção LDEM02 não apresentou tais relações, mas propõe no manual do professor que seja discutida em sala de aula a "relação fundamental".

Em todas as obras são explorados os ângulos notáveis por meio da aplicação do Teorema de Pitágoras para o cálculo do comprimento da diagonal do quadrado e da altura do triângulo equilátero, e esses dados são organizados ou sugerido que o aluno faça essa organização (LDEM01). As Figuras 3 e 4 apresentam como os livros didáticos exploram o desenvolvimento do conhecimento dos ângulos notáveis.

Figura 3 – Desenvolvimento do ângulo notável de 45°



Razões trigonométricas do ângulo de 45°

Considere o quadrado *ABCD*, com lado de medida ℓ.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, temos:

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

$\ell^2 + \ell^2 = d^2$

$2\ell^2 = d^2$

$\ell\sqrt{2} = d$ ou $d = \ell\sqrt{2}$

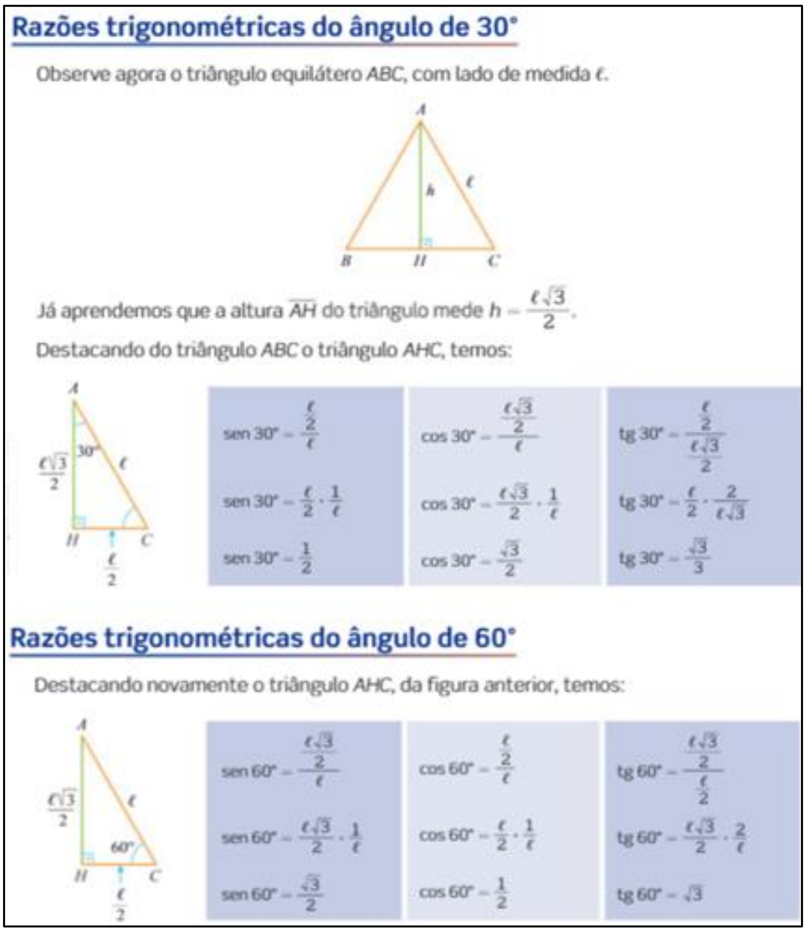
A diagonal $\overline{AC}$ mede $\ell\sqrt{2}$.

Destacando o triângulo *ABC*, temos:

$\text{sen } 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}}$	$\cos 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}}$	$\text{tg } 45° = \frac{\ell}{\ell}$
$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\text{tg } 45° = 1$
$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	

Fonte: Bianchini (2018, P. 208)

Figura 4 – Desenvolvimento dos ângulos notável de 30° e 60° e quadro dos ângulos notáveis



Razões trigonométricas do ângulo de 30°

Observe agora o triângulo equilátero *ABC*, com lado de medida ℓ.

