UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO
LIDIANE FERREIRA NUNES

A LEI DOS COSSENOS NO AMBIENTE *GEOGEBRA*: EXPLORANDO RELAÇÕES DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

SÃO PAULO-SP
2014

UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LIDIANE FERREIRA NUNES

A LEI DOS COSSENOS NO AMBIENTE *GEOGEBRA*: EXPLORANDO RELAÇÕES DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Dissertação apresentada à banca examinadora da Universidade Anhanguera de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação da Professora Doutora Monica Karrer.

SÃO PAULO-SP
2014

N923n Nunes, Lidiane Ferreira
A lei dos cossenos no ambiente geogebra: explorando relações de registros de representações semióticas. / Lidiane Ferreira Nunes. – São Paulo, 2014.
188 f ; il. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática, Área de concentração: Ensino e Aprendizagem de Matemática e suas Inovações) – Coordenadoria de Pós- graduação, Universidade Anhanguera de São Paulo, 2014.

Orientadora: Professora. Dra. Mônica Karrer

1. Lei dos cossenos. 2. Registros de representações semióticas. 3. Design experiment. 4. Geogebra. I. Título. II. Universidade Anhanguera de São Paulo. III. Karrer, Mônica.

CDD 516.3

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra. Monica Karrer – ANHANGUERA – UNIAN (Presidente)

____

Prof. Dr. Paulo Henrique Trentin – FEI (1º Membro Titular Externo)

____

Profª. Dra. Siobhan Victoria Healy – ANHANGUERA–UNIAN (2º Membro Titular Interno)

____

Dedico este trabalho ao meu bom Deus, por tudo que tem feito por mim. À minha família que tanto me apoia e incentiva, especialmente a minha mãe Rosa Ferreira da Silva Nunes e ao meu pai Sebastião da Silva Nunes, exemplos de pais e de amor, meu irmão Sebastião Silveira Nunes Júnior pela paciência e apoio constantes. Ao meu esposo Celso Ferreira Nunes que transformou a minha vida, tornando-a mais alegre por estar sempre acreditando em mim, incentivando-me a realizar meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Ao Supremo Deus pelas bênçãos recebidas, pelas forças renovadas a cada dia, pela luz, segurança e força concedidas para conseguir trilhar mais esta etapa de minha vida.

À minha orientadora Professora Doutora Monica Karrer, pela sua disponibilidade, pela dedicação, paciência, consideração e profissionalismo. OBRIGADA!

Ao Professor Doutor Paulo Henrique Trentin, que aceitou participar da Banca Examinadora, pela atenção e pelas valiosas contribuições dadas a esta pesquisa.

À Professora Doutora Siobhan Victoria Healy, que gentilmente aceitou participar da Banca Examinadora, pelo companheirismo e contribuições nas aulas de Atividades de Pesquisa.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante Anhanguera pelo incentivo e contribuições.

Aos integrantes do Grupo de Pesquisa Tecnologias Digitais e Educação Matemática, pelos momentos inesquecíveis que juntos passamos, principalmente pelas contribuições motivadas nas discussões em grupo.

À equipe pedagógica da escola onde foi realizada a pesquisa pelo apoio e incentivo.

Aos alunos e alunas, que aceitaram participar deste estudo, sem medir esforços para que o trabalho se concretizasse. Aos demais alunos pela compreensão nos momentos de ausência e pela torcida.

Ao grande e inesquecível amigo, Pe. Giovanni Grossholz, um pai espiritual, amigo e conselheiro das horas mais difíceis da minha vida.

Ao meu esposo pela compreensão nos momentos de ausência, pela dedicação e pelo incentivo para que eu pudesse realizar este estudo.

À minha família, em especial aos meus pais, à minha irmã Maria Liliane e aos meus irmãos que, embora distantes, estão sempre presentes em minha vida e me incentivam a continuar, mesmo diante de alguns obstáculos.

Ao meu irmão Sebastião Silveira Nunes Júnior, que incentivou e acompanhou todo este processo, com compreensão e sabedoria nas horas de desânimo. Você é um exemplo de perseverança.

Ao meu irmão Manoel Ferreira Nunes, que mesmo atarefado, sempre encontrou uma forma de contribuir com a realização deste sonho, pelo seu companheirismo e contribuições.

Aos amigos Elizabete, Nathália Taíse, Cláudio Assis, Gracilene, Cristina, Fábio e Cristiano, pelo companheirismo nos momentos de estudo e pela amizade.

Ao casal Narciso e Carmelita, pelo apoio, carinho, dedicação, principalmente pela compreensão e pelos sábios conselhos, atuando como verdadeiros pais.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos.

E por fim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente com seus conhecimentos e apoio, em especial, às minhas amigas Michelle Pereira do Nascimento e Eliana Goés Peixoto Stradulis, pela paciência, atenção e amizade.

“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina”. Cora Coralina

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre a lei dos cossenos, que teve por objetivo investigar as produções de estudantes diante de um experimento de ensino sobre esse conteúdo, elaborado de modo a fornecer uma entrada experimental no registro figural aliada a um trabalho de exploração de conversões entre registros, tanto no ambiente papel e lápis como no computacional *GeoGebra*. O estudo foi fundamentado na teoria dos registros de representações semióticas de Raymond Duval e utilizou a metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. para a construção e condução do experimento. As atividades foram aplicadas a quatro duplas de estudantes com idades entre quatorze e dezessete anos, que cursavam o primeiro ano do Ensino Médio de uma escola privada do Estado de São Paulo. O estudo foi organizado em duas fases. Inicialmente foi aplicado um questionário com a finalidade de avaliar os conhecimentos prévios dos estudantes. Dado que eles já haviam tido contato com o teorema de Pitágoras, pretendíamos, nesta etapa, observar se eles aplicavam tal teorema tanto em exercícios de cálculo como em problemas aplicados e se reconheciam que ele não poderia ser aplicado em triângulos não retângulos. Na segunda fase, foram propostas atividades nos ambientes *GeoGebra* e papel e lápis, elaboradas de forma a explorar representações dos registros figural, gráfico, da língua natural e algébrico. Nesta fase, pretendíamos que os estudantes pudessem, por meio de uma entrada experimental no *GeoGebra,* construir a lei dos cossenos, para, em seguida, aplicá-la em situações diversas. A análise das produções dos sujeitos indicou que houve sucesso na construção da lei dos cossenos por meio de conversões principalmente entre os registros figural e algébrico, e avanços na diferenciação entre situações de aplicação do teorema de Pitágoras e da lei dos cossenos. O recurso computacional representou um ambiente favorável à experimentações, dado o seu caráter dinâmico, e a metodologia adotada permitiu a realização de reformulações durante o processo, o que foi vital para atingir o objetivo proposto. Esperamos que esse trabalho possa contribuir para a área de Educação Matemática, representando um material adicional para o ensino da lei dos cossenos.

Palavras chave: Lei dos cossenos; Registros de Representações Semióticas; *Design Experiment*; *GeoGebra*.

ABSTRACT

This project presents a study on the Cosines Rule, whose goal was to analyze the production of some students in a teaching experiment, so as to provide an experimental approach to the figural register, connected to the exploring of converting registers, both on paper and with the program *GeoGebra*. The study was based on Raymond Duvall's theory of Semiotic Representation Registers and used Cobb et al.'s Design Experiment methodology to build and run the experiment. The activities were carried out by four couples of students, aged fourteen to seventeen, who were freshmen at a private High School in São Paulo state. The study was divided into two steps. First, the students were given a test in order to assess their previous knowledge on the topic. Since they were already familias with the Pythagorean Theorem, we wanted to observe if they applied the Theorem both on calculation exercises and applied problems and if they realized that it couldn't be used on non-rectangular triangles. In the second step, activities were provided both in the *GeoGebra* environment and on paper, created so as to explore the figural, graphic, natural language and algebraic registers. In this phase we wanted students to create the Cosine Rule through an experimental approach in the *GeoGebra* environment, in order to apply it later in different situations. The analysis of the subjects' productions showed they were successful in creating the Cosine Rule through conversions, mainly between the figural and algebraic registers, and that there was progress in differentiating situations in which to apply the Cosine Rule and the Pythagorean Theorem. The computer environment represented a favorable one for experimenting due to its dynamic character, and the method used permitted reformulations during the process, which was vital to reach the goal. We hope this project may contribute to the area of Mathematical Education, representing extra material to teach the Cosine Rule.

Keywords: Cosine Rule; Semiotic Representations Registers; Design Experiment; *GeoGebra*.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este estudo tem por objetivo investigar as produções de oito estudantes do primeiro ano do ensino médio diante de um experimento de ensino sobre a lei dos cossenos, elaborado de forma a explorar as relações entre registros de representações semióticas, nos ambientes *GeoGebra* e papel e lápis.

Inicialmente, a primeira motivação na escolha deste tópico ocorreu devido a minha prática docente. Ao longo desses anos, lecionei Matemática no ensino fundamental e Física do Ensino Médio. Com relação a essa última disciplina, sempre me preocupei em compreender as dificuldades dos alunos na concepção e na aplicação da lei dos cossenos. Na escola em que trabalho, esse tópico é ministrado em Física antes de ser aplicado em Matemática. Observamos que, nessa fase, os alunos no máximo compreendem as relações trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente) e o Teorema de Pitágoras.

Verificamos que no processo de ensino e de aprendizagem da lei dos cossenos, normalmente o foco está mais na sua aplicação para a resolução de problemas propostos pelo material didático do que na efetiva construção e compreensão da lei.

Buscando na literatura científica indícios das dificuldades dos estudantes neste tópico, notamos que o problema talvez possa estar associado ao processo de ensino e aprendizagem da própria trigonometria como um todo. Constatamos que uma das dificuldades está relacionada aos diversos símbolos que esse conteúdo possui, bem como à linguagem usada nas aulas. Segundo Brolezzi (1996), a carga simbólica da trigonometria e boa parte da linguagem calcada na base 60 dos povos da Mesopotâmia representam fatores de dificuldade para os estudantes.

Fortes (2012) destacou que as dificuldades encontradas pelos alunos estão associadas ao fato de não reconhecerem elementos básicos de um triângulo retângulo qualquer, como, por exemplo, os catetos, a hipotenusa e os ângulos.

Para Neto (2010) e Procópio (2011), os problemas constatados podem estar integrados ao uso não frequente de ferramentas tecnológicas, como por exemplo, recursos de geometria dinâmica, que permitem ao educando elaborar novas conjecturas de aprendizagem.

Assim, tendo por base os princípios da didática francesa em Matemática e os resultados evidenciados nas análises de pesquisas presentes na literatura científica, buscamos, neste trabalho, tratar da lei dos cossenos, tanto no sentido de construção da fórmula quanto na sua utilização como ferramenta para resolução de problemas.

Dada a importância de um trabalho de integração entre representações de diversos registros para a aprendizagem matemática, fundamentamos o estudo na teoria dos registros de representações semióticas de Raymond Duval (1993, 1995, 2003, 2009, 2011). Para esse pesquisador, como um objeto matemático é abstrato, o seu acesso se faz somente por meio de representações semióticas. Com isso, o ensino dessa ciência deve promover a exploração de representações de diferentes registros semióticos, tais como o algébrico, gráfico, da língua natural e figural, favorecendo ao estudante uma construção sólida do objeto matemático estudado. Desta forma, no presente estudo, elaboraremos e aplicaremos um experimento de ensino que integrará esses registros, envolvendo a exploração das relações entre eles.

Os anos de magistério contribuíram para a observação da evolução tecnológica das últimas décadas, corroborando para mudanças significativas no ensino de Matemática, como por exemplo, o uso de *softwares* nas aulas dessa disciplina de forma a possibilitar ao educando visualizações simultâneas das relações entre representações algébricas e geométricas.

Nesta perspectiva, Gravina (1998) afirma que o dinamismo obtido por meio da manipulação direta das representações faz com que um mesmo objeto matemático tenha representação mutável, o que permite interpretações distintas das comumente obtidas em ambientes do tipo papel e lápis ou giz e lousa.

Para Neto (2010), um *software* dinâmico traz vantagens em relação ao ambiente papel e lápis, ao promover a exploração simultânea de representações dos registros gráfico e algébrico e ao permitir que professores e alunos voltem suas atenções mais aos significados inerentes aos conceitos do que às técnicas de cálculo.

Assim, integramos no experimento de ensino o *software GeoGebra,* por permitir um trabalho de conexão entre representações dos registros figural, gráfico e algébrico, além de uma exploração dinâmica das relações entre representações desses registros.

A metodologia utilizada para a elaboração do experimento e que balizou a sua condução foi a de *Design Experiment* de Cobb *et al*. (2003), que prevê uma abordagem flexível, iterativa e cíclica, permitindo que se façam adaptações durante o processo, de acordo com as produções fornecidas pelos estudantes.

Partindo da problemática apresentada, definimos as seguintes questões de pesquisa:

Que percepções emergem dos estudantes quando participam de um experimento de ensino sobre a lei dos cossenos, concebido de forma a propiciar uma entrada experimental integrada a um trabalho de exploração de representações de diferentes registros?

Em quais aspectos a ferramenta de geometria dinâmica adotada influencia os estudantes a compreender a lei dos cossenos?

Temos por hipóteses que a abordagem proposta favorecerá a dedução e a compreensão da lei dos cossenos, por permitir uma entrada experimental, aliada a um trabalho de relação dinâmica entre representações dos registros algébrico, figural e gráfico e que o aspecto dinâmico do *software GeoGebra* favorecerá também a elaboração de conjecturas e a compreensão da passagem de um registro para outro.

O presente trabalho foi estruturado em seis capítulos. Inicialmente, apresentamos o panorama geral do presente estudo. No capítulo 2, apresentamos o referencial teórico, referente à teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (1993, 1995, 2003, 2009, 2011), a qual norteou o desenvolvimento do instrumento de ensino e a análise das atividades realizadas pelos alunos. Ainda neste capítulo, apresentamos os trabalhos que compuseram a nossa revisão de literatura. No capítulo 3, descrevemos a metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. (2003) e sua relação com o presente estudo. No capítulo 4, apresentamos a descrição e a análise das atividades do experimento elaborado, de acordo com a revisão de literatura e com o referencial teórico adotado. No capítulo 5 apresentamos a análise da aplicação das atividades do experimento e, no capítulo 6, as conclusões do estudo. Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO E REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo descrevemos aspectos relevantes da teoria que norteou a nossa pesquisa, assim como as principais ideias dos trabalhos referenciados como suporte ao nosso estudo. Primeiramente apresentamos a teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval (2003, 2009) e, em seguida, a revisão de literatura composta das pesquisas de Neto (2010), Procópio (2011), Aguiar (2011), Quintaneiro (2010), Bastian (2000) e Fortes (2012), as quais identificaram as principais dificuldades dos estudantes na aprendizagem de conteúdos da trigonometria e apresentaram as contribuições do uso de ferramentas tecnológicas e da teoria de Duval (2003, 2009).

2.1. A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Duval (2003, 2009) define registro como um sistema semiótico que permite três atividades cognitivas: formação, tratamento e conversão, as quais serão descritas adiante. Segundo o autor, os registros, tais como o figural, o algébrico, o gráfico e o da língua natural, são necessários para a caracterização de uma atividade matemática, sendo que os modelos normalmente privilegiados no ensino dessa área, dentre eles o registro algébrico, não são suficientes para a compreensão matemática, necessitando, portanto, de outros sistemas de representação.

Para Duval (2009), tais registros constituem o grau de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor.

O autor defende que, dada a característica abstrata da Matemática, não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação. Em outras áreas, tais como na Biologia, na Física e na Geografia, além do uso de representações semióticas, é possível acessar seus objetos diretamente ou por meio de alguns instrumentos.

A representação, de acordo com Duval (2003, 2009), pode ser estruturada por meio da correspondência entre dois sistemas de ações sobre dois objetos independentes um do outro. Assim, a atividade cognitiva de conversão das representações semióticas expressa uma correspondência entre representações de dois registros de representação.

Abaixo apresentamos o modelo da representação centrado sobre a função da objetivação, proposta por Duval (2009):

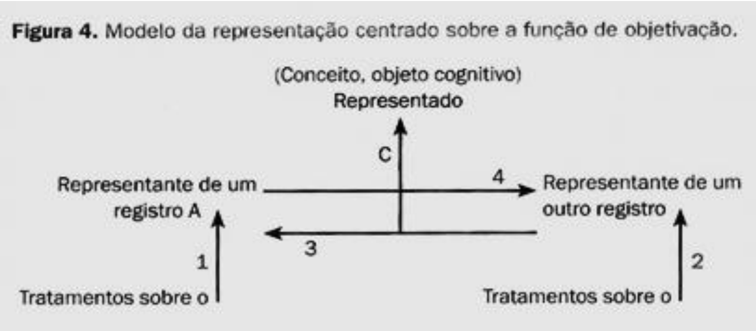


Figura 1 – Modelo da representação centrado sobre a função de objetivação.
Fonte: DUVAL, 2009, p. 89

Enquanto a conversão é uma transformação entre representações que prevê mudança de sistema, mas conservação da referência aos mesmos objetos há outro tipo de transformação entre representações denominada tratamento, que consiste na transformação permanecendo no mesmo sistema.

Como exemplos de tratamento, podemos citar a resolução de um cálculo permanecendo no mesmo sistema de escrita numérica ou uma equação numérica e o ato de completar uma figura usando critérios de simetria. Como modelo de conversão, podemos citar a passagem da lei de formação de uma função para sua representação gráfica e a passagem da representação fracionária de um número para sua representação decimal.

Duval (2009) diferencia um registro de um código pela análise da existência das transformações de tratamento e conversão. Um código, como por exemplo, uma placa de trânsito, não apresenta a possibilidade de tratamento ou de conversão, logo, ele não é classificado como um registro de representação semiótica.

Para ilustrar estas transformações, visando descrever o objeto matemático desse estudo - lei dos cossenos, de forma a relacioná-lo com a teoria dos registros de representações semióticas, apresentamos uma forma de dedução da lei dos cossenos partindo do Teorema de Pitágoras, a qual constitui a abordagem tradicional presente nos livros didáticos. Salientamos que, em nosso estudo, utilizaremos outro tipo de estratégia de ensino deste tópico, a qual será apresentada no capítulo referente à descrição das atividades.

Considere a definição[1] do Teorema de Pitágoras e da lei dos cossenos a seguir como elementos norteadores das atividades propostas nesta pesquisa.

Seja ABC um triângulo retângulo em A. Isso implica que Â = 90º, que $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são catetos e que $\overline{CB}$ é a hipotenusa.

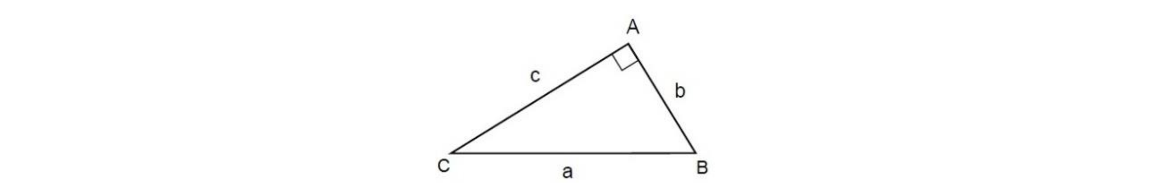


Figura 2: Apresentação de um triângulo retângulo

Traçando a altura relativa ao vértice A em relação à hipotenusa, dividiremos o triângulo em dois outros semelhantes. Essa transformação representa um tratamento no registro figural, conforme ilustramos a seguir.

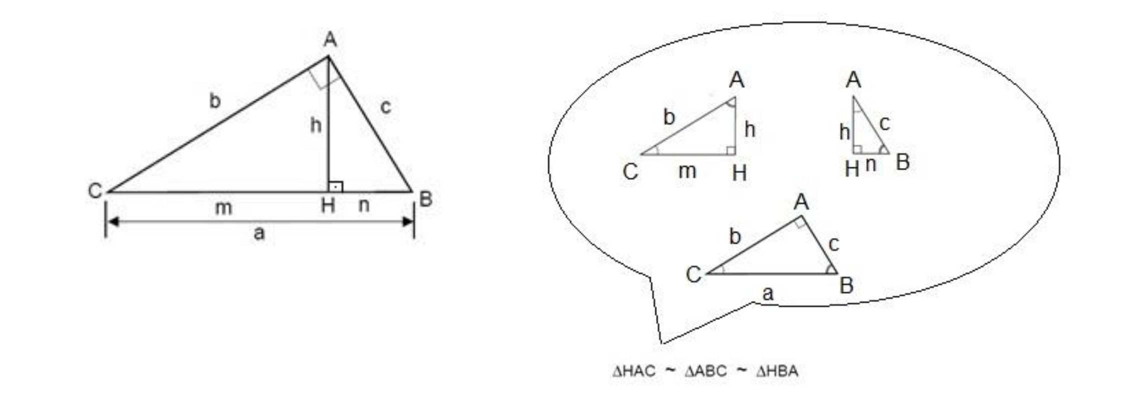


Figura 3 – Apresentação de triângulos retângulos semelhantes

Chamemos a altura AH, relativa à hipotenusa, de h, e as projeções HC e BH dos catetos sobre a hipotenusa, de m e n, respectivamente.

Quando dividimos um triângulo retângulo em dois triângulos menores, traçando a sua altura em relação à hipotenusa, esses dois triângulos são semelhantes entre si e também em relação ao triângulo maior, constatando os casos de semelhança de triângulos.

---

[1]**Adaptado de ARAÚJO, J. C. M.** . Geometria Plana. 2007. (Material didático ou instrucional - Instrucional). Disponível em: http://marciocesarrocha.files.wordpress.com/2012/06/apostila-de-geometria-plana.pdf Acesso em: 28/07/2012 as 14h.

No exemplo citado na figura 3, podemos observar três casos de semelhança, a saber:

- Caso AA (ângulo, ângulo): dois triângulos que possuem dois ângulos respectivamente congruentes são semelhantes;
- Caso LAL (lado, ângulo, lado): dois triângulos que possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses lados congruentes são semelhantes;
- Caso LLL (lado, lado, lado): dois triângulos que possuem os lados correspondentes proporcionais são semelhantes.

Portanto, usando a semelhança de triângulos, concluímos que o quadrado de um cateto é sempre o produto entre a hipotenusa e sua projeção. Para este caso, é feita uma atividade de conversão de representações do registro figural para representações do registro algébrico, além de tratamentos no registro algébrico, conforme apresentado nas figuras 4, 5 e 6.

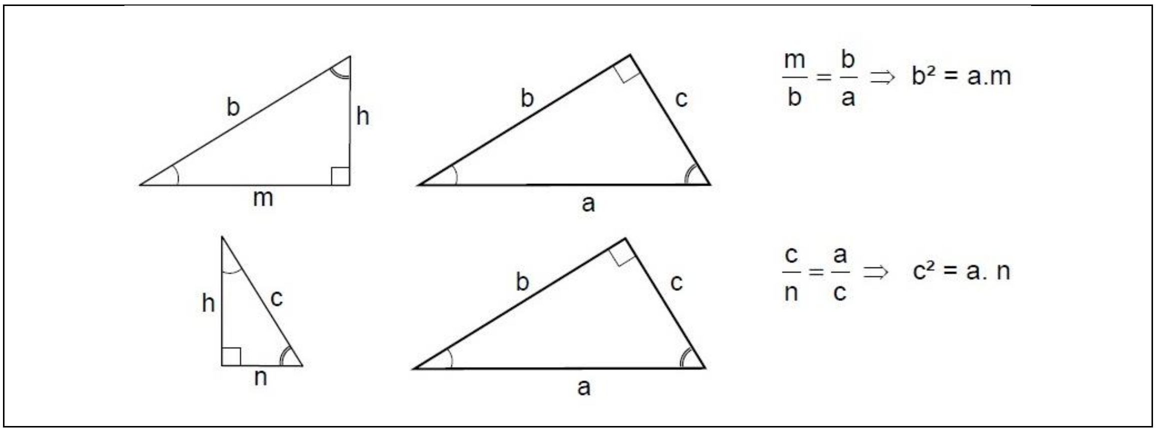


Figura 4: Primeira dedução a partir da conversão de representações do registro figural para representações do registro algébrico.

Ainda, por semelhança de triângulos, podemos deduzir que o quadrado da altura (relativa à hipotenusa) é igual ao produto das projeções dos catetos (Figura 4) e que o produto da hipotenusa pela altura é igual ao produto dos catetos. Nestes casos, novamente, são realizadas atividades de conversão de representações do registro figural para representações do registro algébrico. Em seguida, é realizado um tratamento no registro algébrico, conforme ilustrado nas figuras 5 e 6.

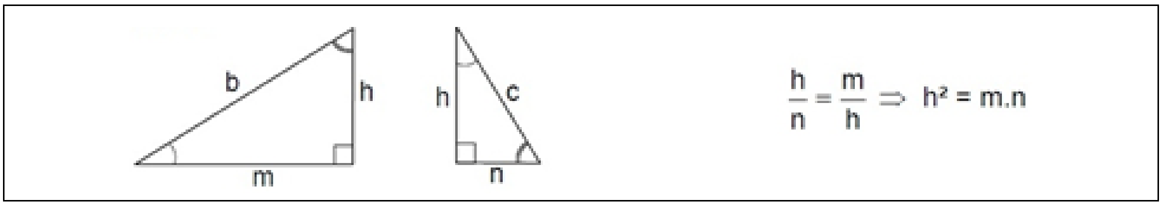


Figura 5 – Segunda dedução a partir da conversão de representações do registro figural para representações do registro algébrico.

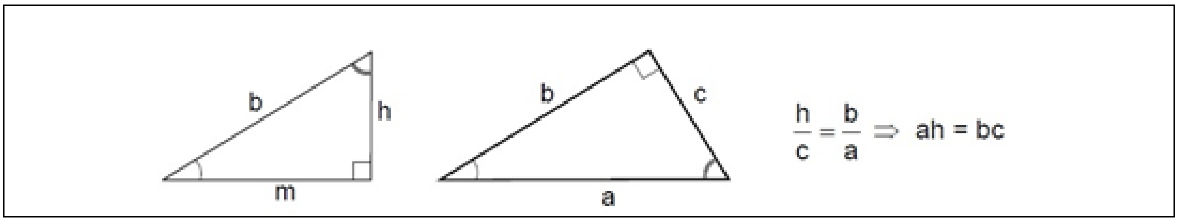


Figura 6 – Terceira dedução a partir da conversão de representações do registro figural para representações do registro algébrico.

Por fim, podemos estabelecer o Teorema de Pitágoras efetuando tratamentos no registro algébrico. Mostramos que $b^2 = am$ e que $c^2 = an$, então, tem-se que: $b^2 + c^2 = am + an = a(m + n)$.

Como $(m + n) = a$, temos que: $b^2 + c^2 = a$, logo $a^2 = b^2 + c^2$

Ou seja, efetuando uma conversão do registro algébrico para o da língua natural, temos que: “o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.

Podemos também efetuar uma conversão de uma representação do registro figural para a língua natural, conforme ilustrado na figura 7.

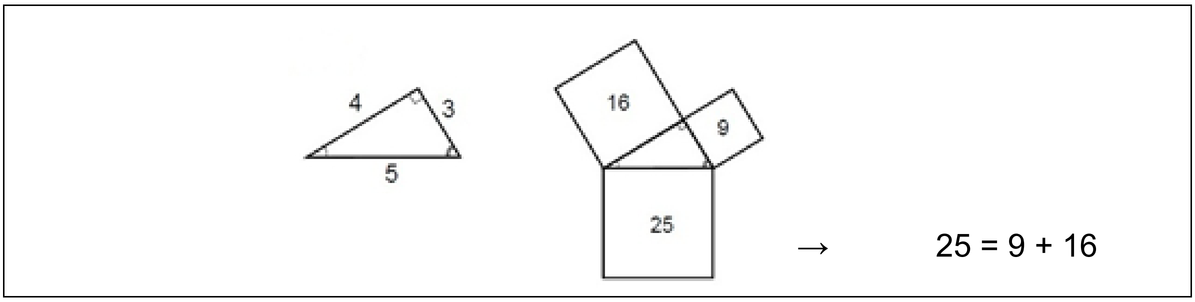


Figura 7: Teorema de Pitágoras.

Neste caso, temos que "a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos".

A determinação da diagonal do quadrado e da altura do triângulo equilátero são duas importantes aplicações desse teorema.

Partindo da aplicação do Teorema de Pitágoras e das relações métricas no triângulo retângulo, podemos deduzir a lei dos cossenos, que representa uma importante ferramenta matemática para o cálculo das medidas dos lados e dos ângulos de triângulos quaisquer. Ressaltamos que este tipo de dedução, com enfoque algébrico, é frequente nos livros didáticos. Apresentaremos tal dedução a seguir, relacionando-a com os pressupostos teóricos de Duval (2009).

Seja ABC um triângulo qualquer. Tracemos a altura relativa ao lado AC e chamemos de m, o segmento AH, projeção do lado AB sobre o lado AC.

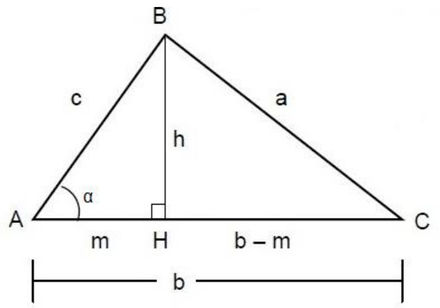


Figura 8 – Representação figural da dedução das relações métricas de um triângulo retângulo.

Então, HC = b – m. Considerando o Δ HBC retângulo em H, faremos a conversão de uma representação do registro figural para uma do registro algébrico e, em seguida, tratamentos no algébrico, obtendo:

$$a^2 = h^2 + (b - m)^2$$

$$a^2 = h^2 + b^2 + m^2 - 2bm$$

$$a^2 = b^2 + h^2 + m^2 - 2bm$$

Como: $h^2 + m^2 = c^2$ e ainda, $\cos \alpha = \frac{m}{c}$, temos que $m = c \cdot \cos \alpha$.

Substituindo na relação anterior temos $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$. Efetuando uma conversão para o registro da língua natural, tem-se que: *"O quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, diminuído do duplo produto desses dois lados, pelo cosseno do ângulo formado por eles."*.

Podemos observar que, caso α = 90º, isto implica que cos α = 0 e a relação fica reduzida ao teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.0 \quad \rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2$$

Desta forma, tomamos o Teorema de Pitágoras como ponto de partida e de chegada para o nosso objeto de estudo.

Segundo Duval (2009), as conversões chamam a atenção porque correspondem a procedimentos de justificação. Pedagogicamente, por meio delas, procura-se o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender o conteúdo matemático.

As atividades de conversão, segundo Duval (2003, 2009), são classificadas como congruentes ou não-congruentes. Para Duval (2009),

> Serão congruentes as que estabelecerem correspondência semântica[2] entre suas unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações. Caso contrário haverá a não congruência, podendo ser maior e ou menor, dependendo da representação de partida e da representação de chegada. (DUVAL, 2009, p. 69)

Para ilustrar a análise da congruência da atividade de conversão segue, conforme apresentado no quadro 1:

I	**II**	**I → II**	**II → I**
1. A soma dos dois produtos de dois inteiros, todos os inteiros sendo diferentes.	a.b + c.d	90%	90%
2. O produto de um inteiro pela soma de dois outros.	a(b+c)	71%	74%
3. A soma dos produtos de um inteiro com dois outros inteiros.	a.b + a.c	48%	87%
4. A intersecção dos complementares de dois conjuntos.	CA ∩ CB	91%	81%

Quadro 1 – Tarefa de conversão entre expressões referenciais e escritura simbólica.
Fonte: DUVAL, 2009, p. 74.

Neste quadro, apresentam-se as porcentagens de acerto na conversão de I para II e na conversão de sentido oposto, ou seja, de II para I. Esses dados foram obtidos de uma pesquisa realizada na década de setenta, no auge da Reforma da “Matemática Moderna”, por meio de um questionário aplicado em muitas classes de *quatrième* de três Liceus da França.

[2] Correspondência semântica, de acordo com Duval (2009), indica que para cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar da outra representação.

De acordo com o quadro 1, os fatores de congruência e não-congruência são compreendidos, destacando os resultados obtidos na tarefa de conversão entre expressões referenciais e escritura simbólica. Da passagem da língua natural para a simbólica, ou da simbólica para a língua natural há dois contrastes, ilustrados pelas dificuldades na execução da conversão. Os fenômenos de congruência e não-congruência evidenciam as dificuldades de representação de uma passagem para outra.

Para Duval (2009), um ensino que privilegia um tipo de registro pode fazer com que os alunos não reconheçam o mesmo objeto através de duas representações diferentes. A ideia de conversão sugere a coordenação de registros mobilizados. Salienta-se que os fatores de não-congruência mudam conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é efetuada.

Duval (2003) define registros monofuncionais como aqueles que permitem tratamentos algoritmizáveis. Como exemplo deste tipo, podemos citar o registro algébrico. Já nos multifuncionais, os tratamentos não são algoritmizáveis. Os registros discursivos são aqueles que permitem o discurso, como por exemplo, o registro da língua natural e os sistemas de escritas. Os não-discursivos podem ser exemplificados pelos gráficos cartesianos e figuras geométricas. Para melhor compreensão segue o quadro 2, relacionando esses tipos de registros, de acordo com Duval (2003):

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Formas de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1 , 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária ...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos • mudanças de sistemas de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Quadro 2 - Classificação dos registros quanto à funcionalidade e discursividade.
Fonte: DUVAL, 2003, p. 14

Além do fenômeno da congruência, Duval (2009) relata outro fator que afeta a atividade de conversão, denominado *heterogeneidade dos dois* *sentidos de conversão*. Este termo revela que saber converter em um sentido não implica saber converter no sentido contrário.

Na atividade de ensino de Matemática, ainda há, segundo Duval (2009), uma insistência em privilegiar um tipo de registro, o que faz com que os alunos não reconheçam o mesmo objeto através das representações em diferentes sistemas.

Duval (2009) alerta para o fato da diferença de importância dada à conversão na atividade puramente matemática e na atividade de ensino dessa ciência.

> Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em outro registro. Em outros termos, a conversão não tem nenhum papel intrínseco nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois eles se fazem baseados num tratamento efetuado em um registro determinado, necessariamente discursivo. (DUVAL, 2003, p.16).

Neste aspecto, o autor indica que do ponto de vista matemático não existe a preocupação com a aprendizagem. Logo, não é dada atenção ao aspecto cognitivo da atividade de conversão. Em nosso trabalho, procuramos tratar o objeto matemático lei dos cossenos com essa preocupação, ao propor ao estudante um ambiente de exploração de diversos registros, com foco na conversão do registro figural para o algébrico.

A seguir, apresentamos as pesquisas presentes na literatura que trouxeram contribuições para o nosso estudo. Foram analisadas seis pesquisas, que apontaram alguns problemas e/ou soluções relacionadas com conteúdos de trigonometria no Ensino Médio, e que, em sua maioria, utilizaram a teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval. Salientamos que na revisão de literatura encontramos raras pesquisas discorrendo sobre a lei dos cossenos, especificamente.

2.2. REVISÃO DE LITERATURA

Ao optarmos por trabalhar com o objeto matemático “lei dos cossenos”, nos deparamos com a dificuldade de encontrar trabalhos científicos que fizessem alusão a esse conteúdo. Por um lado esse aspecto foi positivo, pois nos desafiou a buscar contribuições para resgatar a importância desse conteúdo tanto na Matemática quanto na Física, mas, por outro lado, houve uma maior complexidade para lidar com a revisão de literatura. Assim, os estudos apresentados em nossa pesquisa foram selecionados de acordo com trabalhos da área de trigonometria que analisaram a importância da utilização de *softwares* de geometria dinâmica, que utilizaram os registros de representações semióticas no ensino de trigonometria e, mais especificamente, pesquisas que trataram do teorema de Pitágoras, conteúdo que mais se aproxima dos nossos objetivos.

Inicialmente, analisamos a pesquisa de Neto (2010), que, com base na teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2003), propôs uma sequência didática para o ensino da trigonometria, especificamente para o ensino das funções trigonométricas seno e cosseno. A proposta consistiu na elaboração de um material com o uso do *software GeoGebra,* na tentativa de auxiliar o ensino desse conteúdo, dado que o autor afirmou que seus sujeitos de pesquisa não conseguiram assimilá-lo na época em que tiveram contato com o mesmo, visto que nos cursos técnicos seus professores não tiveram tempo para concluí-lo.

Ao evidenciar tais dificuldades, Neto (2010) propôs a realização de uma oficina na própria instituição de ensino que possivelmente pudesse sanar as dificuldades verificadas pelos alunos na compreensão das funções trigonométricas.

Neto (2010) iniciou seus estudos a partir da hipótese de que os recursos oferecidos pelo *GeoGebra* e a exploração de registros de representação semiótica poderiam favorecer a aprendizagem deste conteúdo. Para o autor, o *GeoGebra* é uma ferramenta tecnológica que auxilia no ensino de Funções e que pode representar um ganho significativo para as interações entre professores e alunos. Além disso, o *GeoGebra*, por ser um ambiente dinâmico, favorece a implementação de uma sequência didática para o ensino das funções reais seno e cosseno. A estaticidade dos gráficos incomodava o autor da pesquisa, levando-o a certificar-se que o uso do *software* contribuiria para o ensino.

Neto (2010) revelou que o uso de uma ferramenta computacional deve estar associado a uma metodologia proposta, pois a ferramenta por si só não garante a aprendizagem dos alunos. A escolha do *software GeoGebra* proporcionou aos alunos aulas diferentes das tradicionais, ao permitir a manipulação de objetos abstratos, dado que os estudantes só conheciam as fórmulas, apresentando um conhecimento aparente sobre o tema.

Procópio (2011) analisou as situações de aprendizagem de Geometria do Caderno do Aluno, 4º bimestre, da primeira série do Ensino Médio, publicado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (2009), contribuindo de forma significativa ao fornecer sugestões de atividades com o uso do *GeoGebra*. Para esta análise a hipótese foi a de que o uso da tecnologia computacional, representada pelo *software* de Geometria Dinâmica *GeoGebra*, favoreceria a articulação das situações de aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo (2009).

Desta forma, Procópio (2011) investigou uma maneira de adaptar o conteúdo de Geometria Plana do Ensino Médio, com base no Currículo do Estado de São Paulo, para uma abordagem dinâmica com o *software GeoGebra.*

Para o estudo, o autor analisou os Documentos Oficiais, os PCN+ (2002), as OCEM (2006), o currículo do Estado de São Paulo (2010) e os Cadernos do Professor de Matemática do Estado de São Paulo (2009). O estudo também foi fundamentado nas pesquisas de Miskulin (1999), Baldini (2004), Bagé (2008), Rosa (2009) e Silva (2010), por terem utilizado *softwares* de geometria dinâmica para o enriquecimento dos processos de ensino e aprendizagem da Geometria.

O trabalho apoiou-se na teoria de Kenski (2003, 2007), que destaca a importância da tecnologia para a educação. Também, foram consideradas as ideias de Borba e Penteado (2007), que ressaltam a importância da informática educativa na matemática.

Ao analisar os documentos anteriormente citados, o autor observou que eles estavam de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo.

Os Cadernos do Professor e do Aluno escolhidos foram os do 4º bimestre da primeira série do ensino médio e os conteúdos analisados foram: Situação de Aprendizagem 1 – rampas, cordas, parsecs[3] – razões para estudar triângulos retângulos; Situação de Aprendizagem 2 – dos triângulos à circunferência – vamos dar uma volta?; Situação de Aprendizagem 3 – polígonos e circunferências – regularidades na inscrição e na circunscrição e Situação de Aprendizagem 4 – a hora e a vez dos triângulos não retângulos.

Para a apresentação dessas quatro situações de aprendizagem, foram realizadas algumas inferências consideradas enriquecedoras para a articulação das representações de figuras geométricas planas com a trigonometria, cooperando para o ensino dos conteúdos presentes nestas atividades. A cada situação, foi proposta uma sugestão de atividade com o uso do *GeoGebra,* sem desviar das ideias propostas no Caderno do Professor, apresentando dinamismo às atividades.

Ressalta-se que o Caderno do Professor e o Caderno do Aluno estabelecem um diálogo, para que o professor possa realizar as atividades de acordo com o proposto pelo currículo.

Para cada Situação de Aprendizagem o autor propôs uma construção, visando favorecer a compreensão dos conteúdos, uma vez que os alunos teriam a oportunidade de manusear as ferramentas do *software*, experimentando novas situações de aprendizagem.

As fases metodológicas consistiram na análise de conteúdo e pré-análise, escolhendo os documentos anteriormente citados. Os resultados foram obtidos por meio da exploração do material escolhido para a análise, averiguando se o uso de algum *software* estava presente nas orientações do Caderno do Professor.

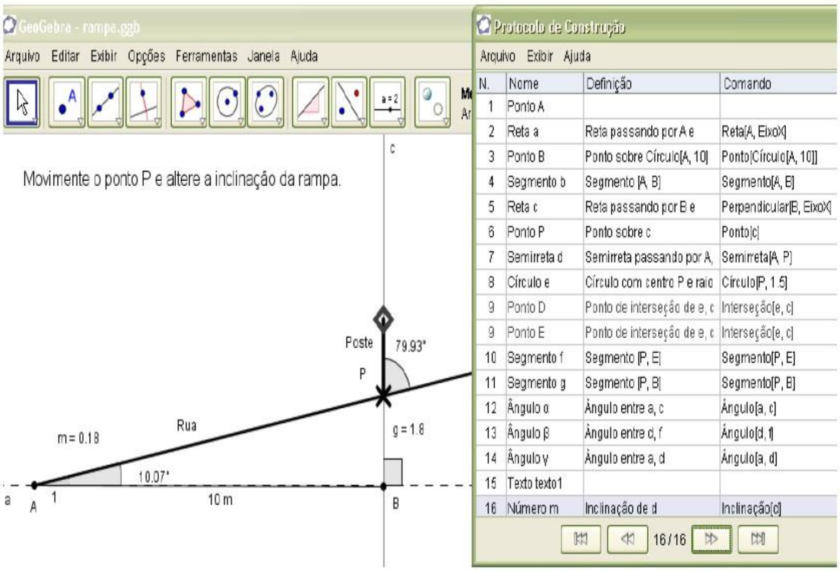
Um exemplo de uma das interferências realizadas com a sugestão do uso do *software GeoGebra*, como instrumento importante de auxílio da aprendizagem, apresentamos na figura 9.

[3] Unidade de distância usada em trabalhos científicos de astronomia para representar distâncias estelares. Equivale à distância de um objeto cuja paralaxe anual média vale um segundo de arco.

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 1- RAMPAS, CORDAS, PARSECS – RAZOES PARA ESTUDAR TRIANGULOS RETANGULOS

Sugestão ao professor:
Tempo previsto: 2 semanas.
Conteúdos e temas: significado da tangente, do seno e da secante de um ângulo agudo, apresentado em contextos significativos; significado do cosseno, da cotangente e da cossecante; relações simples entre as seis razoes trigonométricas.
Competências e habilidades: expressar e compreender fenômenos naturais de diversos tipos; enfrentar situações-problema envolvendo as razões trigonométricas em diferentes contextos.
Estratégias: articulação das noções sobre razões trigonométricas já estudadas em séries anteriores; exemplos ilustrativos da utilização de tais razões em diferentes contextos; exercícios exemplares sobre as razões trigonométricas.

SUGESTÃO DO AUTOR DA PESQUISA COM O USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA



Inclinação de rampa. Adaptado de [http://www.*geogebra*.org/en/upload/files/Cadu/inclinacao.html](http://www.geogebra.org/en/upload/files/Cadu/inclinacao.html) (Acesso em: Agosto de 2011)

Figura 9 – Interferências realizadas com a sugestão do uso do *software* GeoGebra.
Fonte: PROCÓPIO, 2011, p.116.

O autor observou que, embora seja sugerida nos Cadernos a utilização de *softwares*, dos vinte e oito Cadernos analisados, apenas seis recomendavam o uso de algum tipo de ferramenta computacional.

Procópio (2011) enfatiza a ideia da utilização das ferramentas do *GeoGebra* porque, para ele, essas permitem ao aluno praticidade de manipulação dinâmica, experimentação, verificação, construção, representação e intervenção na articulação das Situações de Aprendizagem.

Desta forma o autor buscou trabalhar as situações de aprendizagem utilizando esse *software*, sem fazer modificações, mas apresentando dinamismo para a resolução das atividades. O autor concluiu que é possível articular as Situações de Aprendizagem do Caderno do Aluno com o uso do *software GeoGebra* de forma simples e significativa, confirmando sua hipótese inicial.

Aguiar (2011) apresentou uma proposta para o ensino de trigonometria, baseada na nova proposta curricular do Estado de São Paulo, tendo como resultado final a elaboração de um material de apoio contruído com o auxílio de duas ferramentas computacionais: o *Moodle* e o *GeoGebra*.

Essa pesquisa teve por objetivos desenvolver um ambiente virtual de aprendizagem, com forte utilização do *GeoGebra* na forma de visualizadores com objetos manipuláveis, tendo como plataforma de trabalho o sistema *Moodle* do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos e sua aplicação com alunos de uma escola da rede estadual paulista, na qual o autor exercia função de professor de educação básica e auxiliar o ensino de Trigonometria a alunos do primeiro ano do ensino médio, que tem como sistema educacional a proposta curricular paulista.

Consequentemente, notamos que há um forte alinhamento à meta de melhoria da qualidade do ensino, fornecendo alguns subsídios para um trabalho autônomo da escola e do professor. Neste ponto o projeto propôs uma alternativa de material de apoio, combinando as aulas expositivas com atividades no ambiente virtual, ora privilegiando uma ou outra forma, sendo o ambiente acessível não somente no espaço físico e no horário escolar, dado que foi disponibilizado online. Tal fato favoreceu a autonomia do estudante, importante aspecto na sua formação social.

Para aproximar-se dos seus objetivos, Aguiar (2011) desenvolveu atividades no ambiente *Moodle* com estudantes da primeira série do ensino médio da rede estadual paulista, na cidade de Leme, unidade em que lecionava.

Para Aguiar (2011),

> A possibilidade de utilizar visualizadores construídos no *software GeoGebra* juntamente com os recursos oferecidos pelo sistema *Moodle*, apresenta uma oportunidade de trabalho diferenciado, procurando alternativas fora do ensino tradicional que oferece ao aluno, a partir de sua própria ação, contribuir efetivamente na construção de sua aprendizagem. (AGUIAR, 2011, p.16)

Aguiar (2011) interessou-se pelo trabalho de Moran (2000), que objetivou investigar como devem ser desenvolvidos o ensino e a aprendizagem em uma sociedade interconectada. Partindo dessa problemática, ele iniciou sua pesquisa levando em consideração o abismo entre as necessidades contemporâneas e as formas tradicionais de aprender, com práticas desmotivadoras, em que a relação tempo-aprendizagem perde seu sentido frente à velocidade com que avançamos tecnologicamente.

Em sua revisão bibliográfica, Aguiar (2011) citou trabalhos de Valente (1998), o qual considera importante a inserção do computador na sala de aula, abordando a polêmica do uso de computadores, desde que os mesmos não atrapalhem a rotina das aulas tradicionais. Papert (1994), apud Aguiar (2011), alerta que o uso de computadores é interpretado como ‘resposta imunológica’ da instituição de ensino ao corpo estranho.

Para realização da pesquisa, o autor entrevistou cento e sete dos cento e sessenta e quatro alunos oficialmente matriculados na primeira série de uma escola da cidade do Estado de São Paulo. Inicialmente foi realizada uma entrevista com um questionário secundário, visando traçar o perfil dos candidatos acerca do conhecimento dos conceitos básicos de informática e do acesso à internet. Posteriormente foi apresentada a plataforma *Moodle*, com instruções de como navegar e trilhar a aula no *AVA*.

Os alunos acessavam as atividades e podiam acessar o fórum, uma espécie de *lan-house*. Inicialmente trabalhavam três alunos por computador, mas devido a alguns problemas com o laboratório de informática da escola, os alunos puderam acessar as atividades em outro horário, dado que elas foram liberadas para acesso por outros lugares, em datas e horários diferentes.

As atividades foram elaboradas a partir das situações de aprendizagem do Caderno do Aluno do Estado de São Paulo, volume 4, de 2009. Para cada situação foi realizada uma representação no *software GeoGebra* e posteriormente foi desenvolvido um banco de questões com o auxílio do *Moodle,* para o que os alunos resolvessem e marcassem a alternativa correta referente a cada enunciado.

Essas atividades foram diversificadas, criativas e dinâmicas. Conteúdos, como por exemplo, Teorema de Pitágoras, Lei do seno e a Lei dos cossenos foram abordados de forma a explorar todas as informações presentes tanto no Caderno do Aluno, quanto no Caderno do Professor do Estado de São Paulo.

O objetivo de uma das tarefas era identificar, numa determinada coleção de triângulos, os triângulos retângulos. Os dois grupos apresentaram um padrão semelhante nas respostas:

> ... seu sucesso foi maior para o triângulo retângulo na posição em que é mais comumente desenhado, com um cateto na vertical, diminuiu quando se girou o triângulo em 45º e drasticamente quando o ângulo reto ficou "no topo" (LINDQUIST; SHULTE; 1994, p. 277 apud AGUIAR, 2011, p.142)

O objetivo do módulo 2 era verificar a aplicação do conceito de proporção e frações para determinar o percentual de deslocamento vertical em relação à horizontal e a tangente do ângulo determinado entre o cateto de medida fixa e a hipotenusa.

Verificou-se que, após a realização de um estudo sobre as razões trigonométricas, alguns alunos estavam com dificuldade de relacioná-las à situação proposta. Procurando sanar tais problemas durante as aulas na classe, essa relação era sempre destacada.

Segundo o autor, o objetivo principal da pesquisa foi atingido. Além disso, o trabalho serviu como agente motivador para o professor ao experimentar uma nova, produtiva e significativa forma de abordagem.

Quintaneiro (2010) elaborou uma proposta de investigação das representações e definições formais da trigonometria no ensino médio, tendo como embasamento teórico as teorias de Imagem de Conceito de Tall e Vinner, (1981) e de Registros de Representações Semióticas de Duval (1993).

Para tal investigação, além de um questionário piloto, o autor analisou um dos livros didáticos adotados em escolas do ensino médio do Estado do Rio de Janeiro e investigou as concepções de um grupo de dezesseis professores acerca do assunto.

A pesquisa de Quitaneiro (2010) foi inicialmente motivada por situações ocorridas em sala de aula, principalmente quando os estudantes questionavam se o π indicava 3,14 ou 180°. Ainda, o autor pôde observar, tanto no questionário piloto como na análise do livro, a dificuldade no tratamento das unidades (graus, radianos, dentre outros), fato que o motivou a realizar um estudo histórico da noção de radiano, levantando o motivo de seu surgimento.

Desta forma, o autor buscou investigar como as definições e representações dos objetos em trigonometria eram apresentadas no ensino médio e como a estrutura das definições e as representações utilizadas poderiam alterar a compreensão desses objetos.

Com relação à dificuldade no tratamento das unidades (graus, radianos, dentre outros), o autor constatou que existem diferentes conceitos para a noção seno comumente encontradas em livros didáticos do ensino médio. Dentre elas, destacam-se três, que são: *Seno* de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto a este ângulo e a hipotenusa, em um triângulo retângulo; *Seno* de um ângulo é o valor numérico da medida da projeção do arco que subentende o ângulo, no eixo vertical que passa pelo centro da circunferência unitária; *Seno* é a função real de variável real que associa o comprimento de um arco ao valor do seno do ângulo (medido em radianos) que é subentendido pelo arco. Assim temos que a função seno é dada por $f : R \to R$, $f(x) = sen(x)$.

Diante destas constatações, o autor propôs uma nova representação do conceito de seno, articulando diferentes contextos matemáticos, de modo que os conflitos potenciais que poderiam emergir não configurassem em obstáculos para a aprendizagem, defendendo a importância de se ter consciência da unidade que será trabalhada em trigonometria.

Para sua pesquisa, Quintaneiro (2010) utilizou o referencial teórico de Imagem de Conceito e Definição de Conceito de Tall & Vinner, (1981) para as representações mentais e Duval (1993) para destacar o papel da representação semiótica como instrumento que viabiliza as relações entre os objetos matemáticos. Ele acreditava que o uso de um *software* de geometria dinâmica poderia constituir um ambiente propício para o desenvolvimento de alguns conceitos geométricos.