Já aprendemos que a altura $\overline{AH}$ do triângulo mede $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

Destacando do triângulo *ABC* o triângulo *AHC*, temos:

$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell}$	$\cos 30° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell}$	$\text{tg } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$
$\text{sen } 30° = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$	$\cos 30° = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$	$\text{tg } 30° = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{\ell\sqrt{3}}$
$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Razões trigonométricas do ângulo de 60°

Destacando novamente o triângulo *AHC*, da figura anterior, temos:

$\text{sen } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell}$	$\cos 60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell}$	$\text{tg } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}}$
$\text{sen } 60° = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$	$\cos 60° = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$	$\text{tg } 60° = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\ell}$
$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\text{tg } 60° = \sqrt{3}$

Fonte: Bianchini (2018, p. 209)

Nessas construções, ilustradas nas Figuras 3 e 4, notamos a transição corporificado-simbólico-formal. A interação entre os três mundos ocorre de forma gradativa, iniciada pelas figuras geométricas do triângulo e do quadrado e exploração de suas propriedades (corporificado), que dão subsídio para aplicação algébrica do Teorema de Pitágoras – novamente, admitido como um "já-encontrado" – a partir do qual se desenvolvem as manipulações algébricas (simbólico) e estabelecem-se as tabelas (corporificado) para organização dos valores encontrados.

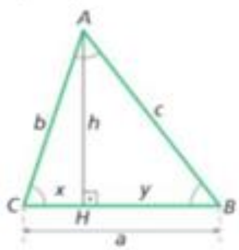
Em relação à trigonometria no triângulo os livros didáticos do Ensino Médio aprofundam nas relações trigonométricas e avançam para o estudo das relações trigonométricas no triângulo qualquer. Observamos que, nas coleções analisadas, as relações denominadas lei dos senos e lei dos cossenos são construídas de forma distintas, possibilitando diferentes possibilidades de abordagem do assunto.

Observamos que os conceitos da lei dos cossenos são construídos a partir de triângulos obtusângulo em duas obras (LDEM01 e LDEM02) e, em outra obra (LDEM03) a demonstração é realizada no triângulo qualquer, representada na Figura 5.

Figura 5 – Abordagem da Lei dos cossenos com triângulo qualquer

Demonstração

Considere um triângulo ABC qualquer e a altura $\overline{AH}$, relativa ao lado $\overline{BC}$.



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AHB, temos:

$c^2 = h^2 + y^2$ ou $c^2 = h^2 + (a - x)^2$

Do triângulo AHC, temos:

$h = b \cdot \text{sen}\,\hat{C}$ e $x = b \cdot \cos \hat{C}$

Assim:

$c^2 = (b \cdot \text{sen}\,\hat{C})^2 + (a - b \cdot \cos \hat{C})^2$

$c^2 = b^2 \cdot \text{sen}^2\,\hat{C} + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C} + b^2 \cdot \cos^2 \hat{C}$

$c^2 = b^2 \cdot (\text{sen}^2\,\hat{C} + \cos^2 \hat{C}) + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$

Como $\text{sen}^2\,\hat{C} + \cos^2 \hat{C} = 1$, concluímos que: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$

Analogamente, considerando as alturas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, temos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$ e $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$