Para concretizar sua pesquisa, primeiramente ele realizou um questionário "piloto" com um grupo de três professores voluntários da rede pública de ensino, os quais participaram efetivamente do estudo principal. Esse estudo visou investigar as diferentes conceituações para a noção de seno comumente encontradas em livros didáticos do ensino médio. Com esse grupo de professores, o autor fez um estudo exploratório e realizou algumas atividades de Trigonometria do ensino médio em um ambiente de Geometria Dinâmica.

Essa etapa teve por objetivo observar as concepções que os professores tinham sobre Trigonometria, pois, segundo o autor, em geral, não há articulação entre suas ideias sobre trigonometria no triângulo retângulo, trigonometria no círculo, gráfico de funções trigonométricas e a definição formal das noções fundamentais da trigonometria.

O autor fez um estudo comparativo, ou seja, verificou quais foram as representações dadas pelos professores nos questionários para o conceito de seno com o que foi apresentado no livro didático analisado, concluindo que os diversos tipos de representação utilizados de forma geral na escola, favorecem vários fatores de conflito potencial relativos ao conceito de seno.

Todos os participantes realizaram atividades que envolviam o esboço de gráficos, cálculo de determinadas funções e duas questões fechadas sobre o tempo de trabalho e se os entrevistados atuavam no ensino fundamental e médio, ou em apenas uma dessas modalidades.

O autor advertiu que os professores entrevistados sentiram dificuldades para responder o questionário. A análise desta fase levou o autor a concluir que o conceito de seno foi conflitante, pois as representações dadas ao conceito de seno são, em geral, adversas; os participantes da pesquisa confundiam a escrita do número “π”[4] com a unidade “radiano”. Em alguns momentos não sabiam se usavam o π; 3,14... ou 180º e, para os conceitos de arco e ângulo, verificou-se que os professores tinham dificuldades para distingui-los, gerando conflitos com o desenvolvimento de atividades que envolviam a função seno.

Quintaneiro (2010) concluiu que os professores do ensino médio precisam refletir sobre a prática pedagógica, ressaltando as possibilidades de apresentação de um conteúdo, ou seja, lembrando seus objetivos pedagógicos para que os conceitos e representações do conteúdo de Trigonometria, especificamente voltados para a função seno, não sejam conflitantes.

[4] Aspas utilizadas pelo autor.

Bastian (2000) apresentou uma pesquisa sobre o processo de ensino-aprendizagem do Teorema de Pitágoras. O objetivo de seu estudo consistiu em investigar as influências da aplicação de sua sequência didática em estudantes que ainda não haviam tido contato com este tema.

A autora examinou alguns elementos que delimitaram sua problemática, ou seja, equívocos recorrentes cometidos por estudantes. São eles: a) a utilização do teorema para calcular o terceiro lado de um triângulo não retângulo; b) sendo c o comprimento da hipotenusa e a e b catetos, usualmente os alunos fazem c = $\sqrt{a^2 + b^2}$ = a + b, sem perceberem que essa conclusão contradiz a condição de existência de triângulo; c) ao calcular um dos catetos, alguns alunos escrevem que o quadrado desse lado é igual à soma dos quadrados da hipotenusa e do outro cateto; d) os alunos escrevem essa relação corretamente, mas justificam dizendo que aplicaram o “recíproco” desse Teorema; e) na verificação para decidir se um triângulo é ou não retângulo, muitos alunos e mesmo alguns docentes, segundo Berté (1995), apud Bastian (2000), aplicaram o recíproco quando concluíram que, se a relação não é verificada, o triângulo não é retângulo.

Ainda, em uma classe do 3 ème (alunos com aproximadamente catorze anos, o correspondente à nossa oitava série do ensino fundamental), foi proposto o seguinte exercício: “Dados AD, AB e BC, calcular DC”. O autor observou que alguns alunos relataram incorretamente que, segundo o Teorema de Pitágoras, $DC^2 = AD^2 + AB^2 + BC^2$, conforme apresentado na figura 10.

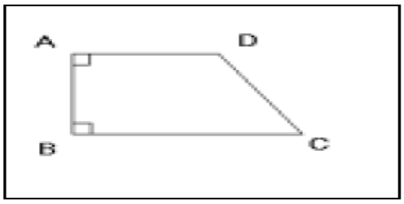


Figura 10 – Exercício proposto.
Fonte: BASTIAN, 2000, p. 3

Berté (1998, p. 119) *apud* Bastian (2000) questionou: “É um mau emprego da analogia? Ou o aluno não ‘viu’ o triângulo retângulo porque a projeção de D não figurava no desenho (...)?”

Para Bastian (2000), esses erros poderiam ser amenizados se fosse realizado um trabalho prévio da condição de existência de triângulo, a qual propiciaria condições para o entendimento do caráter necessário e suficiente da igualdade pitagórica.

Ainda, para a autora, alguns dos erros podem ter sido provocados:

> por fatores próprios da interpretação de problemas geométricos concernentes à apreensão operatória, tais como: fenômeno da não congruência entre enunciado↔figura ou figura ↔ Teorema de Pitágoras, obstáculo do desdobramento de objetos, interferência da rotação do triângulo retângulo no reconhecimento das unidades elementares (catetos e hipotenusa), fundo reticulado mascarando o caminho de resolução do problema. (BASTIAN, 2000, p. 11)

Bastian (2000) utilizou, em sua pesquisa, a metodologia de Engenharia Didática. Artigue (1988) apud Bastian (2000) caracteriza essa metodologia, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em “realizações didáticas”[5] em classe.

Bastian (2000) sugeriu, para sanar os problemas constatados na aplicação do teorema de Pitágoras nos livros didáticos, a sequência apresentada na tabela 1, com o intuito de amenizar os equívocos considerados a priori.

Tabela 1 – Sequência didática para aplicação do Teorema de Pitágoras

Atividade	
1	Condição de existência de triângulo
2	Ênfase para o caráter necessário e suficiente do Teorema de Pitágoras
3	Conjetura sobre a forma do Teorema, a partir da terna egípcia
4	Demonstração hindu por reconfiguração
5	Demonstração algébrica
6	Ênfase para o número mínimo de dados para a aplicação do Teorema
7	Relações métricas no triângulo retângulo a partir da demonstração de Euclides
8	Cálculo de medida da hipotenusa dadas as medidas dos catetos
9	Cálculo de medida de cateto dada a medida do outro cateto e da hipotenusa.

[5] Aspas utilizadas pelo o autor

10	Problema histórico (papiro do Cairo)
11	Problema da duplicação do quadrado
12	Justificação do “esquadro do pedreiro”
13	Altura de um triângulo isósceles; diagonal de um retângulo
14	Distância de dois pontos
15	Construção de segmentos $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $y = \sqrt{a^2 - b^2}$ a partir de a e b
16	Problema do cotidiano: área de telhado
17	Problema do cotidiano: altura de um caminhão x altura de um túnel
18	Problema do cotidiano: portal semicircular fechado com barras de ferro
19	Teorema de Pitágoras para resolver um “problema aberto”
20	Ternas pitagóricas

Fonte: BASTIAN, 2000, p.108.

A autora aplicou essa sequência didática e constatou avanços nas produções dos estudantes, ao comparar os resultados obtidos com os originados por meio da abordagem convencional. Apesar disso, ela admite que não se trata de um trabalho encerrado, dado que a referida sequência poderia ser aperfeiçoada à medida que fosse sendo aplicada em outras turmas com características diferentes daquelas relativas às amostras de sua pesquisa. Ainda, a manipulação de material concreto poderia, por exemplo, ser substituída pela utilização do *software Cabri-Geometre.*

Fortes (2012) examinou os processos de ensino e aprendizagem do conteúdo de razões trigonométricas no triângulo retângulo. Ela analisou os conhecimentos prévios de uma amostra de estudantes do Ensino Médio em Trigonometria, averiguando, desta forma, quais erros eram mais frequentes durante a resolução de situações-problema que envolveu as razões trigonométricas. Ainda, ele buscou estratégias de ensino para auxiliar na aprendizagem deste conteúdo.

Para essa análise, Fortes (2012) descreveu e classificou os erros de uma amostra de setenta estudantes e procurou coletar a opinião de professores sobre os erros normalmente cometidos pelos discentes neste tópico. Partindo desse levantamento, elaborou atividades que pudessem auxiliar os alunos na compreensão de conceitos básicos de Trigonometria e na resolução de problemas que envolviam relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Fortes (2012) aplicou, como instrumentos de coleta de dados, testes sobre Trigonometria, observações na sala de aula durante as aplicações das atividades e um questionário com questões abertas para professores. A autora contou com a participação de setenta alunos, sendo cinquenta e oito alunos do segundo ano do Ensino Médio (uma turma com trinta e três alunos e outra com vinte e cinco alunos) de uma escola da rede Estadual do município de Quevedos, no Rio Grande do Sul, e doze alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA). Participaram também do estudo onze professores de Matemática, tanto da referida escola quanto de outras escolas situadas na mesma região. Ela destaca que a Escola onde realizou a pesquisa é a única de Educação Básica do município, localiza-se na região central e funciona nos três turnos, com turmas do Ensino Médio pela manhã, do Ensino Fundamental à tarde e de Educação de Jovens e Adultos à noite, totalizando trezentos alunos regularmente matriculados, com maioria oriunda de comunidades rurais.

Segundo Fortes (2012), sua pesquisa apresentou aspectos quantitativos e qualitativos. Para investigar os erros dos alunos, a autora elaborou os instrumentos de pesquisa partindo de um levantamento de questões em coleções de Matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio para escolha e adaptações dos testes que foram aplicados para os alunos.

Desta forma, Fortes (2012) procurou entender como o aluno pensou ao resolver as questões, destacando que não foi uma tarefa fácil, pois procurava entender a resolução a partir do que era esperado como resposta certa. A análise desses erros auxiliou na elaboração das atividades que foram aplicadas aos alunos após a realização do teste.

Após as observações realizadas, durante a aplicação das atividades com os professores e os alunos, Fortes (2012) encontrou e elaborou algumas sugestões de novas atividades que foram realizadas por meio de uma *Webquest*, criada pela autora, elemento que configura como o produto de sua dissertação.

Para compreender o conteúdo analisado, a autora pesquisou a histórica da Trigonometria, destacando seu surgimento e sua importância para o ensino da Matemática. Também verificou o tipo de abordagem de trigonometria de três livros didáticos, denominados A, B e C, constatando que o Livro A fornecia questões abertas que favoreciam a reflexão, enquanto que os livros B e C apresentavam um número maior de exercícios técnicos.

Na análise das produções dos estudantes em questões que envolviam o uso das relações trigonométricas no triângulo retângulo, Fortes (2012) classificou os erros em seis categorias. Essas categorias são exemplificadas a seguir, apresentando a resolução de algumas questões que ela propôs aos voluntários da sua pesquisa.

A primeira questão apresentou o seguinte enunciado: *Um avião decola e inicia a subida num ângulo constante de 10^o com a horizontal. Qual a distância horizontal percorrida por esse avião quando atinge 528 m de altura?*

Nesta questão, Fortes (2012) apresentou as resoluções dos sete estudantes que acertaram parcialmente, mas cometeram erros de cálculo, ao dividir o valor da altura (528 m) pelo valor da tangente (0,1763).

Erro A: o aluno não identifica o cateto oposto ao ângulo de 10º como sendo a altura entre o solo e o avião e usa uma relação trigonométrica que não resolve o problema solicitado. Esse tipo de erro foi encontrado nas resoluções dos estudantes A1, A7, A8, A12, A14, A22 e A32. Ilustramos essa categoria com a resolução do aluno A1.

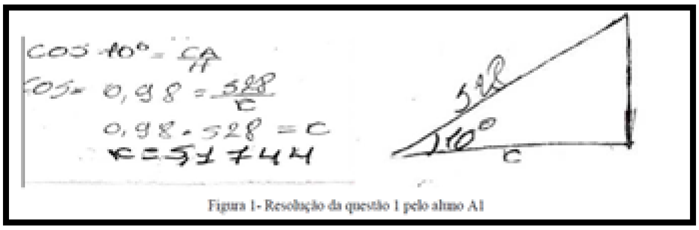


Figura 11 – Resolução do aluno A1.
Fonte: Fortes (2012); p. 39

Erro B: o aluno utiliza o valor do ângulo como sendo o valor de um dos catetos do triangulo retângulo. Esse tipo de erro foi encontrado nas resoluções dos estudantes A12, A13, A20 e A32. Ilustramos essa categoria com a resolução do aluno A12, na figura 12.

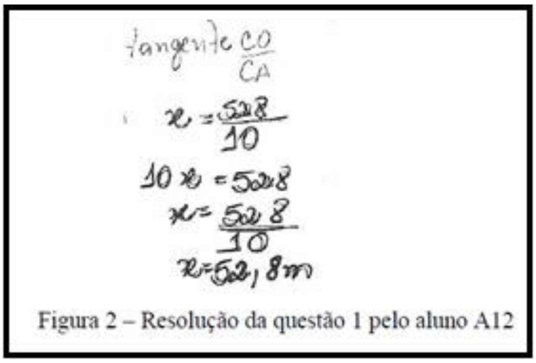


Figura 12 - Resolução do aluno A12
Fonte: FORTES, 2012, p. 39

Erro C: o aluno esboça o desenho do triângulo retângulo, mas não sabe qual dos catetos representa a distância procurada. Nesse caso, os alunos A21, A23, A29 e A31 utilizaram a mesma relação trigonométrica (seno) e representaram a hipotenusa por x. A27 indicou a hipotenusa por "1", conforme ilustrado a seguir.

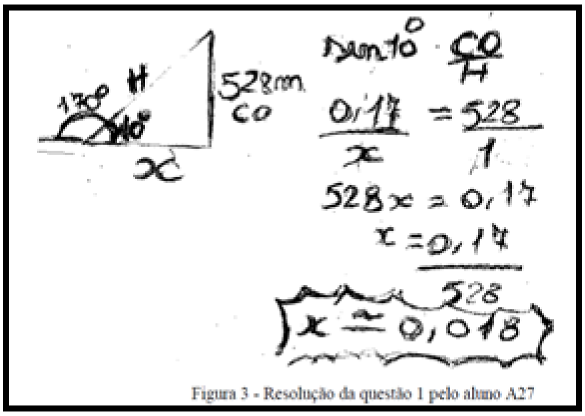


Figura 13 - Resolução do aluno A27
Fonte: Fortes (2012); p. 40

Erro D: o aluno indica incorretamente alguma relação trigonométrica, como fez, por exemplo, A7, que escreveu *sen10⁰=cateto adjacente/hipotenusa*; ou então, como escreveu A19, que indica a relação correta, mas não sabe representar, no desenho, qual é o cateto oposto e qual é o adjacente.

Erro E: erro de cálculo, em especial na divisão, como ocorreu nas respostas de A8, A21, A29 e A33.

Erro F: erro de linguagem matemática, ocorrido nas respostas dos alunos A9, A18 e A31. Um exemplo é a resolução de A18, dada por 528 = 0,18 $x = \frac{528}{0,18}$.

Fortes (2012) revelou que possivelmente os erros mais frequentes estão relacionados ao fato de os estudantes não reconhecerem os elementos de um triângulo retângulo e desconhecerem conceitos básicos como cateto e ângulo. Ainda, o autor atribuiu os erros às dificuldades no conhecimento e na identificação dos conceitos e na compreensão de qual relação trigonométrica relaciona o cateto oposto e o cateto adjacente do triângulo retângulo.

A segunda parte da coleta de dados foi realizada com os professores por meio de um questionário que tinha por finalidade analisar os erros recorrentes nas produções de seus estudantes. O questionário foi aplicado para docentes que lecionavam Matemática em escolas públicas, no município de Quevedos, ambiente escolar em que a pesquisadora realizou seu estudo. Cada professor recebeu a folha de questões e em anexo as categorias de erros apresentadas pelos alunos.

De acordo com os dados coletados por Fortes (2012), os professores acreditam que os erros dos alunos estão associados à falta de pré-requisitos, desconhecimento sobre trigonometria, dificuldades de interpretar os enunciados propostos, dificuldade em identificar os elementos básicos nos triângulos (catetos, hipotenusa, ângulos). Dificuldades em operações básicas, como na divisão, o desconhecimento dos elementos básicos de um triângulo e dificuldades de interpretação dos problemas foram caracterizados como erros mais comuns.

Nesse mesmo instrumento, os professores foram questionados sobre o uso de ferramentas tecnológicas, bem como se conheciam atividades que envolvessem tais recursos, além das atividades apresentadas nos livros didáticos. A maioria afirmou que conhecia e, quando questionados sobre formas diferentes de ensinar conteúdos de trigonometria, os mesmos sugeriram diversas atividades práticas, com uso de *softwares* matemáticos que contribuíssem para o processo ensino-aprendizagem.

Assim, Fortes (2012), reuniu todas as sugestões e criou uma *webquest*, com o objetivo de trabalhar a Trigonometria plana (básica) no Ensino Médio por meio da valorização da própria história da Trigonometria, incluindo as sugestões dadas pelos professores que participaram da pesquisa. Ainda foi possível observar que há uma discussão que defende a necessidade de usar algum recurso da informática que ao mesmo tempo permita trabalhar conceitos básicos da Trigonometria, de modo que os erros avaliados pelos alunos possam ser amenizados. Para a autora, a criação da *Webquest* foi importante neste aspecto, por ser uma atividade de ensino que faz uso de recursos existentes na própria internet. Assim, ela planejou aulas inteiras apenas com *links* apontando textos e recursos da internet.

Fortes (2012), concluiu que as possíveis causas dos erros cometidos pelos alunos estão relacionadas, sobretudo, à falta de compreensão do conteúdo de razões trigonométricas no triângulo retângulo e na definição e identificação dos elementos de um triângulo retângulo. É importante que o professor busque novas metodologias para amenizar as dificuldades e erros encontrados, promovendo situações problema e desafios matemáticos que gerem discussões durante as aulas.

A seguir, apresenta-se o capítulo referente à metodologia adotada.

3 METODOLOGIA DE PESQUISA

Para este estudo, utilizamos a metodologia de *Design Experiment* de Cobb *et al*. (2003), a qual orienta a construção e a análise de experimentos de ensino de conteúdos matemáticos específicos.

Para Ribeiro (2007), esta metodologia está associada à explicação de como os alunos entendem uma ideia matemática particular, considerando os meios, as tarefas e as ações do professor/pesquisador.

Optamos por esta metodologia pelas suas características, visto que ela é cíclica, flexível e dinâmica, além de ter um caráter intervencionista. Essa metodologia concebe professor, pesquisador e alunos como colaboradores do processo. Cobb (2003) destaca cinco características desta metodologia:

- O desenvolvimento de teorias baseadas nos processos de aprendizagem e nos materiais que asseguram a aprendizagem;
- O caráter intervencionista, que possibilita investigar novas formas de aprendizagem, permitindo mudanças educacionais.
- O aceite do redesenho das atividades durante o processo, caso as produções dos estudantes revelem tal necessidade e, por este motivo, a metodologia tem caráter flexível.
- A inclusão dos aspectos prospectivo e reflexivo. Os aspectos prospectivos permitem hipóteses que nortearão a concepção do desenho do instrumento de ensino que se deseja testar, já o aspecto reflexivo permite conjecturas à medida que são analisadas as atividades realizadas pelos alunos, promovendo assim novas possibilidades de testar e elaborar novas atividades. Por ser um processo cíclico e iterativo, aprova constantes feedbacks e adaptações, reavaliando constantemente o processo de ensino e aprendizagem.
- O pragmatismo, no que diz respeito à criação de experimentos, possibilitando, desta forma, a concepção de novas teorias de aprendizagem, embora modestas.

O objetivo dessa metodologia, segundo Cobb et al. (2003) é, criar uma escala reduzida de uma ecologia de aprendizagem na qual um tópico específico poderá ser estudado em profundidade e detalhe.

O termo ecologia enfatiza que a aprendizagem é compreendida como um sistema interativo. Para garantir os objetivos de um experimento de ensino não basta apenas um conjunto de atividades, mas a reflexão do que é repassado aos alunos e as ferramentas que possam contribuir para a aprendizagem de um determinado conteúdo.

De acordo com Ribeiro (2007), uma das características que diferencia essa metodologia das demais é a insolubilidade entre os papéis de professor e pesquisador.

Assim, de acordo com a metodologia adotada, inicialmente elaboramos um primeiro desenho sobre a lei dos cossenos, o qual foi remodelado durante o processo de aplicação, de acordo com as necessidades apontadas pelos estudantes. Ele foi aplicado no laboratório de informática da escola e foram coletados os seguintes dados para análise: produção escrita dos estudantes, áudio-gravação de suas falas e as telas dos computadores capturadas com o auxílio do *software Camtasia Studio*.

As atividades do *design* foram elaboradas com base no referencial teórico e nos resultados evidenciados na revisão de literatura, tanto em pesquisas que defenderam e apontaram as vantagens do uso de recurso computacional, como em estudos que investigaram as dificuldades presentes na aprendizagem de trigonometria.

Após a identificação dessas dificuldades, construímos um experimento de ensino com a finalidade de contribuir para a aprendizagem da lei dos cossenos, o qual foi aplicado a oito alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola particular de ensino do estado de São Paulo. Até o momento da aplicação, estes sujeitos não haviam tido contato nas aulas de matemática com o conteúdo proposto, somente com o Teorema de Pitágoras e com as relações no triângulo retângulo. O uso da lei dos cossenos se restringia à aplicação em problemas de Física.

O experimento foi aplicado em duas fases. Na primeira, os alunos responderam a um questionário preliminar, que teve por objetivo identificar seus conhecimentos prévios sobre o Teorema de Pitágoras, uma vez que este conceito representa um pré-requisito para o estudo da lei dos cossenos. Em seguida, na segunda fase, foram aplicadas atividades nos ambientes *GeoGebra* e papel e lápis. Durante esse processo, o professor-pesquisador assumiu o papel de orientador, interferindo apenas nos momentos de bloqueio. Ainda, ele foi responsável por identificar a necessidade de reformulações durante o processo.

Teve-se a intenção de proporcionar ao estudante um contato mais significativo com a lei dos cossenos, envolvendo-o inicialmente em um ambiente de abordagem exploratória no GeoGebra, antes da formulação algébrica da lei dos cossenos.

3.1 PERFIL DOS SUJEITOS DA PESQUISA

O estudo contou com a participação da professora-pesquisadora e de oito alunos do primeiro ano do ensino médio de uma escola da rede privada da cidade de Guarujá, com faixa etária entre quatorze e dezessete anos. Nessa turma havia trinta alunos matriculados e frequentes.

Inicialmente tínhamos a ideia de trabalhar apenas com seis alunos, mas ao realizar o convite para a turma, o número de alunos voluntários foi maior do que o esperado e, portanto, optamos por trabalhar com oito alunos, ou seja, quatro duplas. No total participaram três meninos e cinco meninas.

Os sujeitos da pesquisa pertencem à classe média, com rendimentos satisfatórios na sala de aula, sendo um deles bolsista da escola. Estudam com sistema apostilado da editora Positivo e dificilmente estão ausentes na escola. Apesar de apresentarem dificuldades nas disciplinas de Matemática e Física, normalmente se empenham para superá-las.

Como relatado anteriormente, quando aplicamos o experimento os alunos conheciam apenas o Teorema de Pitágoras e já tinha visto, sem demonstrações, a lei dos cossenos nas aulas de física, quando do uso da regra do paralelogramo aplicada aos vetores.

Constatamos que os alunos não conheciam *softwares* de Matemática e que nunca tinham realizado atividades utilizando ferramentas computacionais. Diante disso, foi realizada uma atividade de familiarização com o *software GeoGebra* para que os mesmos adquirissem as noções básicas de como utilizá-lo durante os encontros.

A professora-pesquisadora assumiu o papel de orientadora, fazendo intervenções necessárias, sempre que constatava alguma dificuldade dos alunos, ou quando solicitada. As intervenções serão descritas no capítulo 5 alusivo às análises da aplicação do experimento.

3.2 CARACTERÍSTICAS DO LOCAL DE ESTUDO

As atividades do experimento de ensino foram realizadas no laboratório de informática da escola por aproximadamente oito semanas. Os encontros aconteciam em dois dias da semana, segunda-feira e quarta-feira, com duração de uma a uma hora e meia cada. O grupo de alunos foi organizado em duplas, totalizando quatro duplas. Foi disponibilizado para cada dupla um computador.

Além do ambiente computacional, os alunos realizaram atividades no ambiente papel e lápis para que explorassem as diversas representações semióticas de ambos os ambientes. Para facilitar a análise dos resultados coletados, utilizamos o *software Camtasia Studio* para captura de telas.

A escola escolhida para a pesquisa está situada na região central da cidade do Guarujá, no Estado de São Paulo. Essa escola é da rede privada de ensino e conveniada com o Sistema Positivo de Ensino, com turmas do Maternal ao Ensino Médio. No turno matutino oferece o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio, já no vespertino apenas Educação Infantil e o Ensino Fundamental I. É uma escola de pequeno porte, com aproximadamente quatrocentos alunos.

3.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

No primeiro momento foi aplicado um teste para a turma do primeiro ano do Ensino Médio, com o intuito de verificar se eles conheciam o Teorema de Pitágoras e se realmente não haviam tido contato com a lei dos cossenos.

Após as constatações prévias dos conhecimentos dos alunos sobre os conteúdos abordados, foi realizado o contive à turma para participação na pesquisa. Como a escola tinha reunião de pais agendada, optamos por conversar com os pais nessa reunião para explicar o projeto de pesquisa, bem como solicitar a permissão da participação de seus filhos no experimento, visto que todos os envolvidos eram menores de idade.

O passo seguinte foi a familiarização dos alunos com o *software GeoGebra.* Nos demais encontros foram aplicadas as atividades com o objetivo de verificar e explorar as relações entre registros de representações semióticas, nos ambientes *GeoGebra* e papel e lápis, no que diz respeito à lei dos cossenos.

No próximo capítulo, serão apresentadas as atividades inicialmente elaboradas.