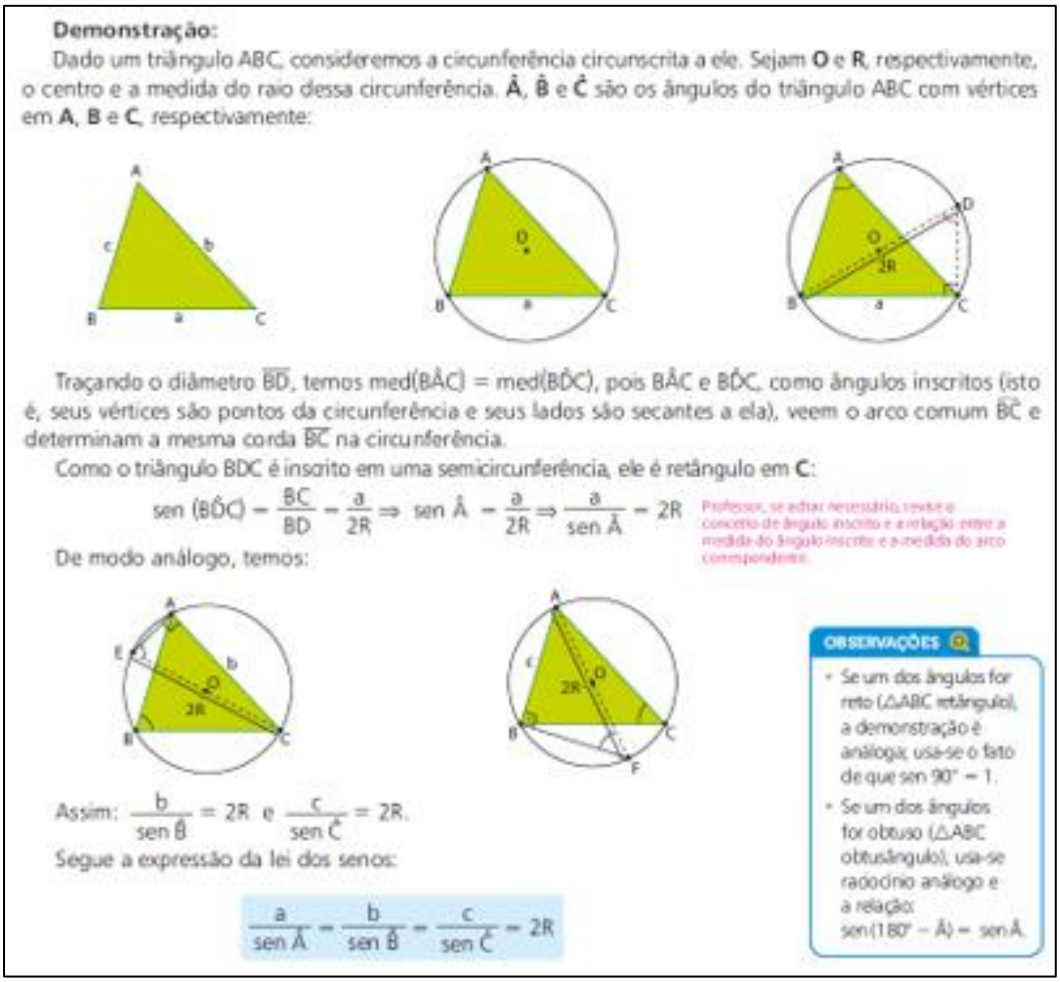
Fonte: Moderna (2016b, p. 38-39).

SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA, 11.; SEMINÁRIO DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU, 2., 2020, Online. **Anais** [...], Londrina: Editora Científica, 2020. ISSN 2237-8901

A Figura 5 ilustra a construção do conceito da lei dos cossenos, e a transição corporificado-simbólico-formal ocorre a partir do triângulo e suas e suas propriedades (corporificado), os processos algébricos (simbólico) e a formalização por meio da expressão algébrica da lei dos cossenos.

Em uma das coleções é apresentada a abordagem a partir de triângulos acutângulos, e, em outra por meio dos triângulos obtusângulo e acutângulo; encontramos ainda a utilização do triângulo inscrito em uma circunferência, reproduzida na Figura 6.

Figura 6 – Abordagem da Lei dos Senos com triângulo inscrito na circunferência



Demonstração:

Dado um triângulo ABC, consideremos a circunferência circunscrita a ele. Sejam **O** e **R**, respectivamente, o centro e a medida do raio dessa circunferência. $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos do triângulo ABC com vértices em **A**, **B** e **C**, respectivamente:

Traçando o diâmetro $\overline{BD}$, temos med($B\hat{A}C$) = med($B\hat{D}C$), pois $B\hat{A}C$ e $B\hat{D}C$, como ângulos inscritos (isto é, seus vértices são pontos da circunferência e seus lados são secantes a ela), veem o arco comum $\overset{\frown}{BC}$ e determinam a mesma corda $\overline{BC}$ na circunferência.