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE PRELIMINAR DAS ATIVIDADES

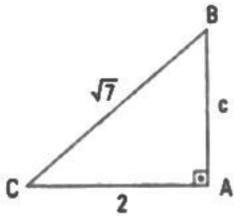
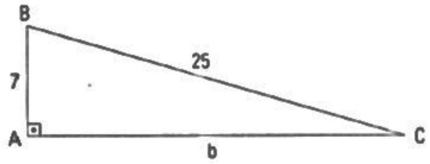
Neste capítulo, serão apresentadas as atividades do primeiro desenho do experimento, o qual foi composto de duas fases. Na primeira, foi aplicado um questionário para levantar os conhecimentos prévios dos participantes. Apesar de eles não terem tido contato com a lei dos cossenos na disciplina de Matemática até o momento da aplicação deste experimento, eles já haviam estudado o Teorema de Pitágoras. Desta forma, tivemos a pretensão de investigar, tanto em situações de cálculo como em problemas de aplicação, seus conhecimentos prévios a respeito deste teorema. Esse questionário é apresentado a seguir.

4.1 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE PRELIMINAR DO QUESTIONÁRIO (FASE I)

Na questão 1, temos por objetivo investigar se o estudante reconhece que, dados dois lados de um triângulo retângulo, é possível determinar o outro lado utilizando o Teorema de Pitágoras. Esta questão é apresentada no registro figural e, para sua resolução, espera-se que o estudante faça uma conversão para o registro algébrico.

Segundo Bastian (2000), alguns dos erros praticados pelos alunos quando da aplicação do Teorema de Pitágoras podem ser provocados por fatores próprios da interpretação de problemas geométricos concernentes à apreensão operatória. Um desses problemas consiste no fenômeno da não congruência entre enunciado↔ figura ou figura ↔ Teorema de Pitágoras. Para esta autora o fenômeno de não congruência pode estar associado ao obstáculo do desdobramento de objetos, ou seja, na interferência da rotação do triângulo e no reconhecimento das unidades elementares, como catetos e hipotenusas, mascarando o caminho de resolução do problema. Observaremos se este problema ocorre na aplicação dessa atividade preliminar.

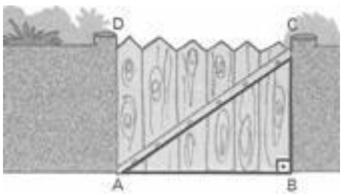
Questão 1 – Determine os valores de c e b, respectivamente:

a)	**b)**
	

Quadro 3 - Apresentação da Questão 1 da Atividade Preliminar
Fonte: GIOVANNI, J.R., 2007, p. 137

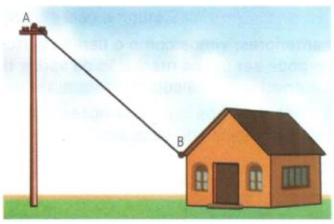
As questões 2 e 3 têm por objetivo investigar se o estudante utiliza o Teorema de Pitágoras em um problema apresentado nos registros da língua natural escrita e figural. Partindo destes registros, esperamos que o estudante estabeleça uma conversão para o registro algébrico. Esperamos que os estudantes resgatem conhecimentos adquiridos em Geometria do nono ano e trabalhem com o Teorema de Pitágoras, reconhecendo as medidas dos elementos do triângulo retângulo em duas situações aplicadas, obtendo, assim, os valores desconhecidos.

Questão 2 – Ao lado, o portão de entrada de uma casa tem 4m de comprimento e 3m de altura. Que comprimento teria uma trave de madeira que se estendesse do ponto A até o C?



Disponível em: http://eugenialima.blogspot.com.br/2012/08/001-calcule-o-valor-do-cateto-no.html
Acesso: 19/02/2013 às: 21:38

Questão 3 – Quantos metros de fio serão necessários para ligar o ponto *A*, que fica na ponta de um poste de 9 m de altura (figura abaixo), com o ponto *B*, situado a 3 m de altura em uma caixa de luz que dista 8 m do poste?



Fonte: GIOVANNI, J. R. , 2007, p. 139

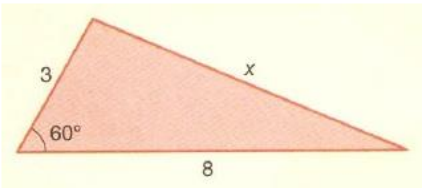
Quadro 4 – Apresentação das questões 2 e 3 da Atividade Preliminar

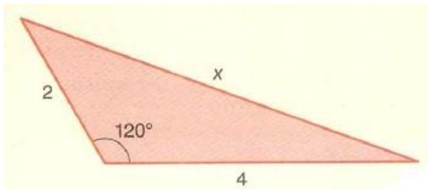
De acordo com Bastian (2000), possivelmente o aluno encontrará dificuldade em situar-se na identificação do Teorema de Pitágoras como ferramenta que o auxilie na resolução dos problemas propostos nas questões dois e três da atividade preliminar.

Como esse conceito representa um pré-requisito para o experimento desse estudo, caso os alunos apresentem dificuldades, serão propostas atividades adicionais sobre o tema.

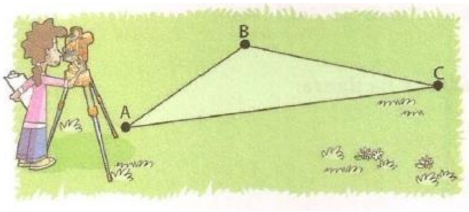
Nas questões 4 e 5, temos por objetivo constatar se os estudantes realmente não tiveram contato com a lei dos cossenos. Na questão 4, a situação é apresentada no registro figural e na questão 5, nos registros da língua natural escrita e figural. Nos dois casos, pretende-se que o estudante estabeleça uma conversão para o registro algébrico. Como provavelmente os estudantes não tiveram contato com a lei dos cossenos, esperamos que eles somente reconheçam que o teorema de Pitágoras não pode ser aplicado em triângulos não retângulos.

Questão 4 – Determine o valor de x nas figuras abaixo:





Questão 5 – No mapeamento de uma região, uma topógrafa posicionou-se em um ponto A e visou um ponto B, a 4 km de A; a seguir visou um ponto C, a 8 km de A, tal que m ($C\hat{A}B$) = 60º. Calcule a distância entre os pontos B e C.



Quadro 5 – Apresentação das questões 4 e 5 da Atividade Preliminar.
Fonte: PAIVA, M., 2009, p. 101

Ressalta-se que, para Bastian (2000), atividades que envolvam o triângulo não retângulo suscitam grande dificuldade para os alunos. Neste tipo de atividade eles não percebem a necessidade de construção das figuras auxiliares indispensáveis à determinação das medidas solicitadas.

4.2 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE PRELIMINAR DAS ATIVIDADES DO EXPERIMENTO DE ENSINO (FASE II)

Na segunda fase, serão propostas sete atividades desenvolvidas nos ambientes *GeoGebra* e papel e lápis.

Na atividade 1, pretendemos que o estudante abra um arquivo contendo o registro figural de um triângulo e que realize experimentações, observando a possibilidade de alterar as medidas dos lados e dos ângulos. Essa atividade tem por objetivo apresentar o aspecto dinâmico do *software GeoGebra.*

Neto (2010) destaca a importância de realizar uma atividade de familiarização com o *software*, para que, durante o experimento, o aluno tenha condições de voltar sua atenção aos conceitos e não ao uso do recurso.

ATIVIDADE 1

Tarefa 1 – Abra o arquivo “Triângulo”. Neste arquivo há um triângulo em que é possível alterar os lados e o ângulo. Experimente realizar algumas alterações.

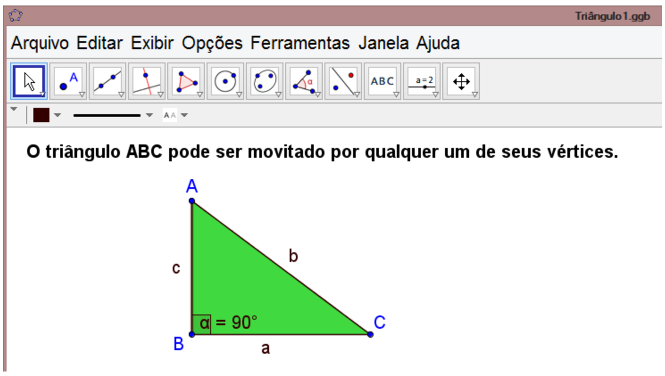


Figura 14 - Triângulo no ambiente *GeoGebra. Elaborada pela autora da pesquisa.*
Fonte: Acervo pessoal.

Quadro 6 - Apresentação da Atividade 1 do experimento.
Fonte: Elaborada no *GeoGebra* pela autora.

Na atividade 2, o aluno abrirá outro arquivo, denominado "Triângulo 1", encontrando um triângulo que possibilita alterar o valor do ângulo α formado por dois lados desse triângulo, conforme figura presente no Quadro 7.

Pretendemos que o estudante altere os valores do ângulo α, observando as condições para que $b^2 = a^2 + c^2$, $b^2 < a^2 + c^2$ e $b^2 > a^2 + c^2$, ou seja, que o primeiro caso ocorrerá se $\alpha = 90^o$, o segundo se $\alpha < 90^o$ e o terceiro se $\alpha > 90^o$. Nesta situação, espera-se que ele estabeleça relações entre os registros simbólico e figural, favorecidas pelo uso do recurso computacional.

Na última questão dessa atividade, pretendemos que o estudante observe a necessidade de estudar outro conceito, uma vez que o teorema de Pitágoras só pode ser aplicado quando o ângulo α do triângulo mede 90^o.

Fortes (2012) ressaltou que os erros mais frequentes detectados em sua pesquisa estiveram relacionados ao fato de os estudantes não reconhecerem os elementos de um triângulo retângulo e desconhecerem conceitos básicos como o de ângulo. Caso isso ocorra no presente estudo, a professora-pesquisadora retomará os conceitos prévios que possam influenciar a construção do novo objeto matemático, por meio de questionamentos ou de propostas de tarefas adicionais.

ATIVIDADE 2

Tarefa 1 – Abra o arquivo “Triângulo 1”. Manipulando o *software,* varie o ângulo α de forma a obter o valor 90^0, valores menores que 90^0 e valores maiores que 90^0.

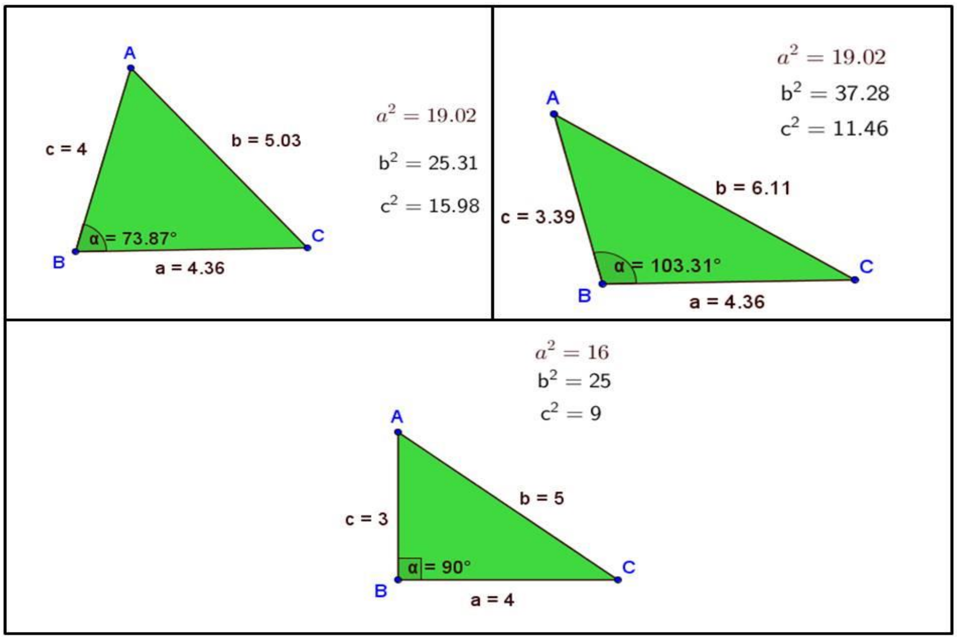


Figura 15 - Triângulo 1 no ambiente *GeoGebra*. Elaborado pela autora da pesquisa.

α	a^2	b^2	c^2

Tarefa 2. Tente observar alguma relação entre a^2, b^2 e c^2 e descreva o que concluiu com essa experimentação. ____

Quadro 7 - Apresentação da Atividade 2 do experimento.
Fonte: Acervo pessoal

Caso o estudante não consiga estabelecer as relações esperadas, o professor-pesquisador fornecerá atividades adicionais que contribuam para a construção desse conceito.

A atividade 3 tem por objetivo que o estudante, conclua, observando o registro figural e efetuando manipulações no *software*, que, no caso em que o ângulo é reto, a área do quadrado do maior lado é igual à soma das áreas dos quadrados dos outros lados, mas que isso não ocorre quando o triângulo não é retângulo. Esperamos, ainda, que ele observe que, no caso de triângulos acutângulos, a área do quadrado do maior lado é menor a soma das áreas dos quadrados dos outros lados e, no caso de triângulos obtusângulos, a área do quadrado do maior lado é maior que a soma das áreas dos quadrados dos outros lados. Para isso, o estudante encontrará uma construção na qual é possível manipular o vértice C, alterando as medidas dos lados e do ângulo α, conforme ilustrado na figura presente no quadro a seguir. Desta forma, esperamos que os alunos, observando os valores da tabela da Tarefa 1, da Atividade 2, estabeleçam as seguintes relações: $b^2 = a^2 + c^2$, $b^2 < a^2 + c^2$ e $b^2 > a^2 + c^2$.

Para Procópio (2011), a utilização das ferramentas do *GeoGebra* permite ao aluno praticidade de manipulação dinâmica, experimentação, verificação, construção, representação e intervenção na articulação das Situações de Aprendizagem.

ATIVIDADE 3
Tarefa 1 – Abra o arquivo Triângulo 3. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo.

Utilize o vértice C para alterar os lados do triângulo.

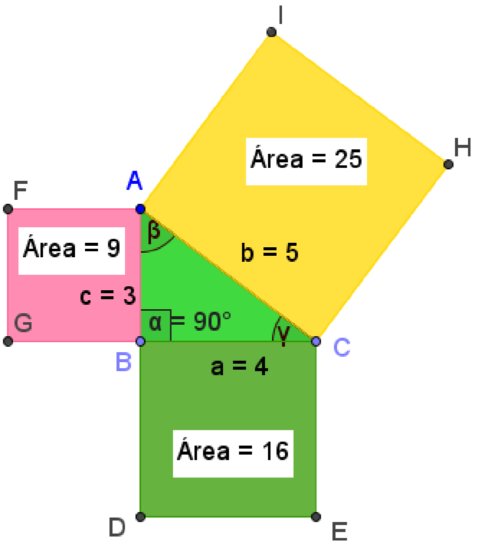


Figura 16 - Triângulo 3 no ambiente *GeoGebra.*
Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Tarefa 2 – Partindo de suas observações, pede-se:
a) O que representa o valor de a^2?
b) O que representa o valor de b^2?
c) O que representa o valor de c^2?

Tarefa 3 – Abra o arquivo "Triângulo 4" e altere as medidas dos lados, conservando um dos ângulos como 90^0. O que você observa? _______________

Tarefa 4 – Abra o arquivo "Triângulo 5". Manipulando o ângulo, pede-se:
a) Em que situações a área do quadrado de lado b é igual à soma das áreas dos quadrados de lados a e c?
b) Em que situações a área do quadrado de lado b é menor que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?
c) Em que situações a área do quadrado de lado b é maior que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quadro 8 – Apresentação da Atividade 3 do experimento.
Fonte: Elaborada no *GeoGebra* pela autora.

Na atividade 4 , pretendemos que o estudante tenha um primeiro contato com a lei dos cossenos, partindo de uma entrada experimental no *GeoGebra*. Neste caso, ele manipulará o *software* e perceberá, usando o comando de determinação de área, as equivalências que ocorrem quando um triângulo não é retângulo. Ressalta-se que nesta fase ainda não será realizada a formalização da lei dos cossenos.

Segundo Duval (2009), um ensino que privilegia um tipo de registro pode fazer com que os alunos não reconheçam o mesmo objeto através de duas representações diferentes. A ideia de conversão sugere a coordenação de registros mobilizados.

Desta forma, procuramos integrar vários registros, tais como o figural, algébrico e da língua natural, para que o aluno possa reconhecer o objeto matemático "lei dos cossenos" em diferentes representações.

ATIVIDADE 4

Tarefa 1 – Abra o arquivo “Colorir”. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo.

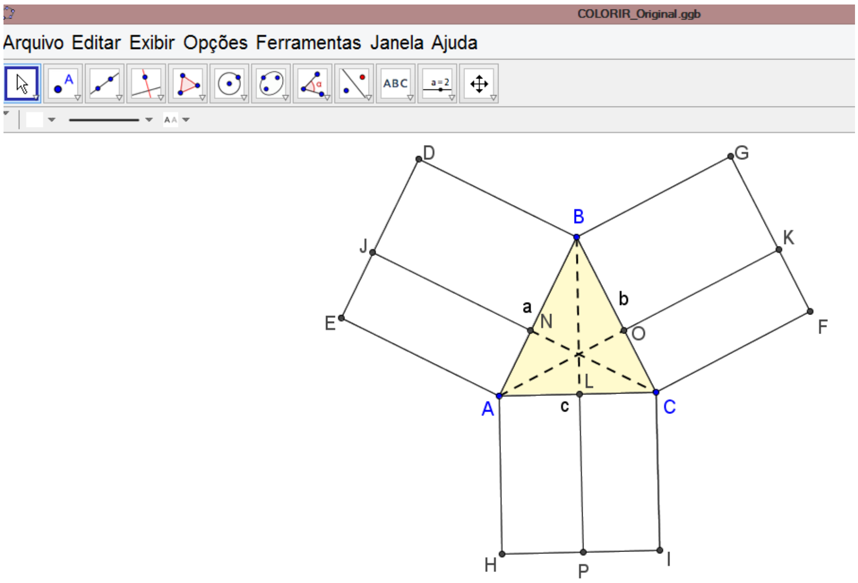


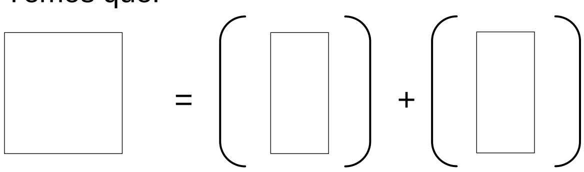
Figura 17 - Colorir no ambiente *GeoGebra*. Elaborado pela autora da pesquisa.

TAREFA 2 – Manipule qualquer vértice do triângulo e verifique se os retângulos de mesma cor continuam com a mesma área.

____
____
____

TAREFA 3 – Pinte, com cores diferentes, os contornos dos quadrados ABDE, BCGF e ACHI.

TAREFA 4 – Complete:
Temos que:



Escrevendo de outra forma e , temos:

=

=

=

Determinando as áreas dos quadrados, temos que:

é o quadrado de lado _____, então a sua área é igual a _________.

é o quadrado de lado _____, então a sua área é igual a _________

é o quadrado de lado _____, então a sua área é igual a _________

Neste caso, temos que:

= ____

Então:
b^2 = ____

Agora precisamos achar a área do retângulo. Para isso, faremos primeiramente uma revisão de trigonometria.

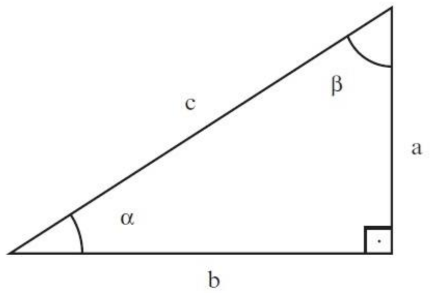
Quadro 9 - Apresentação da atividade 4.
Fonte: Acervo Pessoal

Aguiar (2011), em sua pesquisa constatou que alguns alunos estavam com dificuldades em relacionar as razões trigonométricas à situação proposta. Desta forma, na atividade 5, pretendemos revisar algumas relações trigonométricas no triângulo retângulo, para que o estudante, em atividade posterior, tenha condições de construir a lei dos cossenos. Nesta fase, espera-se que ele já compreenda que, em um triangulo retângulo, o quadrado construído tendo como lado a hipotenusa c tem área igual à soma das áreas dos quadrados construídos tendo como lados os catetos a e b, ou seja: $c^2 = a^2 + b^2$, e que, no caso em que o triângulo não é retângulo, torna-se necessário estudar um novo conceito. Desta forma, a lei dos cossenos surge como uma necessidade para tratar desses casos.

Após a recordação das relações conhecidas entre lados e ângulos de um triangulo retângulo, serão propostas possibilidades de generalização para triângulos quaisquer. A revisão a ser realizada é exposta na atividade 5, Parte 1.

ATIVIDADE 5 – PARTE 1

Tarefa 1. Considerando o triângulo abaixo:



Sendo **a** e **b** os catetos opostos aos ângulos α e β, respectivamente, e **c** a hipotenusa de um triângulo retângulo, sabemos, por exemplo, que:

$c^2 = a^2 + b^2$ (Teorema de Pitágoras); sen $\alpha = \frac{a}{c}$, ou seja, a = c. senα; cos $\alpha = \frac{b}{c}$, ou seja, b = c.cosα; tg $\alpha = \frac{a}{b}$, ou seja, a = b.tgα;	sen $\beta = \frac{b}{c}$, ou seja, b = c.senβ; cos β = $\frac{a}{c}$, ou seja, a = c.cosβ; tgβ = $\frac{b}{a}$, ou seja, b = a.tgβ.

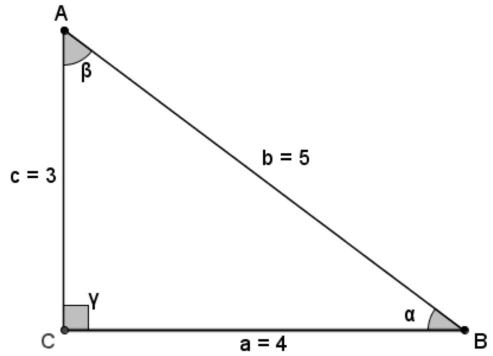
Quadro 10 - Apresentação da Atividade 5 – Parte 1
Fonte: Acervo pessoal

Em seguida, será proposta a segunda parte da Atividade 5, que tem como objetivo averiguar se o conteúdo exposto na revisão foi compreendido por cada dupla. Essa atividade visa à compreensão das relações trigonométricas no triângulo retângulo, para favorecer posteriormente a dedução da lei dos cossenos.

Fortes (2012) destacou que os erros mais frequentes estavam relacionados ao fato de os estudantes não reconhecerem os elementos de um triângulo retângulo e desconhecerem conceitos básicos como cateto e ângulo, às dificuldades no conhecimento e identificação dos conceitos e na compreensão de qual relação trigonométrica relacionam o cateto oposto e o cateto adjacente do triângulo retângulo. Observaremos se essa dificuldade também ocorre com os nossos sujeitos na resolução dessa atividade.

ATIVIDADE 5 – PARTE 2

Tarefa 1. Considere o triângulo da figura abaixo:



a) Esse triângulo é retângulo? Justifique.

____

____

____

b) Calcule os cossenos dos ângulos α e β.

c) Calcule os senos dos ângulos α e β.

Quadro 11 - Apresentação da Atividade 5 – Parte 2
Fonte: Acervo pessoal

A atividade 6 tem como objetivo a construção da lei dos cossenos, por meio de uma demonstração visual, utilizando áreas. Pretende-se que o aluno apresente os registros figural e algébrico. Cada aluno analisará o seu arquivo no *GeoGebra*, o qual será nomeado por "Colorir_Nome". No lugar da palavra Nome, serão substituídos os nomes dos integrantes da dupla.

Procópio (2011), chamou a atenção para a utilização da interface do *software GeoGebra*, justificando que ela é apropriada para a construção dos conceitos geométricos, estimulando, assim, o desenvolvimento do raciocínio matemático, possibilitando, também, ao educando, a formulação de novas conjecturas, visualização dinâmica, validação de hipóteses e verificação de possíveis erros. Desta forma, procuramos explorar a potencialidade dessa ferramenta de modo a trazer esse tipo de vantagem pedagógica.

ATIVIDADE 6

Tarefa 1. Abra o arquivo "Colorir_Nome". Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo. Vamos agora procurar uma relação entre os três lados de um triângulo qualquer, de lados **a**, **b** e **c**.

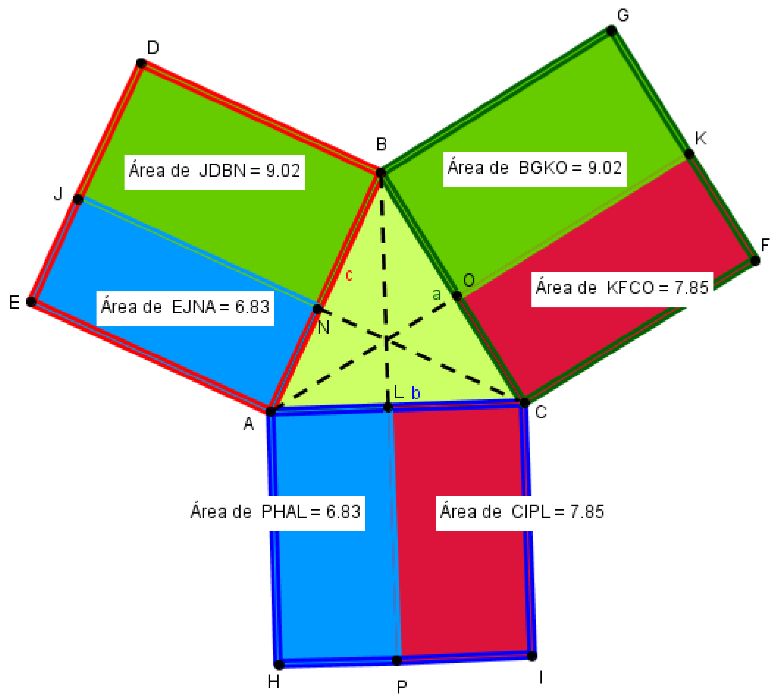
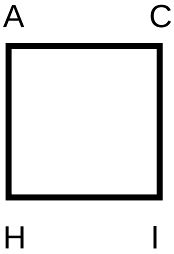


Figura 18 - Colorir_Nome no ambiente *GeoGebra*. Elaborado pela autora da pesquisa.