Como o triângulo BDC é inscrito em uma semicircunferência, ele é retângulo em **C**:

$$\text{sen}\,(B\hat{D}C) = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2R$$

Professor, se achar necessário, revise o conceito de ângulo inscrito e a relação entre a medida do ângulo inscrito e a medida do arco correspondente.

De modo análogo, temos:

Assim: $\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = 2R$ e $\frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$.

Segue a expressão da lei dos senos:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

OBSERVAÇÕES

- Se um dos ângulos for reto (△ABC retângulo), a demonstração é análoga; usa-se o fato de que sen 90° = 1.
- Se um dos ângulos for obtuso (△ABC obtusângulo), usa-se raciocínio análogo e a relação: sen (180° − $\hat{A}$) = sen $\hat{A}$.

Fonte: Iezzi *et al.* (2016b, p. 38-39).

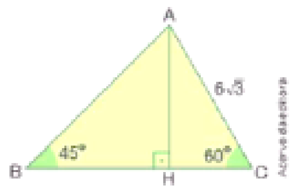
A Figura 6 ilustra como uma das coleções explora a construção do conceito da lei dos senos. A transição corporificado-simbólico-formal ocorre a partir das figuras inscritas (corporificado), as ações de modificar a figura traçando o diâmetro e obtendo o triângulo retângulo permitem a passagem ao mundo simbólico e a formalização ocorre por meio da expressão algébrica da lei dos senos.

As atividades são precedidas por exemplos de resoluções, notamos que a maioria desses exemplos não apresentam contextos e visam a sequência de procedimentos algébricos que precisam ser realizadas para alcançar a solução única do problema. A Figura 7 reproduz um desses exemplos.

Figura 7 – Abordagem da Lei dos cossenos com triângulo qualquer

Atividades resolvidas

R8. Determine as medidas de $\overline{AH}$, $\overline{HC}$ e $\overline{BC}$ na figura a seguir.



Resolução

Inicialmente, obtemos as medidas AH e HC, calculando, respectivamente, o seno e o cosseno de 60° no triângulo AHC.

- $\text{sen}\,60° = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{6\sqrt{3}} \Rightarrow AH = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = 9$
- $\cos 60° = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{HC}{6\sqrt{3}} \Rightarrow HC = \frac{6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HC = 3\sqrt{3}$

Em seguida, obtemos a medida BH, calculando a tangente de 45° no triângulo ABH.

- $\text{tg}\,45° = \frac{AH}{BH} \Rightarrow 1 = \frac{9}{BH} \Rightarrow BH = 9$

Calculando BC, temos:

$$BC = BH + HC \Rightarrow BC = 9 + 3\sqrt{3}$$

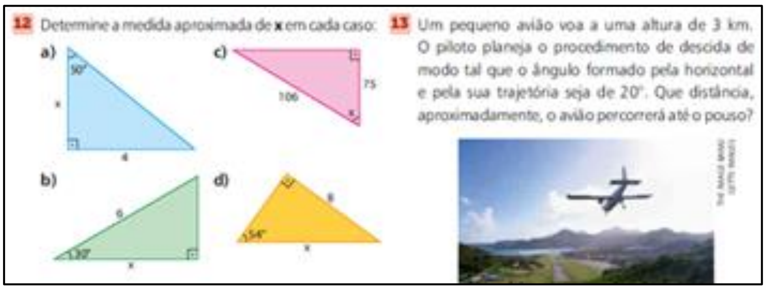
Portanto, $AH = 9$, $HC = 3\sqrt{3}$ e $BC = 9 + 3\sqrt{3}$.

Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 252).

Os exemplos propostos priorizam a inter-relação entre os conceitos e processos. Tall (2013) delineia essa relação como proceitual. Abrantes e Galvão (2020) destacam que esses cálculos de manipulação algébrica fazem parte do mundo simbólico, com base nisso, observamos que os exemplos, na maioria das vezes, estão associados ao mundo simbólico.

Em todos os livros analisados as atividades são apresentadas após a exemplificação da aplicação dos conceitos. Na Figura 8 trazemos um exercício proposto no livro do Ensino Médio após a definição das razões trigonométricas, que explora uma contextualização que pode mobilizar uma ação proceitual.