Tarefa 2. Vamos retomar a conclusão da atividade 4. Neste caso, temos que:



= ____

Então:
b^2 = ____________________________________

a) Determine a área do retângulo de cor X, com base na revisão realizada na atividade 5.

b) Substitua o resultado obtido na conclusão da atividade 4. A fórmula encontrada permite que se determine a medida do lado de um triângulo qualquer, sendo conhecidas as medidas dos outros dois lados. Essa fórmula é denominada **"Lei dos Cossenos".**

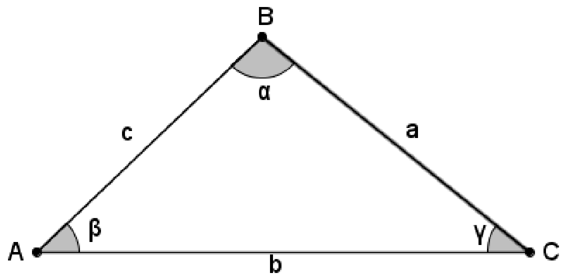
Quadro 12 – Apresentação da Atividade 6 – Continua
Fonte: Adaptado de: http://www.dinamatica.com.br/2011/03/uma-deducao-grafica-da-lei-dos-cossenos.html Acesso em: 06/12/2012 às 11h.

Na atividade 7, pretende-se verificar se o estudante aplicará o conhecimento construído anteriormente na resolução de situações-problema. Neste caso, pretende-se que ele estabeleça relações entre os registros figural, da língua natural e algébrico. Na apresentação da atividade 7 a Tarefa 1 é apenas de constatação (retomamos a conclusão da atividade anterior).

Como na atividade preliminar constatamos que os alunos não conheciam a lei dos cossenos, optamos por incluir nesta atividade os mesmos exercícios propostos anteriormente, pois ao resolvê-los, os alunos poderiam ter o respaldo dos questionamentos realizados no dia da aplicação.

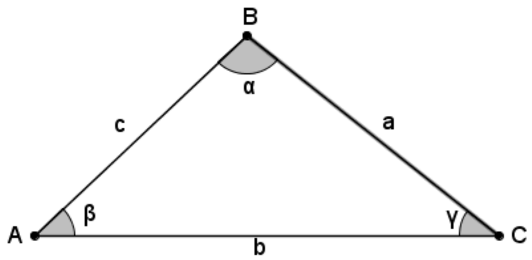
ATIVIDADE 7

Tarefa 1. Considere o triângulo abaixo. Na atividade anterior, você concluiu que:



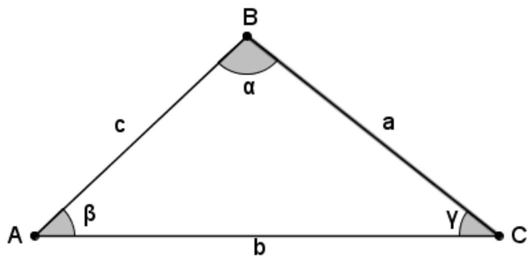
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\alpha$$

Tarefa 2. Determine a fórmula para a obtenção da medida do lado a.



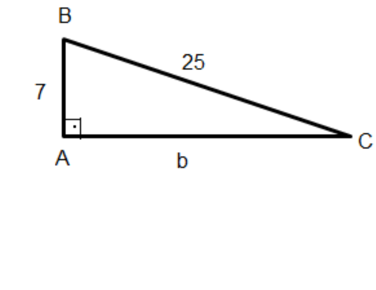
$a^2 =$ ______________________________

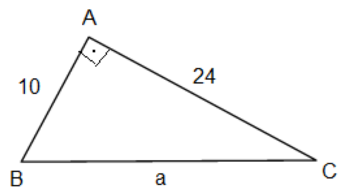
Tarefa 3. Determine a fórmula para a obtenção da medida do lado c.

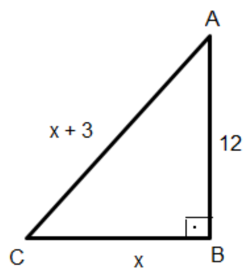


$c^2 =$ ______________________________

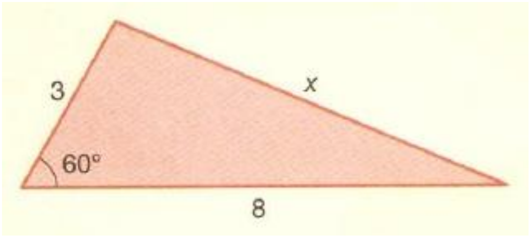
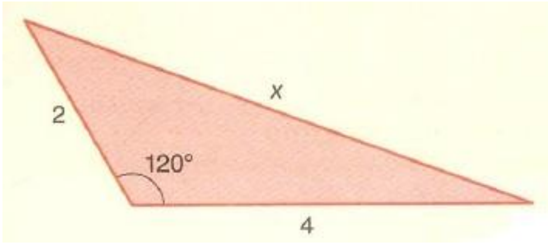
Tarefa 4 – Determine as medidas desconhecidas, dadas em centímetros, em cada triângulo ABC:



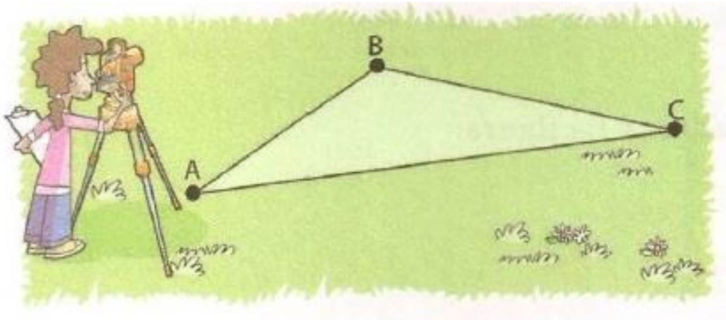




Tarefa 5 – Determine o valor de x nas figuras abaixo:

Tarefa 6 – No mapeamento de uma região, uma topógrafa posicionou-se em um ponto A e visou um ponto B, a 4 km de A; a seguir visou um ponto C, a 8 km de A, tal que m ($C\hat{A}B$) = 60º. Calcule a distância entre os pontos B e C.



Quadro 13 - Atividade 7 do experimento.
Fonte: PAIVA, M., 2009, p. 101-137

Espera-se que o experimento dessa pesquisa possa trazer contribuições para o ensino da lei dos cossenos, representando uma ferramenta adicional para as aulas de Matemática do ensino fundamental e médio.

No capítulo seguinte, apresentaremos os resultados da aplicação desse experimento.

5 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DO EXPERIMENTO

Neste capítulo, descreveremos os resultados da aplicação do experimento, apresentando, inicialmente, os dados coletados na atividade exploratória individual[6] (Fase I) e, posteriormente, os dados relativos às atividades desenvolvidas com o experimento de ensino (Fase II).

5.1 DESCRIÇÃO DA FASE I

A professora-pesquisadora se apresentou a uma turma do primeiro ano do ensino médio de uma escola da rede privada da cidade do Guarujá, explicou o projeto de pesquisa e, posteriormente, solicitou aos alunos que respondessem ao questionário composto por cinco questões, sendo as três primeiras questões relativas ao Teorema de Pitágoras e as demais à lei dos cossenos.

Conforme apresentado no capítulo 4, as três primeiras questões tinham como objetivo verificar a compreensão dos alunos quanto ao Teorema de Pitágoras e, as demais, a constatação de que não haviam tido contato com a lei dos cossenos.

Com o intuito de favorecer a compreensão desse texto, para a análise das produções dos estudantes que participaram do experimento de ensino, optamos por classificar as duplas em A, B, C e D.

Como a atividade exploratória inicial foi desenvolvida individualmente, classificamos os estudantes da dupla A como Aluno 1 e Aluno 2, os estudantes da dupla B como Aluno 3 e Aluno 4, os estudantes da dupla C como Aluno 5 e Aluno 6 e os estudantes da dupla D como Aluno 7 e Aluno 8.

No item “a” da Questão 1, constatamos que os alunos 4, 5, 7 e 8 não apresentaram qualquer resolução. O aluno 1 foi o único que apresentou uma resolução “correta”, conforme ilustrado na figura 19.

---

[6] Atividade exploratória individual apresentada no Apêndice B

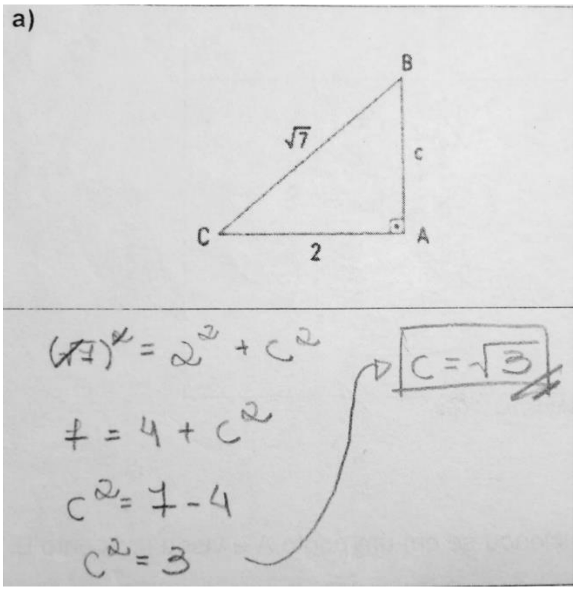


Figura 19 - Resolução do Aluno 1 - Questão 1.a da atividade exploratória.
Fonte: Acervo pessoal.

Os alunos 2, 3 e 6 apresentaram problemas na resolução. Constatamos que apenas os alunos 2 e 6 aplicaram corretamente o Teorema de Pitágoras, apesar de o aluno 6 ter esquecido do radical na primeira passagem. Salientamos que sem o radical, o resultado seria igual a 49. As produções desses alunos são apresentadas a seguir.

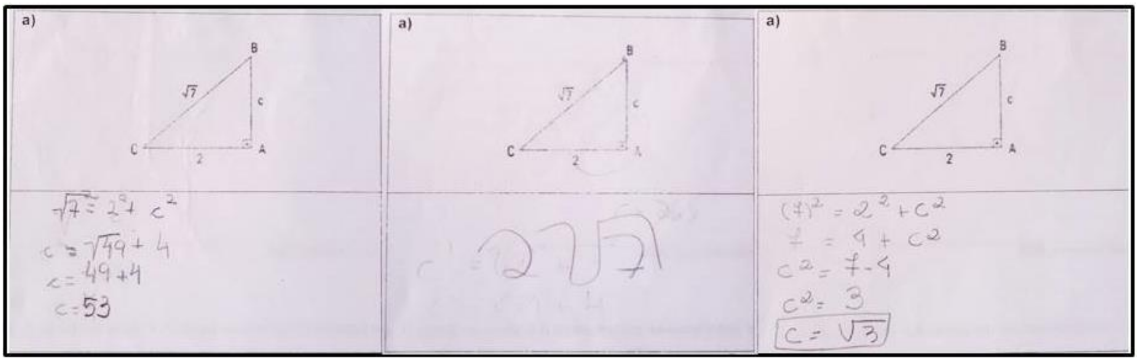


Figura 20 - Resolução dos alunos 2, 3 e 6, respectivamente - Questão 1.a da atividade exploratória.
Fonte: Acervo Pessoal

Constatamos, da mesma forma que apontado por Quintaneiro (2010), dificuldades em cálculos básicos na resolução dos exercícios. Ainda, o fato de quatro alunos deixarem a questão sem resolução aponta que provavelmente eles não souberam reconhecer que o exercício demandava a aplicação do Teorema de Pitágoras.

No item “b” da Questão 1, verificamos que os alunos 4, 5 e 7 não apresentaram qualquer resolução.

Os alunos 1, 2, 3, 6 e 8 apresentaram problemas na resolução. Constatamos que apenas os alunos 1, 2 e 6 aplicaram corretamente o Teorema de Pitágoras, mas apresentaram equívocos nos cálculos, enquanto os demais não souberam aplicar o teorema. As produções desses alunos são apresentadas nas figuras 21 e 22. Ressaltamos que o aluno 6 apresentou o resultado correto, apesar de não extrair a raiz no final da resolução.

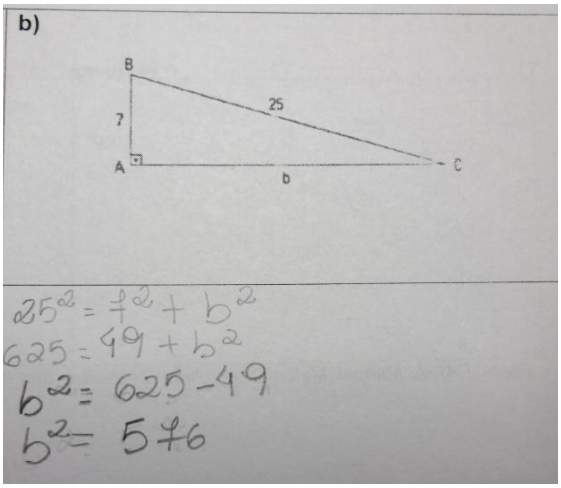


Figura 21 - Resolução do Aluno 1 - Questão 1.b da atividade exploratória.
Fonte: Acervo pessoal

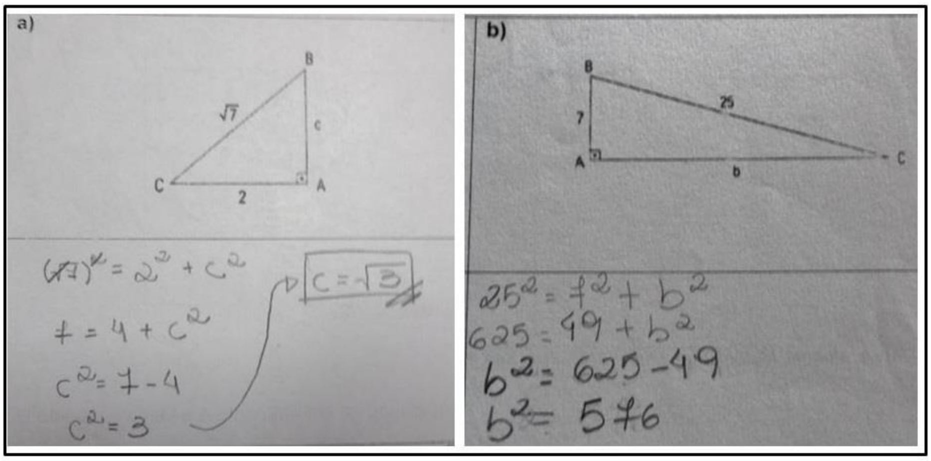


Figura 22 - Resolução dos alunos 2 e 6, respectivamente - Questão 1.b da atividade exploratória.
Fonte: Acervo pessoal

O Aluno 1, apesar de indicar corretamente a diferença entre 625 e 49, acabou por efetuar a soma desse números. O Aluno 2 não aplicou corretamente as operação inversas da adição e da potenciação. Já o aluno 6 não finalizou o exercício, talvez por não ter recordado a operação inversa da potenciação.

O aluno 3 apresentou dificuldades no reconhecimento de elementos básicos do triângulo retângulo, como por exemplo, a hipotenusa e os catetos e, consequentemente, aplicou de forma incorreta o Teorema de Pitágoras, conforme ilustração da figura 23.

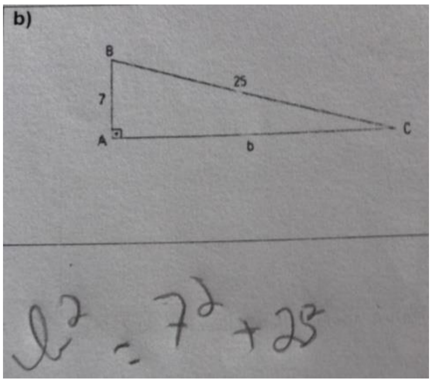


Figura 23 - Resolução do Aluno 3 - Questão 1.b da atividade exploratória.
Fonte: Acervo pessoal

O aluno 8 também apresentou dificuldades no reconhecimento de elementos básicos do triângulo retângulo. Aplicou de forma incorreta o Teorema de Pitágoras, conforme ilustração da figura 24.

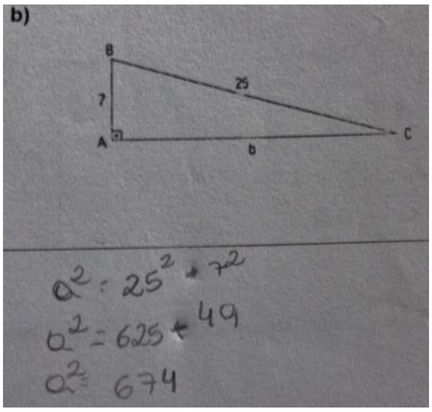


Figura 24 - Resolução do aluno 8 - Questão 1.b da atividade exploratória.
Fonte: Acervo pessoal

Essa dificuldade apresentada pelos sujeitos de nossa pesquisa também foi constatada por Bastian (2000), ao descrever que alguns dos erros praticados pelos alunos quando da aplicação do Teorema de Pitágoras podem ser provocados por fatores próprios da interpretação de problemas geométricos concernentes à apreensão operatória. Um desses problemas consiste no fenômeno da não congruência entre figura e o objeto matemático, no caso o Teorema de Pitágoras.

Ainda, dificuldades em reconhecer os elementos de um triângulo retângulo (hipotenusa e catetos) também foram encontradas em Fortes (2012).

Na questão 2 da atividade exploratória, apenas os alunos 1 e 6 aplicaram corretamente o Teorema de Pitágoras, obtendo sucesso na resolução do problema proposto. Os alunos 3, 4, 5 e 7 deixaram a questão sem resolução. Os alunos 2 e 8 aplicaram o Teorema de Pitágoras, mas não conseguiram encontrar o resultado do problema, conforme exposto na figura 25.

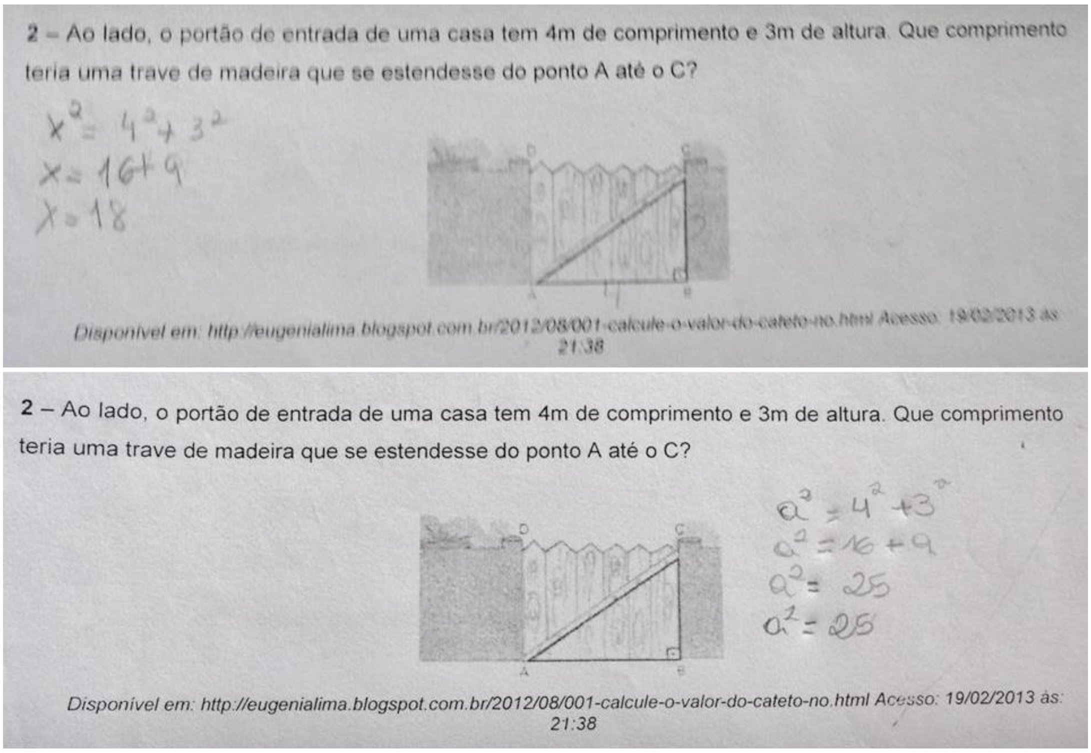


Figura 25 - Resolução dos alunos 2 e 8 - Questão 2 da atividade exploratória.
Fonte: Acervo pessoal

Podemos notar que o Aluno 2 apresentou um problema de cálculo e o Aluno 8 não finalizou o exercício.

A questão 3 da atividade exploratória exigia não apenas o conhecimento do Teorema de Pitágoras, mas a determinação da diferença das medidas da altura do poste e da casa. Provavelmente este fato representou um elemento que dificultou a resolução, dado que nenhum aluno conseguiu identificar as medidas dos catetos do exercício.

Os alunos 1, 2 e 6 tentaram aplicar o Teorema de Pitágoras, mas não identificaram corretamente que os catetos mediam 6 e 8. O aluno 8, ao invés de determinar a medida do cateto fazendo (9-3), aplicou o teorema com os valores dados no exercício e retirou 3 unidades desse cálculo. Os demais alunos deixaram a questão sem resolução. Apresentamos, na Figura 26, as produções dos alunos 1, 2, 6 e 8.

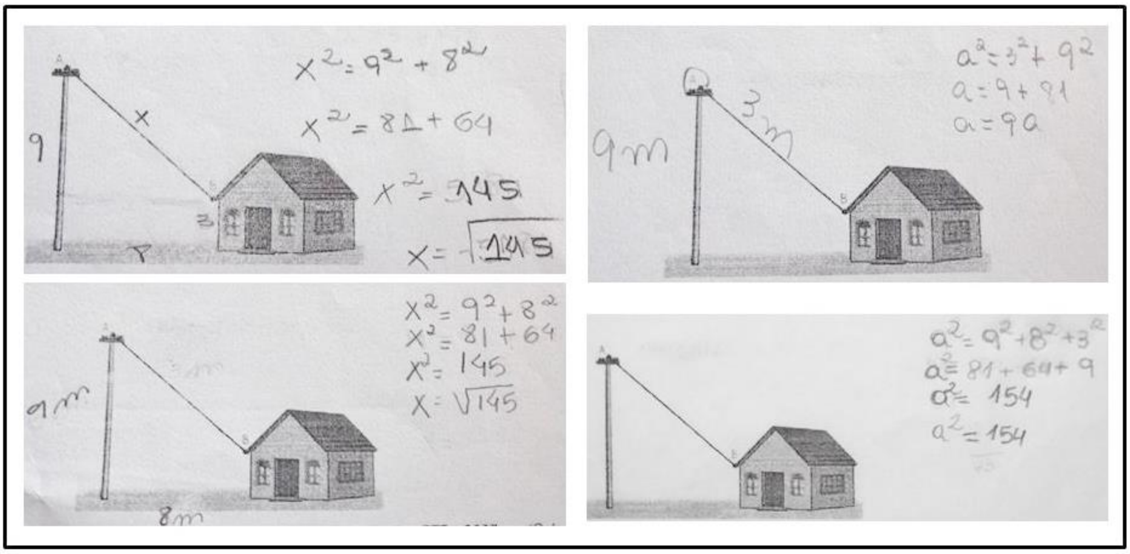


Figura 26 - Resolução dos alunos 1, 2, 6 e 8 - Questão 1.b da atividade exploratória.
Fonte: Acervo pessoal

Da mesma forma que constatado por Bastian (2000), a não congruência entre o enunciado dado na língua natural e a representação figural e a não congruência entre a representação figural e o uso do teorema provavelmente representaram fatores que dificultaram a resolução desse problema.

As questões 4 e 5 da atividade exploratória tinham como objetivo analisar se os alunos realmente não conheciam a lei dos cossenos. Essas questões não foram resolvidas pelos alunos, o que comprovou a nossa hipótese inicial. Apenas o Aluno 1 tentou resolver o item b da questão 4, mas utilizou uma das relações trigonométricas no triângulo retângulo, conforme podemos observar na figura 27.

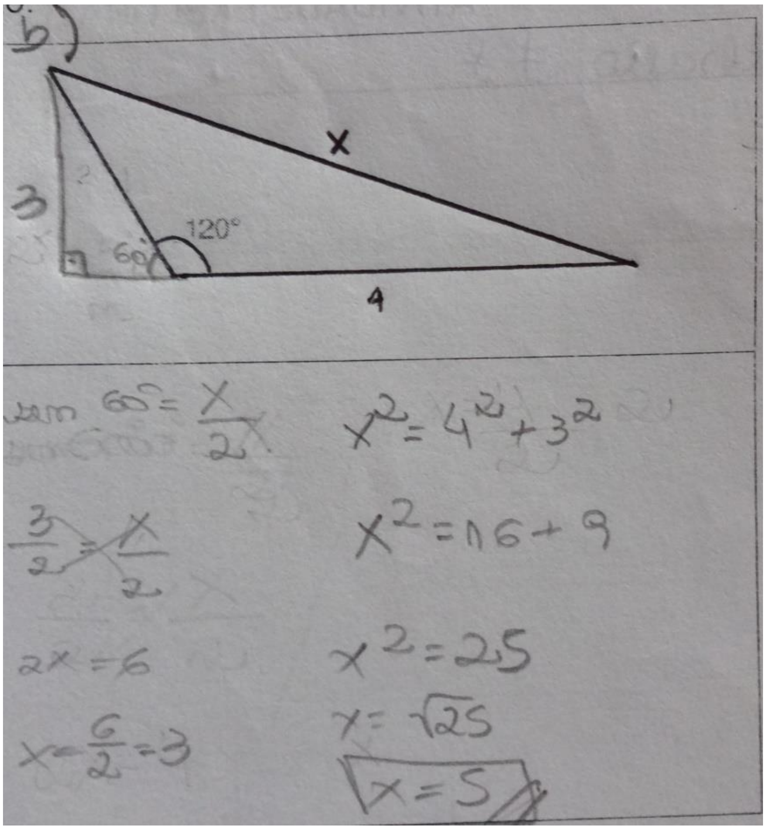


Figura 27 - Resolução do Aluno 1 - Questão 4.b da atividade exploratória.
Fonte: Acervo pessoal

Analisando a resolução do Aluno 1, observamos que ele recorreu ao método de resolução adotado pela escola que frequenta. Esse método consiste na utilização das relações métricas em triângulo qualquer e, no caso dos triângulos obtusângulos a regra geral é separar em dois triângulos e aplicar o Teorema de Pitágoras em cada triângulo. Porém, o aluno não observou alguns fatores e considerou um dos catetos com medida igual a 4, não justificando o valor 3 atribuído ao outro cateto. Já os alunos 3, 4, 5, 6 e 7, respectivamente, forneceram produções escritas justificando o porquê de não conseguirem resolver os exercícios. Por ser uma atividade preliminar e aplicada a toda a turma, a professora- pesquisadora não questionou as resoluções dos alunos, pois tinha como hipótese inicial que os estudantes desconheciam a lei dos cossenos e, portanto, não a utilizariam na resolução desta atividade.

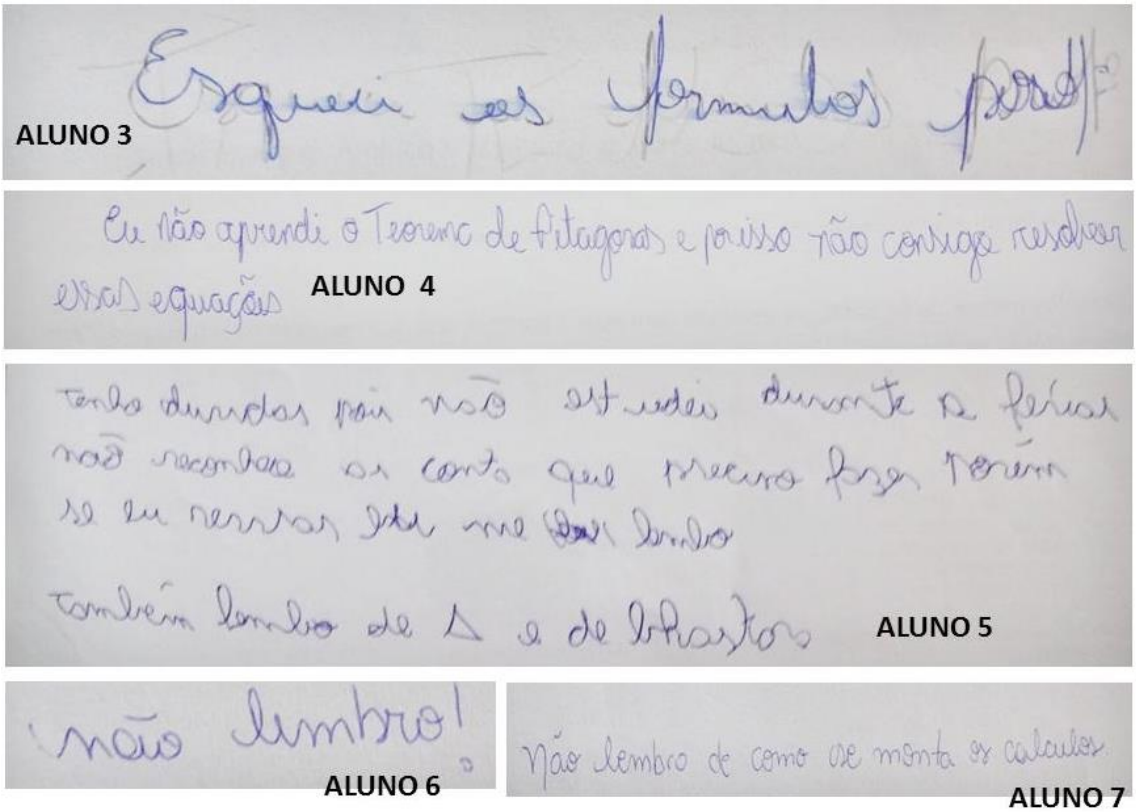


Figura 28 - Justificativa dos alunos 3, 4, 5, 6 e 7 - Questão 4.b da atividade exploratória.
Fonte: Acervo pessoal

Analisando os manuscritos dos alunos, constatamos que a maioria se justificou mencionando que não se lembrava do conteúdo. Eles estavam tão preocupados com a resolução que não perceberam que esse conteúdo não havia sido estudado.

5.2 DESCRIÇÃO DA FASE II

Nesta seção apresentaremos o desenvolvimento das atividades do experimento de ensino, realizadas pelos alunos voluntários.

A Fase II está organizada em encontros com duração de aproximadamente noventa minutos cada. Para cada encontro foi desenvolvida uma atividade, iniciando pela de familiarização com o *software GeoGebra.* Nestes encontros, a professora-pesquisadora assumiu a responsabilidade de identificar a necessidade de *redesign.*

O primeiro encontro foi marcado pelas expectativas dos alunos. Nunca tinham manuseado um *software* de matemática, estavam empolgados para realizar as atividades e contribuir com a pesquisa.

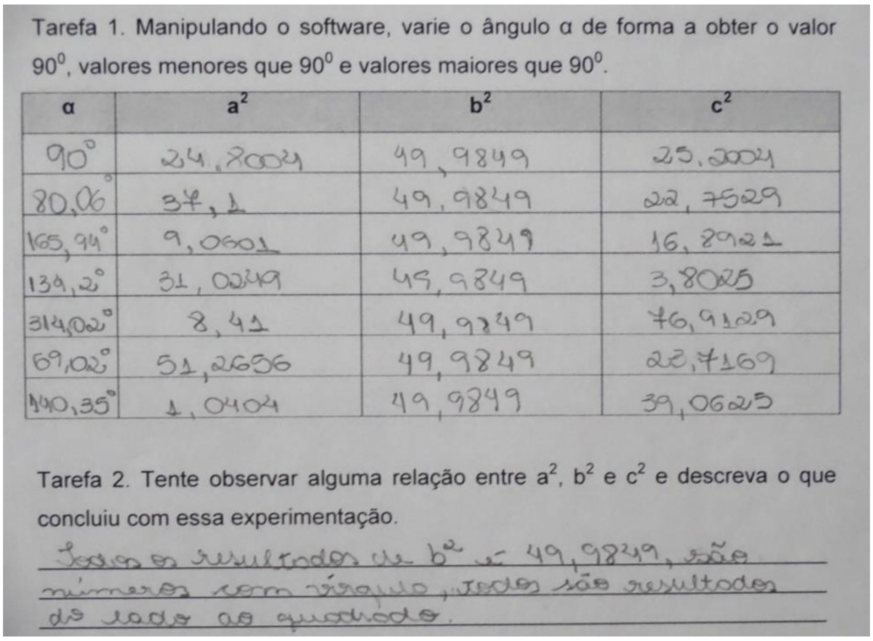
Cada dupla ficou diante de um computador (*notebook*), cuja tela exibia um arquivo nomeado "Triângulo", que possibilitava alterar a medida de seus lados e ângulos, constatando, assim, o aspecto dinâmico do *GeoGebra*. Essa atividade de familiarização representou a Atividade 1 da Fase II.

Pudemos notar a curiosidade e o interesse de cada um à medida que realizavam alterações no triângulo. Queriam aprender a utilizar a ferramenta e faziam perguntas a respeito da construção de figuras neste programa. À medida que questionavam a professora-pesquisadora respondia. Um exemplo da curiosidade deles era saber se o *software* poderia ser usado em qualquer computador, se era pago, se resolveriam qualquer conta de matemática utilizando o *GeoGebra* e como poderiam desenhar as figuras. Neste momento a pesquisadora comentou sobre a importância e a diferença de construir e desenhar em geometria, experimentando com eles a construção de um triângulo. Os discentes falaram que seria bom usar esse software nas aulas de Matemática.

No primeiro encontro foi proposta a Atividade 2, com o objetivo de o aluno verificar que apenas para o ângulo $\alpha = 90^\circ$, o Teorema de Pitágoras seria válido. A Atividade 2 foi realizada nos ambientes papel e lápis e *GeoGebra* e, no ambiente computacional, os alunos atribuíram ao ângulo α o valor de 90^o, valores menores que 90^o, maiores que 90^o. Em seguida, preencheram a tabela, conforme solicitado. Esperávamos que eles estabelecessem relações entre os registros simbólico e figural e observassem as condições para que $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 < a^2 + b^2$ e $c^2 > a^2 + b^2$, ou seja, que o primeiro caso ocorreria se $\alpha = 90^o$, o segundo se $\alpha < 90^o$ e o terceiro se $\alpha > 90^o$.

Nesta atividade, apresentamos as produções de apenas três duplas, uma vez que o Aluno 6, que compõe a dupla C, não compareceu. O aluno 5 fez a atividade com a dupla D. Essa aluna relatou a necessidade dessa ausência e se encarregou de fazer a atividade com o aluno 5 em outro momento.

Averiguamos que, da forma como a atividade foi proposta, as conclusões esperadas não foram construídas, ou seja, os alunos estabeleceram relações entre a^2, b^2 e c^2, mas não direcionadas à propriedade esperada, conforme ilustrado nas figuras 29, 30 e 31.



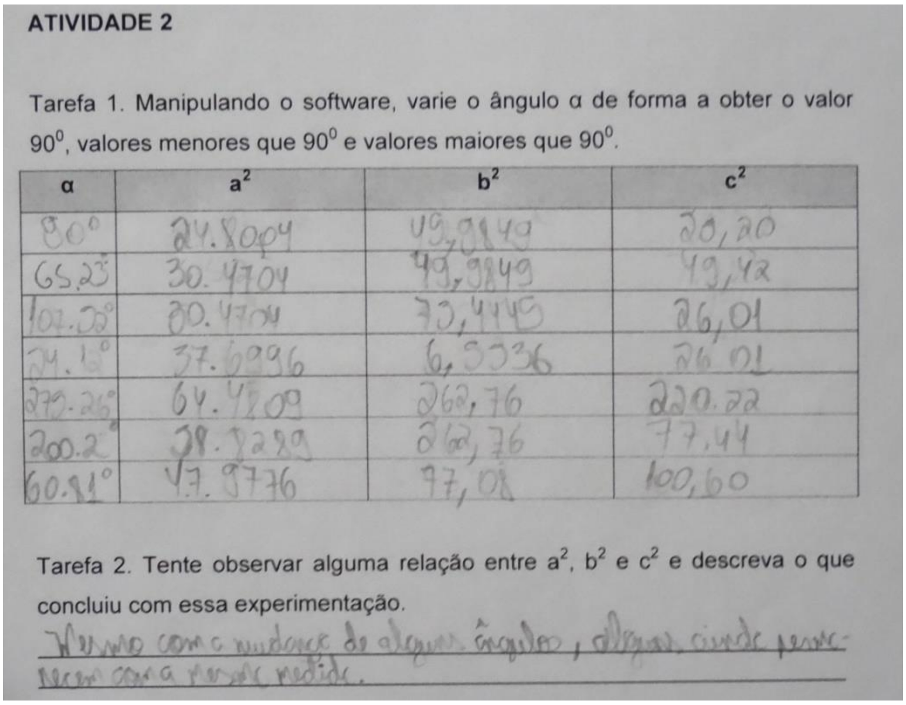
Tarefa 1. Manipulando o software, varie o ângulo α de forma a obter o valor 90^0, valores menores que 90^0 e valores maiores que 90^0.

α	a^2	b^2	c^2
90°	24,8004	49,9849	25,2004
80,06°	37,1	49,9849	22,7529
165,94°	9,0601	49,9849	16,8921
139,2°	31,0249	49,9849	3,8025
314,02°	8,41	49,9849	76,9129
69,02°	51,2656	49,9849	23,7169
140,35°	1,0404	49,9849	39,0625

Tarefa 2. Tente observar alguma relação entre a^2, b^2 e c^2 e descreva o que concluiu com essa experimentação.

Todos os resultados de b^2 = 49,9849, são números com vírgula, todos são resultados do lado ao quadrado.

Figura 29 - Produção da Dupla A – Atividade 2 – Tarefas 1 e 2.
Fonte: Acervo pessoa



ATIVIDADE 2

Tarefa 1. Manipulando o software, varie o ângulo α de forma a obter o valor 90^0, valores menores que 90^0 e valores maiores que 90^0.

α	a^2	b^2	c^2
80°	24.8004	49,9849	20,20
65.23°	30.4704	49,9849	49,42
107.32°	30.4704	73,4449	26,01
24.12°	37.6996	6,5536	26,01
279.26°	64.4209	262,76	220.22
200.2°	38.2289	262,76	77,44
60.11°	47.9776	97,08	100,60

Tarefa 2. Tente observar alguma relação entre a^2, b^2 e c^2 e descreva o que concluiu com essa experimentação.

Mesmo com a mudança de alguns ângulos, alguns ainda permanecem com a mesma medida.

Figura 30 - Produção da Dupla B – Atividade 2- Tarefas 1 e 2.
Fonte: Acervo pessoal

ATIVIDADE 2

Tarefa 1. Manipulando o software, varie o ângulo α de forma a obter o valor 90^0, valores menores que 90^0 e valores maiores que 90^0.

α	a^2	b^2	c^2
90°	24,8004	49,9849	25,2004
75°	39,4384	49,9849	27,6676
64°	54,4644	49,9849	32,2624
58°	123,4321	88,7364	32,2624
94.4°	277,8889	377,5249	78,8544
82°	246,49	286,6249	78,8544
17.8	4,2849	0,6724	2,1025

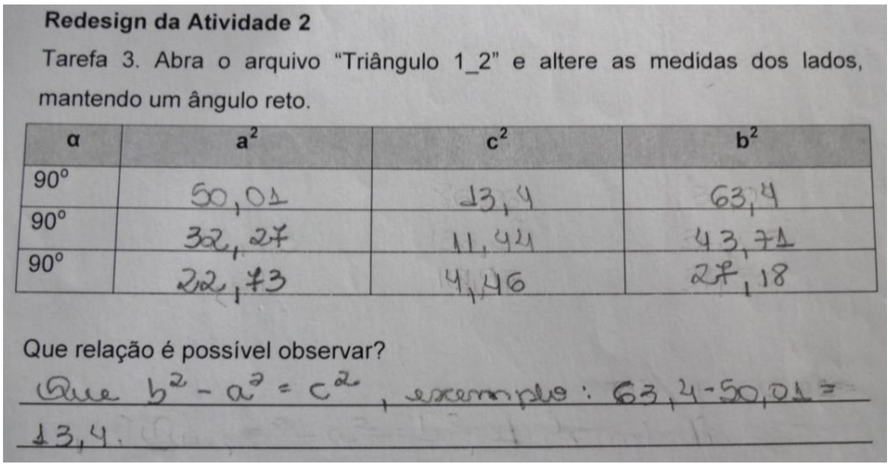
Tarefa 2. Tente observar alguma relação entre a^2, b^2 e c^2 e descreva o que concluiu com essa experimentação.

mesmo alterando o valor de alfa
alguns valores de a^2, b^2 e c^2 se repetem

Figura 31 - Produção da Dupla C – Atividade 2 - Tarefas 1 e 2.
Fonte: Acervo pessoal

Constatamos, pela análise das produções de todas as duplas na Tarefa 2, que as observações estabelecidas se fixaram na manutenção de um dos valores e não na relação esperada. É provável que tal fato tenha ocorrido em função da construção da tabela, que envolveu a análise de todos os casos simultaneamente. Ainda, as deficiências apresentadas na Atividade Exploratória Individual, que revelaram dificuldades com o Teorema de Pitágoras, podem ter contribuído para esse tipo de produção. Avaliando a construção da atividade, observamos que, na tabela, inserimos a hipotenusa na coluna central e isso talvez tenha dificultado a visualização da relação de Pitágoras.

Partindo dessas constatações, realizamos um *redesign* da Atividade 2. Optamos por separar da tabela os valores do ângulo α, deixando explicito na tarefa 3 o ângulo de 90º, para que os alunos, com a ajuda do *GeoGebra*, constatassem o Teorema de Pitágoras. Apresentamos as produções dos alunos nas figuras 32, 33, 34 e 35.



Redesign da Atividade 2

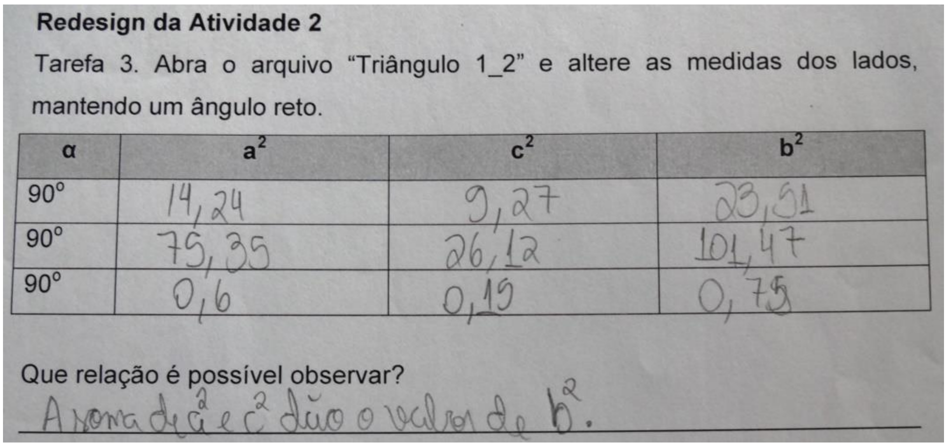
Tarefa 3. Abra o arquivo "Triângulo 1_2" e altere as medidas dos lados, mantendo um ângulo reto.

α	a^2	c^2	b^2
90°	50,01	13,4	63,4
90°	32,27	11,44	43,71
90°	22,73	4,46	27,18

Que relação é possível observar?

Que $b^2 - a^2 = c^2$, exemplo: 63,4-50,01 = 13,4.

Figura 32 - Produção da Dupla A – Redesign da Atividade 2 – Tarefa 3.
Fonte: Acervo pessoal



Redesign da Atividade 2

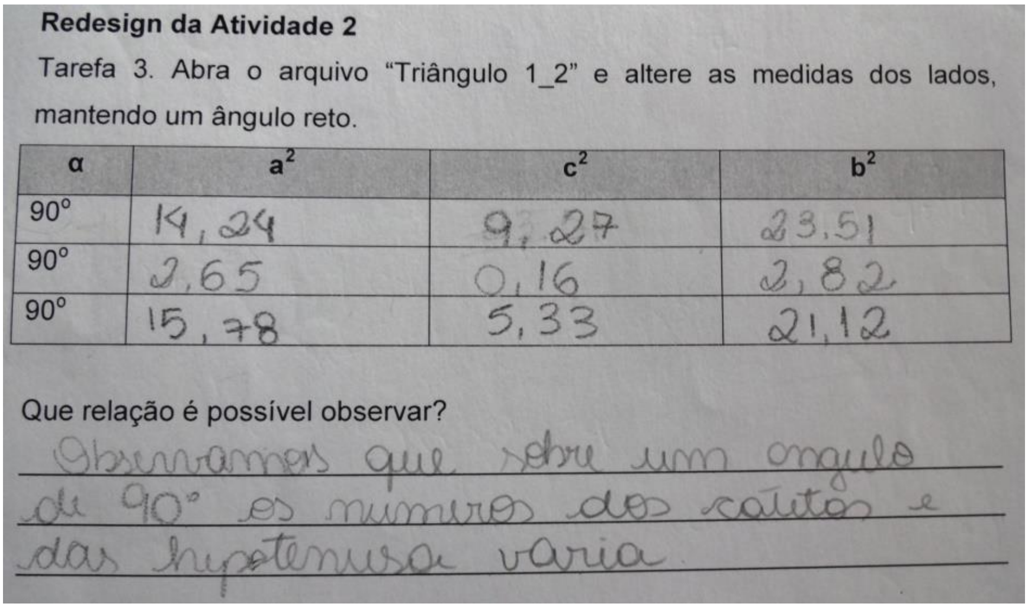
Tarefa 3. Abra o arquivo "Triângulo 1_2" e altere as medidas dos lados, mantendo um ângulo reto.

α	a^2	c^2	b^2
90°	14,24	9,27	23,51
90°	75,35	26,12	101,47
90°	0,6	0,15	0,75

Que relação é possível observar?

A soma de a^2 e c^2 dão o valor de b^2.

Figura 33 - Produção da Dupla B – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 3.
Fonte: Acervo pessoal



Redesign da Atividade 2

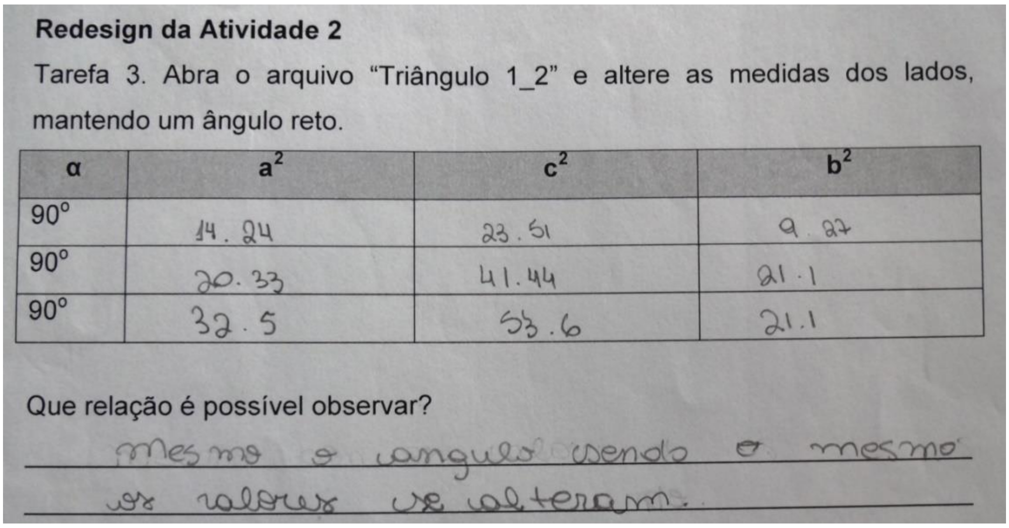
Tarefa 3. Abra o arquivo "Triângulo 1_2" e altere as medidas dos lados, mantendo um ângulo reto.

α	a^2	c^2	b^2
90°	14,24	9,27	23,51
90°	2,65	0,16	2,82
90°	15,78	5,33	21,12

Que relação é possível observar?

Observamos que sobre um angulo de 90° os numeros dos catetos e das hipotenusa varia

Figura 34 - Produção da Dupla C – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 3.
Fonte: Acervo pessoal



Redesign da Atividade 2

Tarefa 3. Abra o arquivo "Triângulo 1_2" e altere as medidas dos lados, mantendo um ângulo reto.

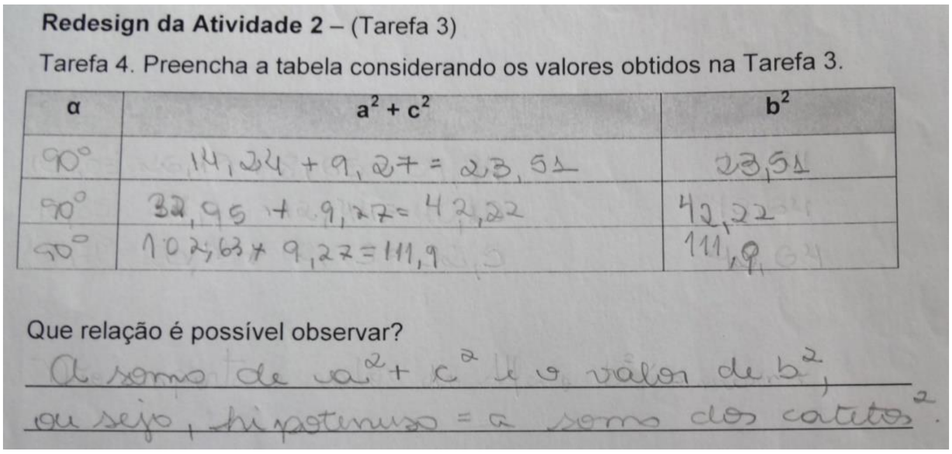
α	a^2	c^2	b^2
90°	14.24	23.51	9.27
90°	20.33	41.44	21.1
90°	32.5	53.6	21.1

Que relação é possível observar?

mesmo o angulo sendo o mesmo os valores se alteram.

Figura 35 - Produção Dupla D – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa
Fonte: Acervo pessoal

As duplas A e B observaram a relação, apesar de não apresentarem a fórmula de Pitágoras na notação usual, porém, o mesmo não ocorreu com as duplas C e D. Com isso, fizemos um *redesign* da tarefa 3, a qual intitulamos Tarefa 4, a fim de favorecer a análise da relação esperada. Apesar das duplas A e B já terem observado a relação esperada, elas participaram dessa nova adaptação. Vejamos as anotações das duplas nas figuras a seguir.



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 3)

Tarefa 4. Preencha a tabela considerando os valores obtidos na Tarefa 3.

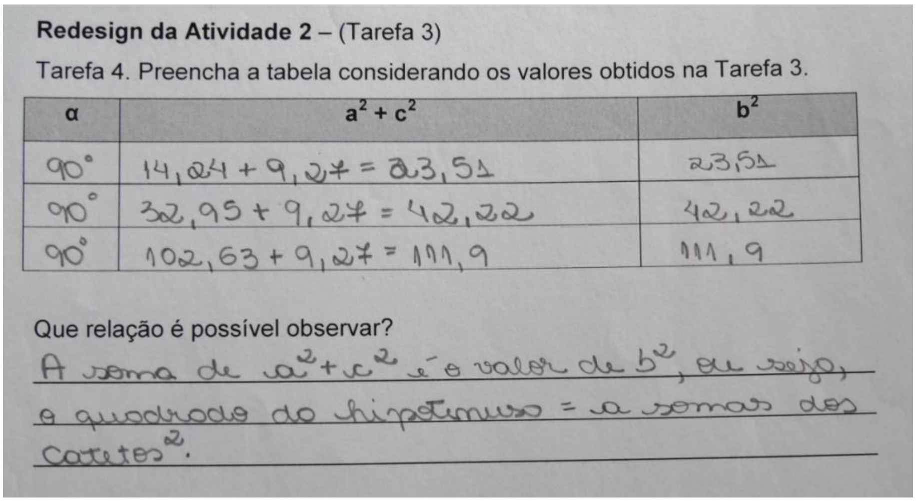
α	$a^2 + c^2$	b^2
90°	14,24 + 9,27 = 23,51	23,51
90°	32,95 + 9,27 = 42,22	42,22
90°	102,63 + 9,27 = 111,9	111,9

Que relação é possível observar?

A soma de $a^2 + c^2$ é o valor de b^2, ou seja, hipotenusa = a soma dos $catetos^2$.

Figura 36 – Produção da Dupla A – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 4
Fonte: Acervo pessoal

Essa dupla já havia observado a relação na tarefa anterior, mas nesse momento procurou nomear os lados do triângulo. Apesar disso, apresentou um equívoco na resposta ao afirmar que "hipotenusa = a soma dos $catetos^2$", apesar de ter compreendido a relação. A professora-pesquisadora questionou a dupla a respeito dessa afirmação. Com isso, a dupla reescreveu a relação, fornecendo a seguinte produção:



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 3)

Tarefa 4. Preencha a tabela considerando os valores obtidos na Tarefa 3.