Figura 8 – Exercícios propostos

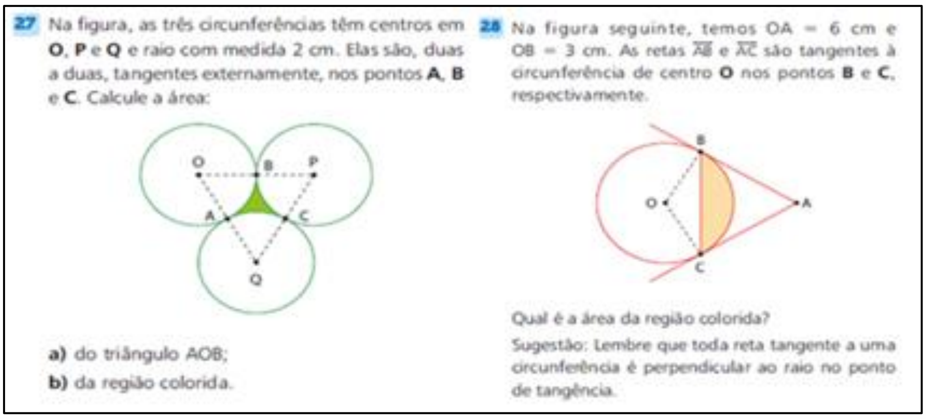


Fonte: Iezzi et. al. (2017a, p. 223).

Essas atividades, ilustradas na Figura 8, mostram os tipos de exercício que utilizam em sua resolução, seno, cosseno ou tangente por meio de procedimentos repetitivos e não demandam reflexões. Apesar disso, nota-se que essas atividades possibilitam que os alunos transitem do mundo corporificado para o mundo simbólico por meio dos conceitos explorados.

Por sua vez, verificamos os exercícios e sua relação com os conhecimentos explorados ao longo do capítulo de trigonometria no triângulo e constatamos que algumas das atividades não podem ser exploradas somente com os conceitos apresentados no capítulo, exigindo dos alunos conhecimentos prévios de outros conceitos, como o de área, que não foram explorados no capítulo.

Figura 9 – Atividade proposta no livro do Ensino Médio explorando trigonometria e área



Fonte: Iezzi et. al. (2017b, p. 43).

SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA, 11.; SEMINÁRIO DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU, 2., 2020, Online. **Anais** [...], Londrina: Editora Científica, 2020. ISSN 2237-8901

Algumas propostas de atividades demandam que os alunos explorem os conceitos estudados anteriormente em grupo e que façam reflexões por meio da interação com outros estudantes. Notamos que quando isso ocorre nos livros, na maioria das vezes acaba tendo a tratativa sequencial de processos algébricos, de forma que todos cheguem sempre ao mesmo resultado, na maioria das vezes pelo mesmo processo. Um exemplo é exibido na Figura 10.

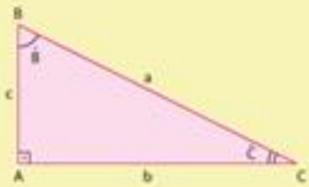
Figura 10 – Atividade para explorar os conceitos de trigonometria

TROQUE **IDEIAS**

Relações entre as razões trigonométricas

Nesta seção, vamos construir algumas relações importantes entre as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) estudadas. Essas relações serão retomadas e generalizadas no volume 2 desta coleção.

Considere o triângulo ABC, retângulo em **A**.



Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

Observe que $\hat{B} + \hat{C} = 90°$

Dois ângulos cuja soma das medidas é 90° são chamados **complementares**.

- Faça o que se pede a seguir.

a) Determine os valores de sen $\hat{B}$, cos $\hat{B}$, sen $\hat{C}$ e cos $\hat{C}$. Qual é a relação entre os valores encontrados?

b) Observe a tabela trigonométrica na página 272 e compare os valores do seno e do cosseno de alguns pares de ângulos complementares. Qual é a relação entre os valores encontrados?

c) Obtenha os valores de tg $\hat{B}$ e de tg $\hat{C}$. Qual a relação existente entre esses valores?

d) Vamos agora descobrir a chamada relação fundamental da trigonometria. Calcule, para o ângulo $\hat{B}$, a soma do quadrado de seu seno com o quadrado de seu cosseno, isto é, $(\text{sen } \hat{B})^2 + (\cos \hat{B})^2$. Faça o mesmo com o ângulo $\hat{C}$. O que você observa?

e) Considerando α um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos catetos medem 5 cm e 12 cm, constate, para o ângulo α, a validade da relação encontrada no item *d*.

f) Se α é a medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo e $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$, qual é o valor de $\cos \alpha$? Desenhe ao menos dois triângulos retângulos que satisfazem essa condição.

g) Calcule a razão $\frac{\text{sen } \hat{B}}{\cos \hat{B}}$, e compare com tg $\hat{B}$. Faça o mesmo com o ângulo $\hat{C}$. O que você observa?

Fonte: Iezzi et. al. (2017b, p. 43).

Compreendemos que algumas perguntas possibilitam que os estudantes façam reflexões sobre os conceitos, porém os processos precisam ser realizados de forma sequenciada e repetitiva. Acreditamos que os contextos relacionados à realidade dos alunos podem estimular os estudantes na busca por investigações e exploração dos conceitos.

Conclusão

Ao compararmos o Currículo do Espírito Santo com a BNCC nos deparamos com a constatação de que o primeiro propõe a trigonometria como componente curricular do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, enquanto a diretriz nacional propõe apenas no Ensino Médio. Esse fato pode ter contribuído para que as editoras suprimissem esse conteúdo de algumas coleções do Ensino Fundamental.

Verificamos que a construção de conceitos da trigonometria no triângulo retângulo realizado no Ensino Fundamental se repete nas coleções do Ensino Médio. Nessa construção predomina a apresentação das razões seno, cosseno e tangente por meio da semelhança de triângulos e todos os livros analisados apresentam os ângulos notáveis da mesma forma.pr

Identificamos possibilidades de percurso pelos Três Mundos da Matemática nas obras e observamos que as edições analisadas enfatizam, nas atividades propostas, o mundo simbólico, priorizando processos algébricos, muitas vezes repetitivos, ao invés de análises e reflexões dos alunos.

Acreditamos que outras propostas de atividades relacionadas à trigonometria podem viabilizar a transição corporificado-simbólico-formal, dentre elas questões abertas que levem os estudantes a realizarem reflexões sobre os conceitos que estão desenvolvendo enquanto esses são construídos.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

ABRANTES, W. G. B.; GALVÃO, M. E. E. L.. Um percurso pelos Três Mundos da Matemática a partir de questões de trigonometria. **Encontro Paulista de Educação Matemática**. 23 e 24 out. 2020. Disponível em: <http://eventos.sbem.com.br/index.php/SP/EPEM2020>.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**. 9 ed. São Paulo: Moderna, 2018. 4 v.

EDITORA MODERNA (São Paulo) (org.). **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Moderna, 2016. 2 v.

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO - FNDE. **Programas dos livros**: dados estatísticos. 2020. Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>. Acesso em: 04 out. 2020.

GIL, A. C.. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

IEZZI, G. et al.. **Matemática:** ciência e aplicações**.** 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016a. 1 v.

IEZZI, G. et al.. **Matemática:** ciência e aplicações**.** 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016b. 2 v.

SAMARA, E. de M.; TUPY, I. S. S.. **História & documentos e metodologia de pesquisa**. Belo Horizonte, Autêntica Editora, 2010.

SILVEIRA, E. **Matemática:** compreensão e prática. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2018. 9 v.

SOUZA, J.; GARCIA, J.. **#Contato Matemática**. 1 ed. São Paulo: FTD, 2016. 1 v.

TALL, D. **How Humans Learn to Think Mathematically**: exploring the three worlds of mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

THIENGO, E. R. **A matemática de Ary Quintella e Osvaldo Sangiorgi**: um estudo comparativo. 2001. 153 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro Pedagógico da Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, Espírito Santo, 2001.