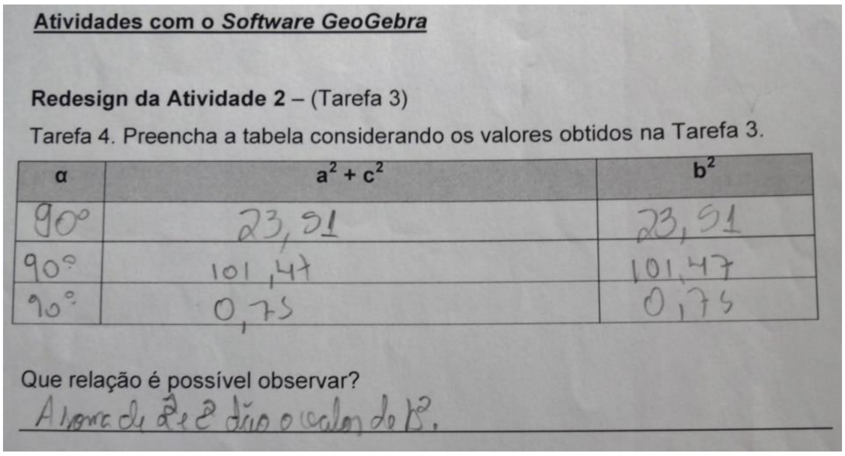
α	$a^2 + c^2$	b^2
90°	14,24 + 9,27 = 23,51	23,51
90°	32,95 + 9,27 = 42,22	42,22
90°	102,63 + 9,27 = 111,9	111,9

Que relação é possível observar?

A soma de a^2+c^2 é o valor de b^2, ou seja, o quadrado do hipotenuso = a somas dos catetos².

Figura 37 – Produção da Dupla A – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 4
Fonte: Acervo pessoal

A dupla B já havia estabelecido a relação esperada na tarefa anterior e, nessa, apresentou o mesmo tipo de produção, conforme podemos analisar na figura 38.



Atividades com o *Software GeoGebra*

Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 3)

Tarefa 4. Preencha a tabela considerando os valores obtidos na Tarefa 3.

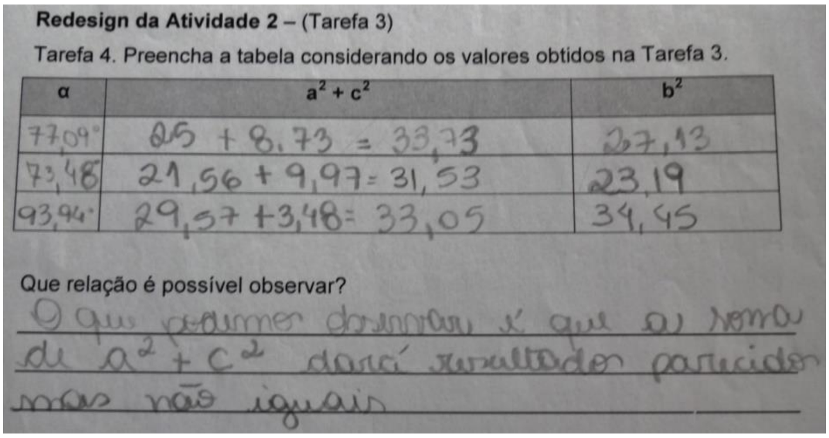
α	$a^2 + c^2$	b^2
90°	23,51	23,51
90°	101,47	101,47
90°	0,75	0,75

Que relação é possível observar?

A soma de a² e c² dão o valor de b².

Figura 38 – Produção da Dupla B – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 4
Fonte: Acervo pessoal

A dupla C observou a relação esperada, porém, devido ao arredondamento do *software*, forneceu a produção presente na figura 39.



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 3)

Tarefa 4. Preencha a tabela considerando os valores obtidos na Tarefa 3.

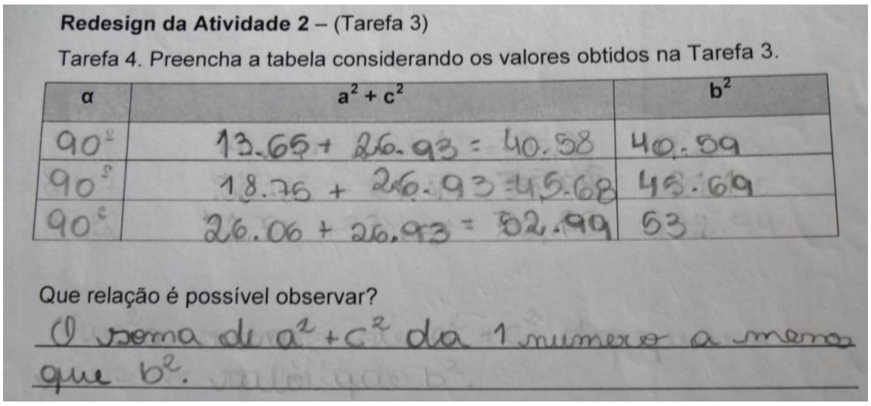
α	$a^2 + c^2$	b^2
77,09°	25 + 8,73 = 33,73	27,13
73,48	21,56 + 9,97 = 31,53	23,19
93,94°	29,57 + 3,48 = 33,05	34,45

Que relação é possível observar?

O que podemos observar é que a soma de a^2+c^2 dará resultados parecidos mas não iguais

Figura 39 – Produção da dupla C – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 4
Fonte: Acervo pessoal

O aluno 7, da dupla D não compareceu ao encontro, portanto, apenas o aluno 8 realizou a atividade. Esse aluno percebeu a relação, porém, sua conclusão também foi afetada pelo arredondamento do *software*, conforme apresentado na figura 40.



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 3)

Tarefa 4. Preencha a tabela considerando os valores obtidos na Tarefa 3.

α	$a^2 + c^2$	b^2
90°	13.65 + 26.93 = 40.58	40.59
90°	18.76 + 26.93 = 45.68	45.69
90°	26.06 + 26.93 = 52.99	53

Que relação é possível observar?

O soma de a^2+c^2 da 1 numero a menos que b^2.

Figura 40 – Produção do aluno 8 da dupla D – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 4
Fonte: Acervo pessoal

Essa limitação do *software* destacou-se na aplicação desta atividade. Analisando as figuras anteriores, correspondentes ao *redesign* da Tarefa 3 da Atividade 2, notamos que o arredondamento do *software* trouxe problemas, não favorecendo aos estudantes a observação da relação esperada na representação numérica.

Para não influenciar a construção desse conhecimento das duplas, optamos por exibir os quadrados dos valores de a, b e c, ou seja, o arquivo ficou programado para fazer o cálculo das áreas desses quadrados, evitando os equívocos provenientes do cálculo manual no *software.* Com isso as duplas observaram a relação esperada, ou seja, que para $b^2 = a^2 + c^2$, nos casos que $\alpha = 90º$. A nova programação está representada na figura 41.

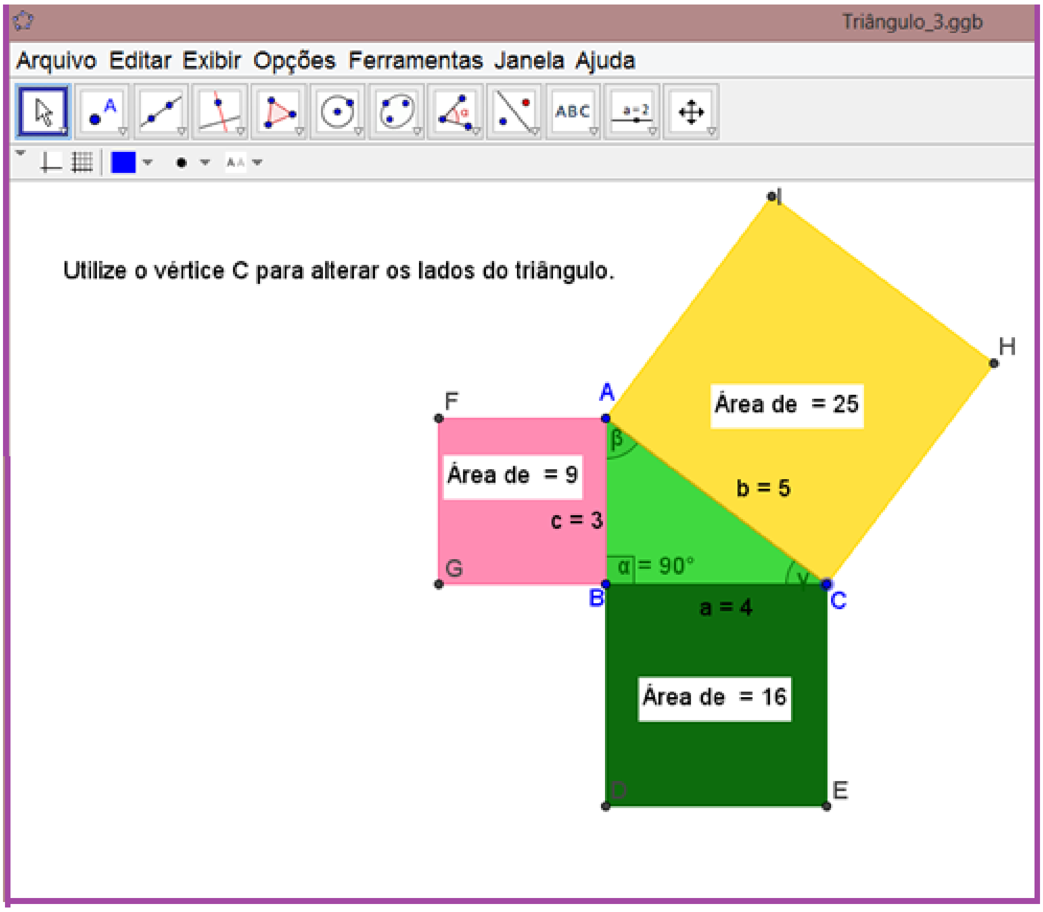
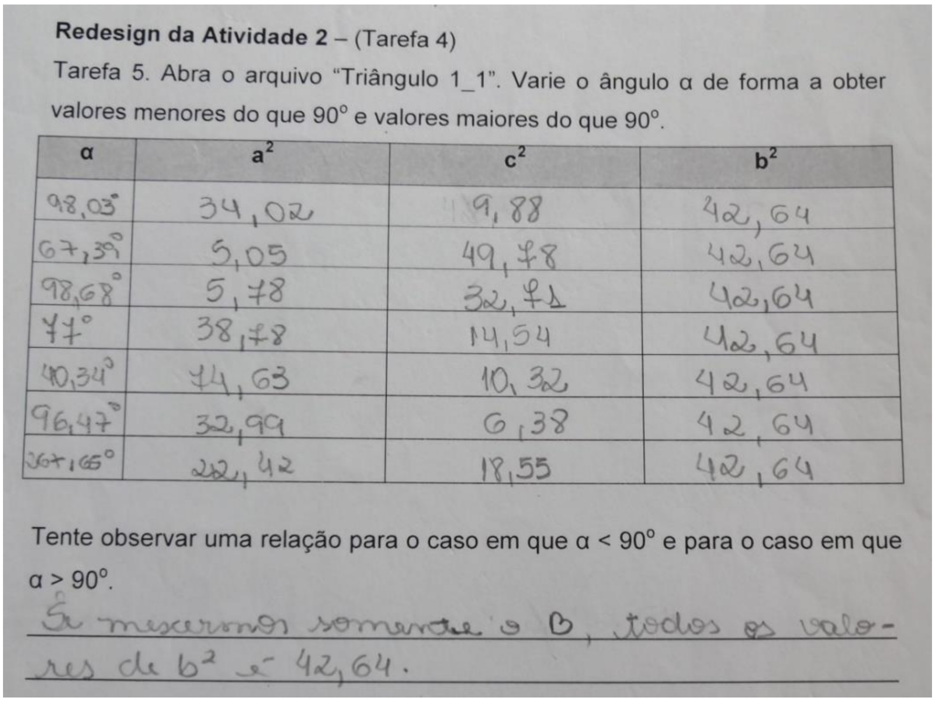


Figura 41 – Triângulo 3 no ambiente GeoGebra.
Fonte: Acervo pessoal

A partir daí, as duplas prosseguiram com a tarefa de análise dos casos em que $\alpha < 90^o$ e $\alpha > 90^o$. A produção dos alunos pode ser observada nas figuras 42, 43, 44 e 45.



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 4)

Tarefa 5. Abra o arquivo "Triângulo 1_1". Varie o ângulo α de forma a obter valores menores do que 90° e valores maiores do que 90°.

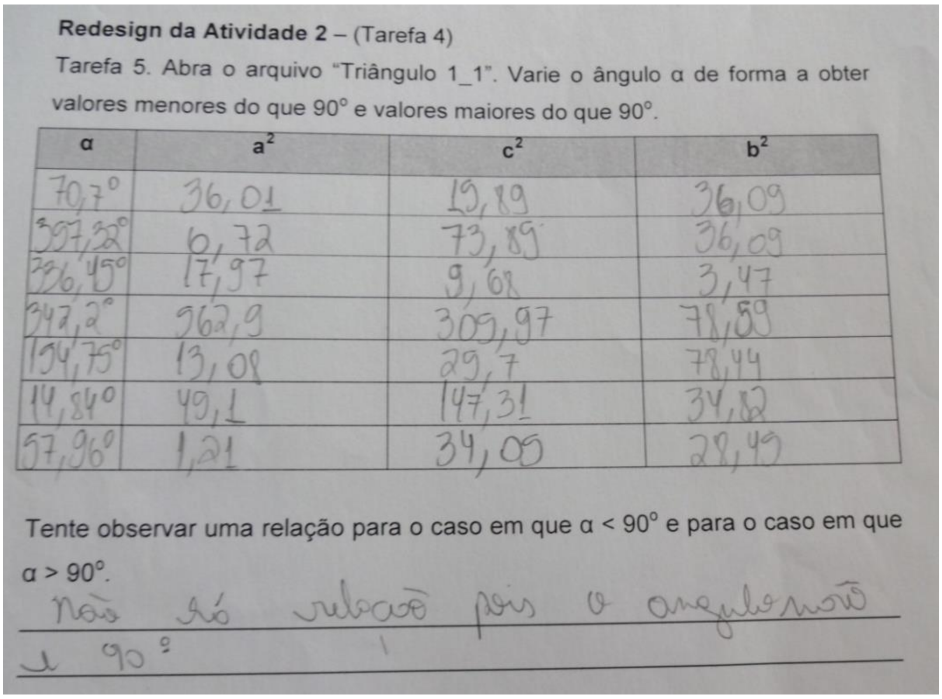
α	a^2	c^2	b^2
98,03°	34,02	9,88	42,64
67,39°	5,05	49,78	42,64
98,68°	5,78	32,71	42,64
77°	38,78	14,54	42,64
40,34°	74,63	10,32	42,64
96,47°	32,99	6,38	42,64
307,65°	22,42	18,55	42,64

Tente observar uma relação para o caso em que α < 90° e para o caso em que α > 90°.

Se mexermos somente o B, todos os valores de b² é 42,64.

Figura 42 – Produção da Dupla A – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 5
Fonte: Acervo pessoal

Podemos notar que a Dupla A, que anteriormente evidenciou o teorema de Pitágoras, não partiu dele para fazer essa nova análise.



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 4)

Tarefa 5. Abra o arquivo "Triângulo 1_1". Varie o ângulo α de forma a obter valores menores do que 90° e valores maiores do que 90°.

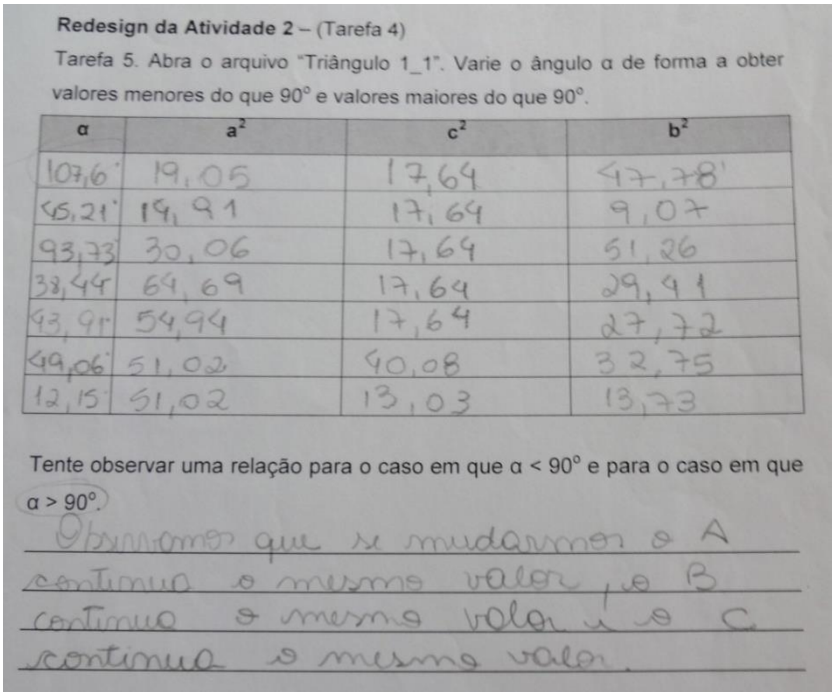
α	a^2	c^2	b^2
70,7°	36,01	19,89	36,09
397,32°	6,72	73,89	36,09
336,45°	17,97	9,68	3,47
342,2°	562,9	309,97	78,59
194,75°	13,08	29,7	78,44
14,84°	49,1	147,31	34,82
57,96°	1,21	34,05	28,49

Tente observar uma relação para o caso em que α < 90° e para o caso em que α > 90°.

Não há relação pois o angulo não é 90°

Figura 43 - Produção da Dupla B – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 5
Fonte: Acervo pessoal

Podemos notar que a Dupla B, que anteriormente evidenciou o teorema de Pitágoras, observou que a relação não era válida porque o ângulo não era de 90°.



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 4)

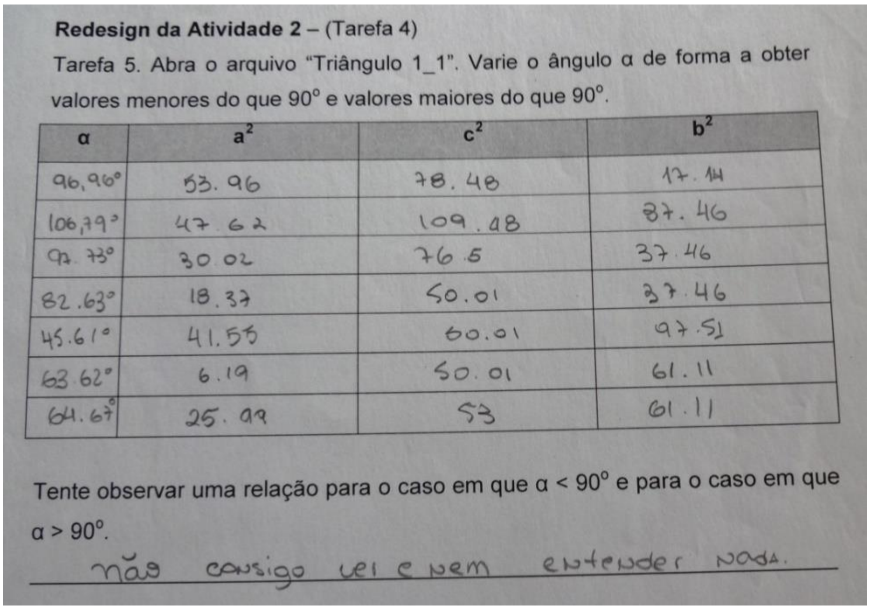
Tarefa 5. Abra o arquivo "Triângulo 1_1". Varie o ângulo α de forma a obter valores menores do que 90° e valores maiores do que 90°.

α	a^2	c^2	b^2
107,6°	19,05	17,64	47,78°
45,21°	19,91	17,64	9,07
93,73°	30,06	17,64	51,26
38,44	64,69	17,64	29,41
43,91	54,94	17,64	27,72
49,06°	51,02	40,08	32,75
12,15°	51,02	13,03	13,73

Tente observar uma relação para o caso em que α < 90° e para o caso em que α > 90°.

Observamos que se mudarmos o A continua o mesmo valor, o B continua o mesmo valor, o C continua o mesmo valor.

Figura 44 - Produção da Dupla C – Redesign da Atividade 2 – Tarefa 5.
Fonte: Acervo pessoal



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 4)

Tarefa 5. Abra o arquivo "Triângulo 1_1". Varie o ângulo α de forma a obter valores menores do que 90° e valores maiores do que 90°.

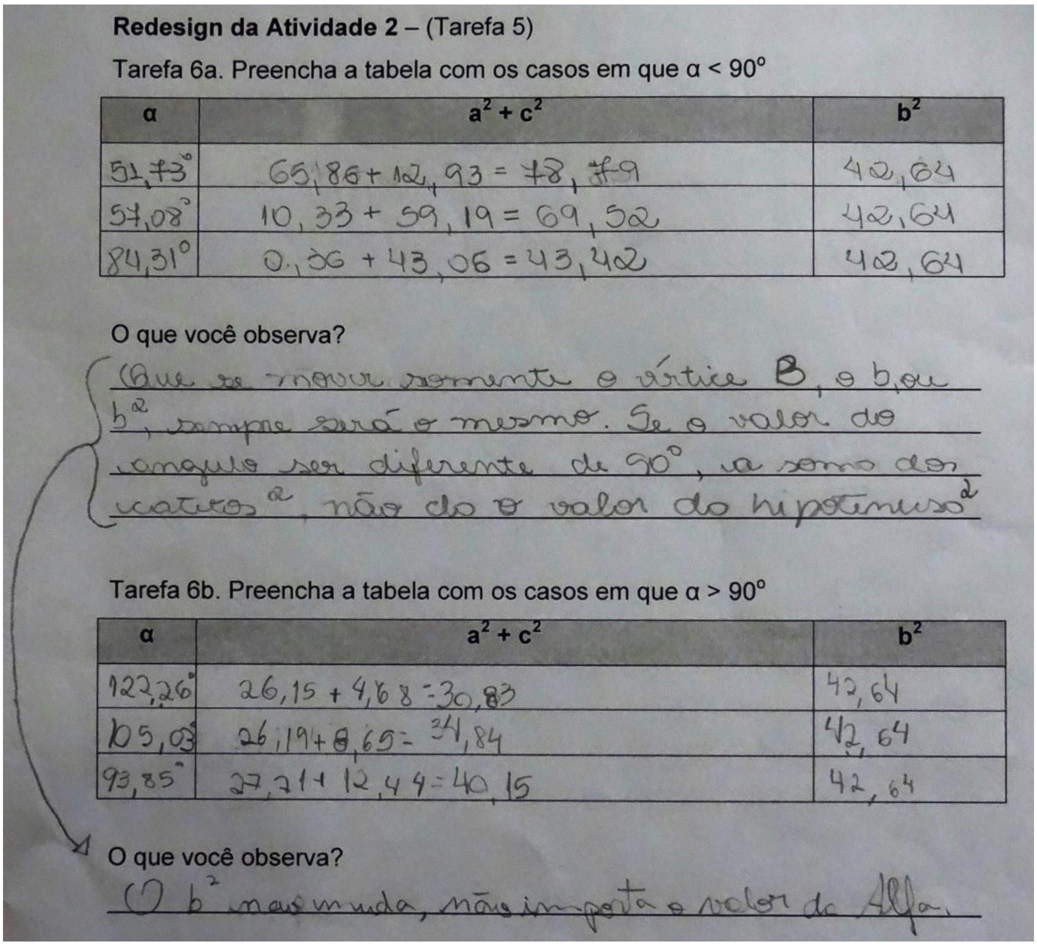
α	a^2	c^2	b^2
96,96°	53.96	78.48	17.14
106,79°	47.62	109.48	37.46
97.73°	30.02	76.5	37.46
82.63°	18.37	50.01	37.46
45.61°	41.55	60.01	97.51
63.62°	6.19	50.01	61.11
64.67°	25.99	53	61.11

Tente observar uma relação para o caso em que α < 90° e para o caso em que α > 90°.

não consigo ver e nem entender nada.

Figura 45 - Produção da Dupla D – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 5.
Fonte: Acervo pessoal

Notamos que, com exceção da Dupla B, nenhuma dupla observou que a relação anterior não era válida. Consideramos, então, que não houve êxito na realização dessa atividade e, com isso, fizemos um *redesign*, nomeando as novas tarefas por Tarefa 6a e Tarefa 6b.



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 5)

Tarefa 6a. Preencha a tabela com os casos em que $\alpha < 90^o$

α	$a^2 + c^2$	b^2
51,73°	65,86+12,93 = 78,79	42,64
57,08°	10,33 + 59,19 = 69,52	42,64
84,31°	0,36 + 43,06 = 43,42	42,64

O que você observa?

Que se mover somente o vértice B, o b, ou b², sempre será o mesmo. Se o valor do ângulo ser diferente de 90°, a soma dos catetos², não dá o valor da hipotenusa²

Tarefa 6b. Preencha a tabela com os casos em que $\alpha > 90^o$

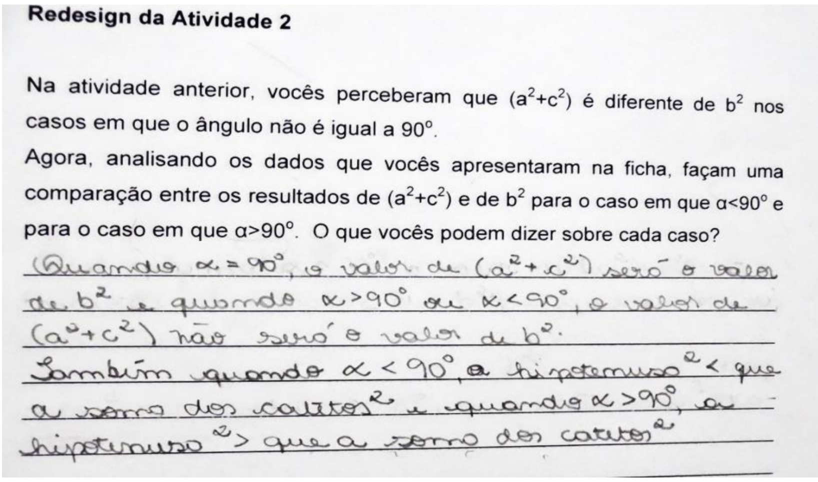
α	$a^2 + c^2$	b^2
122,26°	26,15 + 4,68 = 30,83	42,64
105,03°	26,19+8,65= 34,84	42,64
93,85°	27,71+12,44=40,15	42,64

O que você observa?

O b² não muda, não importa o valor de Alfa.

Figura 46 - Produção da Dupla A – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefas 6a e 6b
Fonte: Acervo Pessoal

Conforme podemos observar na figura 46, a dupla A já observou que não poderia utilizar Pitágoras, dado que o ângulo não era reto. A professora-pesquisadora questionou a dupla se no *software* não seria possível variar o tamanho do lado, com o intuito de que a dupla percebesse que a conclusão da permanência da medida b ocorreu somente porque ela não havia mexido na medida desse lado. A professora pesquisadora esclareceu para a dupla que ela observou corretamente que $a^2 + c^2$ era diferente de b^2, mas alertou os alunos que os termos "catetos" e "hipotenusa" só são utilizados quando o ângulo é reto. No questionamento seguinte, a dupla constatou quando $a^2 + c^2 < b^2$ e quando $a^2 + c^2 > b^2$, conforme apresentado na figura 47.



Redesign da Atividade 2

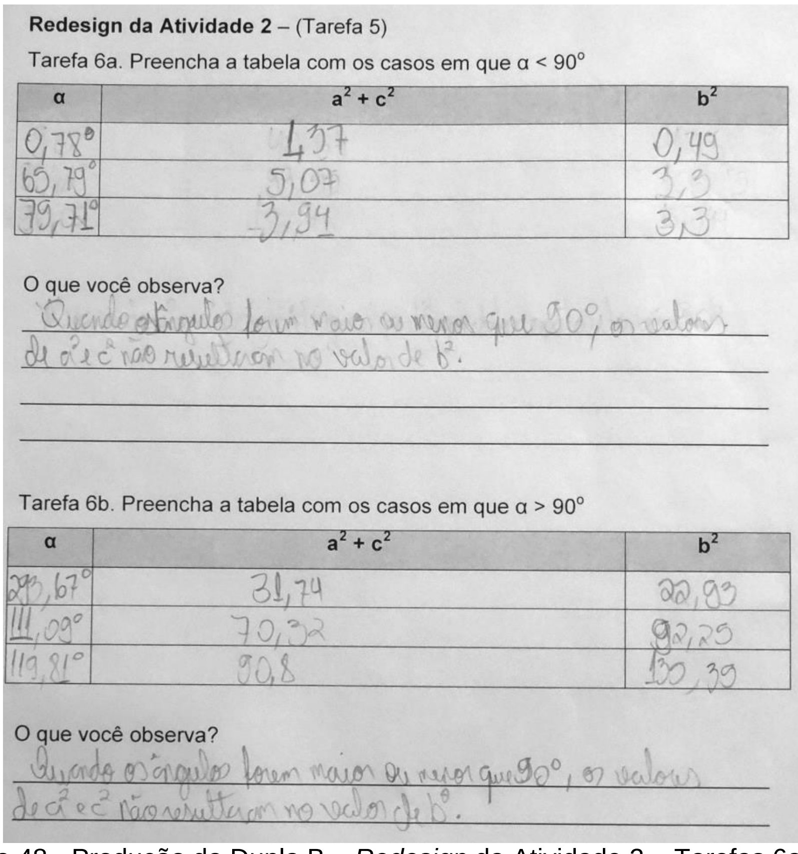
Na atividade anterior, vocês perceberam que (a^2+c^2) é diferente de b^2 nos casos em que o ângulo não é igual a 90°.

Agora, analisando os dados que vocês apresentaram na ficha, façam uma comparação entre os resultados de (a^2+c^2) e de b^2 para o caso em que $\alpha<90°$ e para o caso em que $\alpha>90°$. O que vocês podem dizer sobre cada caso?

Quando $\alpha = 90°$, o valor de (a^2+c^2) será o valor de b^2 e quando $\alpha>90°$ ou $\alpha<90°$, o valor de (a^2+c^2) não será o valor de b^2.
Também quando $\alpha < 90°$, a hipotenusa² < que a soma dos catetos² e quando $\alpha > 90°$, a hipotenusa² > que a soma dos catetos²

Figura 47 - Produção da Dupla A – Questionamento das Tarefas 6a e 6b.
Fonte: Acervo Pessoal

Novamente a professora-pesquisadora confirmou a conclusão da dupla, observando apenas que as denominações hipotenusa e catetos são usadas somente para triângulos retângulos.



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 5)

Tarefa 6a. Preencha a tabela com os casos em que $\alpha < 90°$

α	$a^2 + c^2$	b^2
0,78°	1,37	0,49
65,79°	5,07	3,3
79,71°	3,94	3,3

O que você observa?

Quando os ângulos forem maior ou menor que 90°, os valores de a² e c² não resultaram no valor de b².

Tarefa 6b. Preencha a tabela com os casos em que $\alpha > 90°$

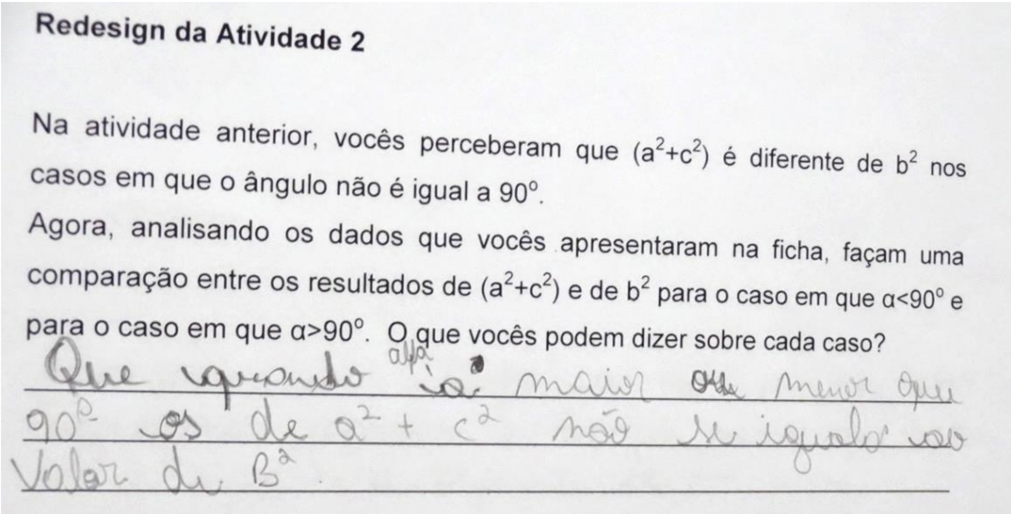
α	$a^2 + c^2$	b^2
93,67°	31,74	22,93
111,09°	70,32	92,25
119,81°	90,8	130,39

O que você observa?

Quando os ângulos forem maior ou menor que 90°, os valores de a² e c² não resultaram no valor de b².

Figura 48 - Produção da Dupla B – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefas 6a e 6b.
Fonte: Acervo Pessoal

A dupla B, de acordo com a produção constatada na figura 49, compreendeu que $a^2 + c^2$ era diferente de b^2 para os casos em que $\alpha \neq 90^o$. Na tarefa seguinte, ao ser questionada sobre a comparação entre $(a^2 + c^2)$ e b^2, a dupla manteve a mesma produção.


Redesign da Atividade 2

Na atividade anterior, vocês perceberam que (a^2+c^2) é diferente de b^2 nos casos em que o ângulo não é igual a 90º.

Agora, analisando os dados que vocês apresentaram na ficha, façam uma comparação entre os resultados de (a^2+c^2) e de b^2 para o caso em que $\alpha<90^o$ e para o caso em que $\alpha>90^o$. O que vocês podem dizer sobre cada caso?

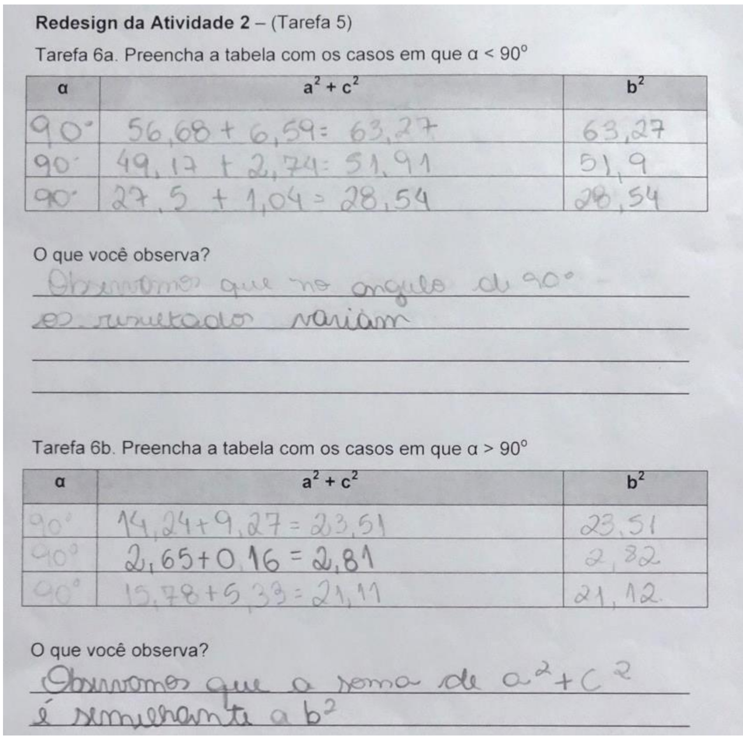
Que quando alfa a maior ou menor que 90º os de $a^2 + c^2$ não se igualo ao Valor de B^2.

Figura 49 - Produção da Dupla B – Questionamento das Tarefas 6a e 6b.
Fonte: Acervo Pessoal

Ao analisar a produção da dupla, observamos que, apesar de confusões na escrita, ao relacionar $a^2 + c^2$ com b^2, ela observou que o valor de a^2+c^2 não coincidiu com o de b^2, para o caso de ângulo não reto.

Nesse caso, a professora-pesquisadora fez uma intervenção, com o *redesign* da Tarefa 5, elaborando uma nova ficha com um número maior de linhas nas tabelas. Relatou que a dupla estava correta em suas conclusões e solicitou que estabelecesse uma relação entre o valor de $(a^2 + c^2)$ e o valor de b^2, em todos os casos em que $\alpha < 90^o$ no item 6a e o mesmo tipo de comparação para o caso em que $\alpha > 90^o$ no item 6b. Essa situação ocorreu em um encontro individualizado, o qual será descrito posteriormente.

A produção atividade de redesign da atividade 2, tarefa 5, da dupla C é apresentada na figura 50.



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 5)

Tarefa 6a. Preencha a tabela com os casos em que $\alpha < 90^o$

α	$a^2 + c^2$	b^2
90°	56,68 + 6,59 = 63,27	63,27
90°	49,17 + 2,74 = 51,91	51,9
90°	27,5 + 1,04 = 28,54	28,54

O que você observa?

Observamos que no ângulo de 90° os resultados variam

Tarefa 6b. Preencha a tabela com os casos em que $\alpha > 90^o$

α	$a^2 + c^2$	b^2
90°	14,24 + 9,27 = 23,51	23,51
90°	2,65 + 0,16 = 2,81	2,82
90°	15,78 + 5,33 = 21,11	21,12

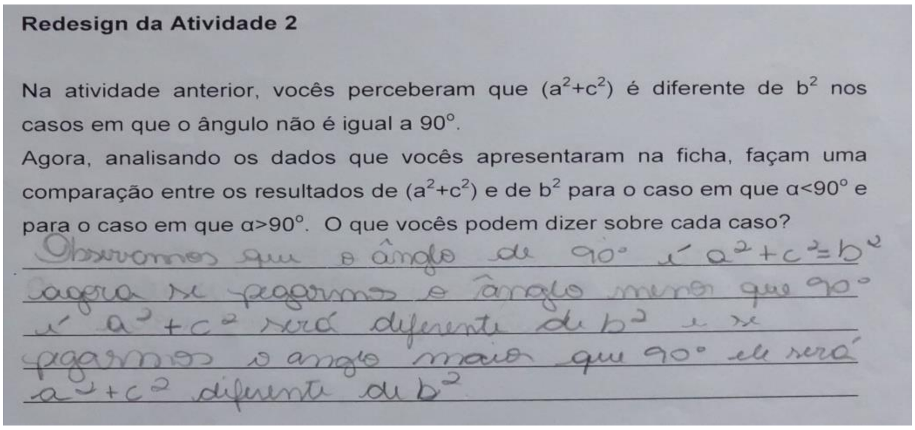
O que você observa?

Observamos que a soma de $a^2 + c^2$ é semelhante a b^2

Figura 50 - Produção da Dupla C – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefas 6a e 6b.
Fonte: Acervo Pessoal

A dupla C foi questionada oralmente sobre o significado da afirmação dada na primeira questão: "observamos que no ângulo de 90^o os resultados variam", ao que responderam: “se nós aumentarmos o ângulo de 90º, a e c vão mudar porque estão maiores. Os valores de a e c variam de acordo com o ângulo”. É interessante percebermos que os alunos conseguem expressar suas ideias oralmente de forma mais precisa que quando submetidos à escrita de suas observações.

Em seguida a professora pesquisadora comentou com a dupla que a conclusão dada na segunda questão é válida (quando o ângulo é de 90^o, os resultados são iguais). A questão da aproximação foi discutida, porque a dupla afirmou que os resultados são semelhantes e não iguais. A professora-pesquisadora esclareceu para esta dupla que o objetivo naquele momento era verificar o que aconteceria se o ângulo não fosse igual a 90^o. A dupla esclareceu que estabeleceu essa relação “porque o ângulo de 90º os números podem variar, conforme eu aumento o ângulo. Só que pra (sic) ficar igual, essa diferença não é grande, por isso são semelhantes e não iguais”. Com relação à tarefa seguinte, a dupla observou que, se o ângulo não fosse reto, a relação $a^2 + c^2 = b^2$ não seria válida.



Redesign da Atividade 2

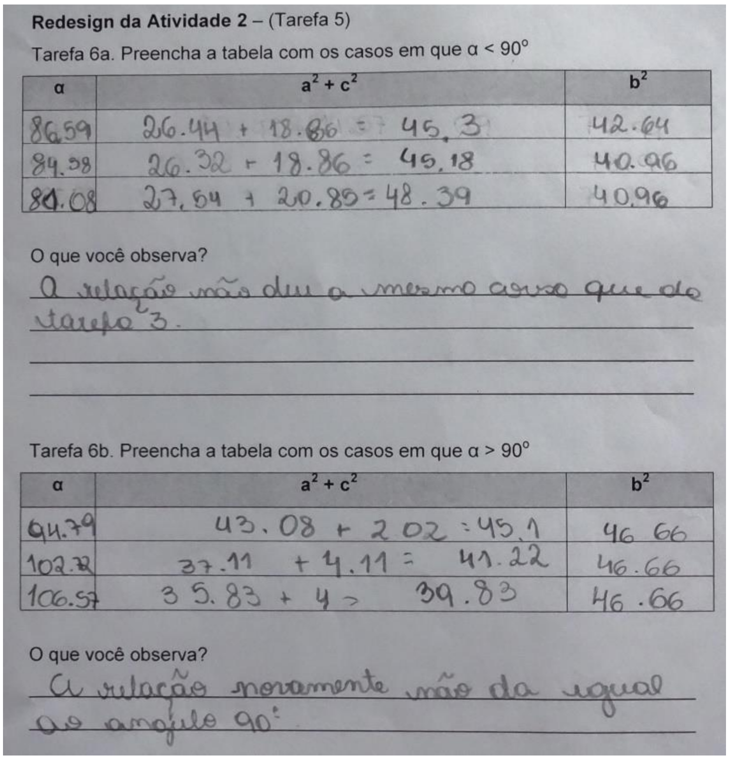
Na atividade anterior, vocês perceberam que (a^2+c^2) é diferente de b^2 nos casos em que o ângulo não é igual a 90°.
Agora, analisando os dados que vocês apresentaram na ficha, façam uma comparação entre os resultados de (a^2+c^2) e de b^2 para o caso em que α<90° e para o caso em que α>90°. O que vocês podem dizer sobre cada caso?

Observamos que o ângulo de 90° é $a^2+c^2=b^2$ agora se pegarmos o ângulo menor que 90° é a^2+c^2 será diferente de b^2 e se pegarmos o ângulo maior que 90° ele será a^2+c^2 diferente de b^2

Figura 51 – Produção da Dupla C – Questionamento das Tarefas 6a e 6b.
Fonte: Acervo Pessoal

Tendo em vista que a dupla não observou a relação esperada, a professora-pesquisadora solicitou que os alunos refizessem algumas fichas, mas que ficassem atentos ao preenchimento da tabela, pois na primeira tabela só deveriam colocar ângulos menores do que 90º e na segunda tabela maiores que 90°.

Essa situação ocorreu em um encontro individualizado, o qual será relatado posteriormente.



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 5)

Tarefa 6a. Preencha a tabela com os casos em que α < 90°

α	$a^2 + c^2$	b^2
86.59	26.44 + 18.86 = 45,3	42.64
84.58	26.32 + 18.86 = 45,18	40.96
84.08	27,54 + 20.85 = 48.39	40,96

O que você observa?

A relação não deu o mesmo caso que da tarefa 3.

Tarefa 6b. Preencha a tabela com os casos em que α > 90°

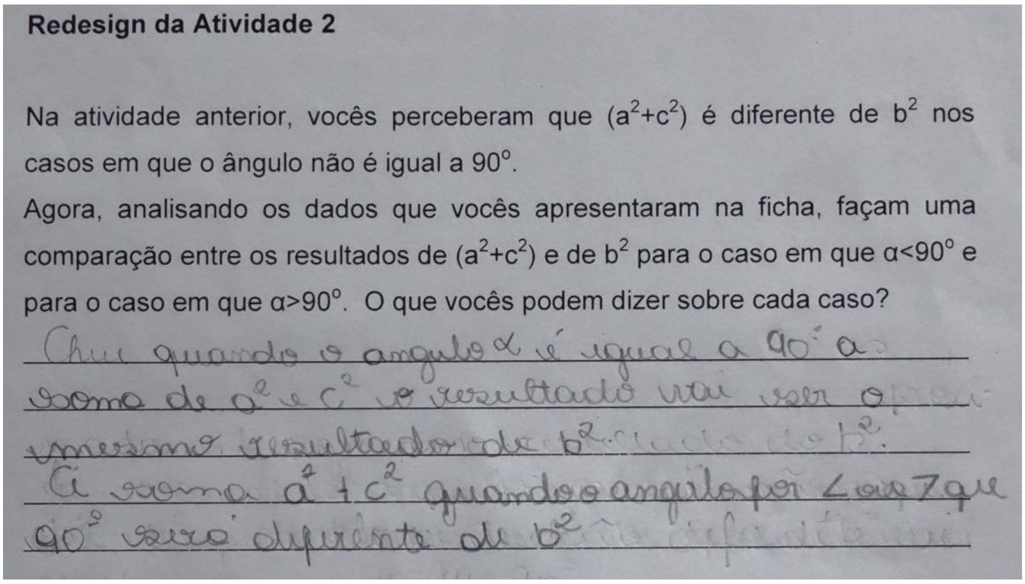
α	$a^2 + c^2$	b^2
94.79	43.08 + 2.02 = 45,1	46 66
102.72	37.11 + 4.11 = 41.22	46.66
106.57	35.83 + 4 > 39.83	46.66

O que você observa?

A relação novamente não da igual ao ângulo 90°.

Figura 52 – Produção da Dupla D – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefas 6a e 6b
Fonte: Acervo Pessoal

Nesta atividade, a dupla D observou que a relação de Pitágoras só seria válida se o ângulo fosse reto. Salienta-se que essa dupla teve que retomar algumas tarefas anteriores, referentes a Atividade 2.


Redesign da Atividade 2

Na atividade anterior, vocês perceberam que (a^2+c^2) é diferente de b^2 nos casos em que o ângulo não é igual a 90°.

Agora, analisando os dados que vocês apresentaram na ficha, façam uma comparação entre os resultados de (a^2+c^2) e de b^2 para o caso em que α<90° e para o caso em que α>90°. O que vocês podem dizer sobre cada caso?

Che quando o angulo α é igual a 90° a soma de a^2 e c^2 o resultado vai ser o mesmo resultado de b^2.

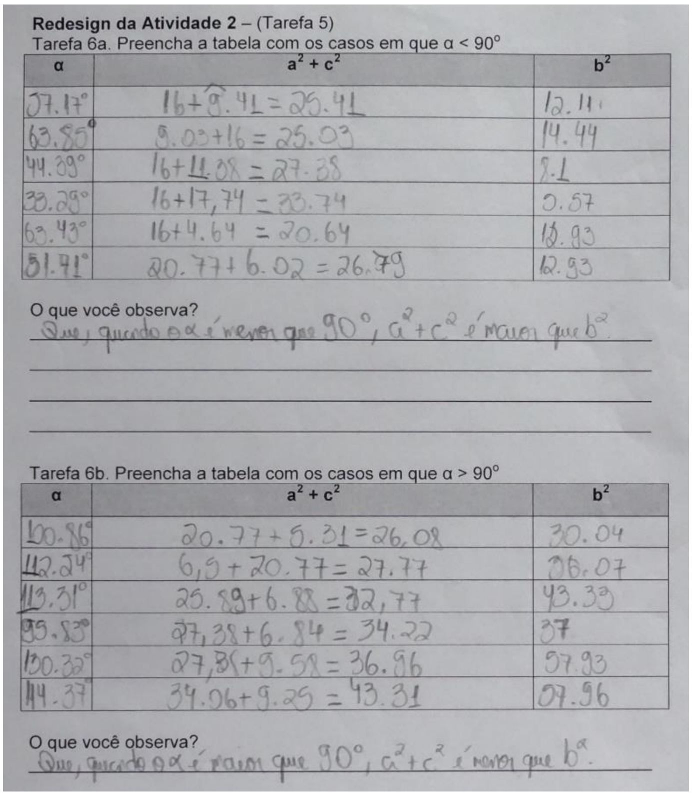
A soma a^2+c^2 quando o angulo for < ou > que 90° será diferente de b^2

Figura 53 – Produção da Dupla D – Questionamento das Tarefas 6a e 6b.
Fonte: Acervo Pessoal

Dado que as duplas apresentavam fases diferentes de construção, a professora-pesquisadora solicitou que elas comparecessem ao próximo encontro em horários alternados, para que fosse possível fazer intervenções específicas. O primeiro passo foi discutir com cada dupla as suas resoluções, explicar que o arredamento não era fator primordial para a nossa pesquisa, mas que foi realizada uma nova programação, visando assim uma melhor compreensão do que estava sendo exposto. Dessa forma, pretendia-se que utilizassem o aspecto dinâmico do *software* nas áreas dos quadrados, pois os valores dessas áreas já haviam sido calculados e expostos em cada quadrado, e com a manipulação, os valores seriam automaticamente readequados.

A dupla A foi apenas questionada, conforme descrito anteriormente, visto que foi a única dupla a conseguir as relações esperadas.

A dupla B retomou a Atividade 2, a partir do *redesign* da Tarefa 5, conforme ilustrado na nova produção nomeadas como figura 54.



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 5)

Tarefa 6a. Preencha a tabela com os casos em que α < 90°

α	$a^2 + c^2$	b^2
37.17°	16+9.41 = 25.41	12.11
63.85°	9.03+16 = 25.03	14.44
44.39°	16+11.38 = 27.38	8.1
33.29°	16+17,74 = 33.74	0.57
63.43°	16+4.64 = 20.64	13.93
51.41°	20.77+6.02 = 26.79	12.93

O que você observa?

Que, quando o α é menor que 90°, a^2+c^2 é maior que b^2.

Tarefa 6b. Preencha a tabela com os casos em que α > 90°

α	$a^2 + c^2$	b^2
100.86°	20.77+5.31 = 26.08	30.04
112.24°	6,9+20.77 = 27.77	36.07
113.31°	25.89+6.88 = 32,77	43.33
95.83°	27,38+6.84 = 34.22	37
130.32°	27,38+9.58 = 36.96	57.93
114.37°	34.06+9.25 = 43.31	57.96

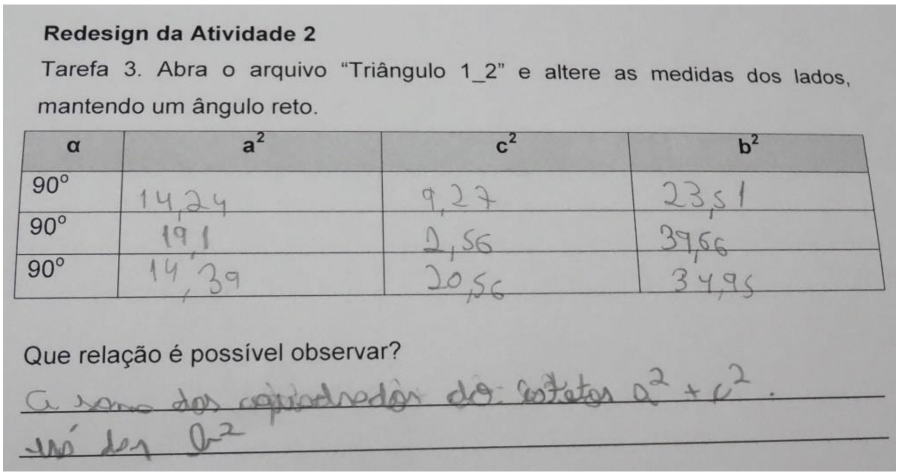
O que você observa?

Que, quando o α é maior que 90°, a^2+c^2 é menor que b^2.

Figura 54 – Produção da Dupla B – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefas 6a e 6b.
Fonte: Acervo pessoal

A partir desse *redesign*, constatamos que a dupla B observou e relatou a relação esperada.

As duplas C e D retomaram a Atividade 2 a partir do *redesign* da tarefa 4. Essa intervenção foi necessária para que cada dupla, com as novas programações no *software*, construíssem as relações esperadas. Suas novas produções estão apresentadas nas figuras 55, 56 e 57.



Redesign da Atividade 2

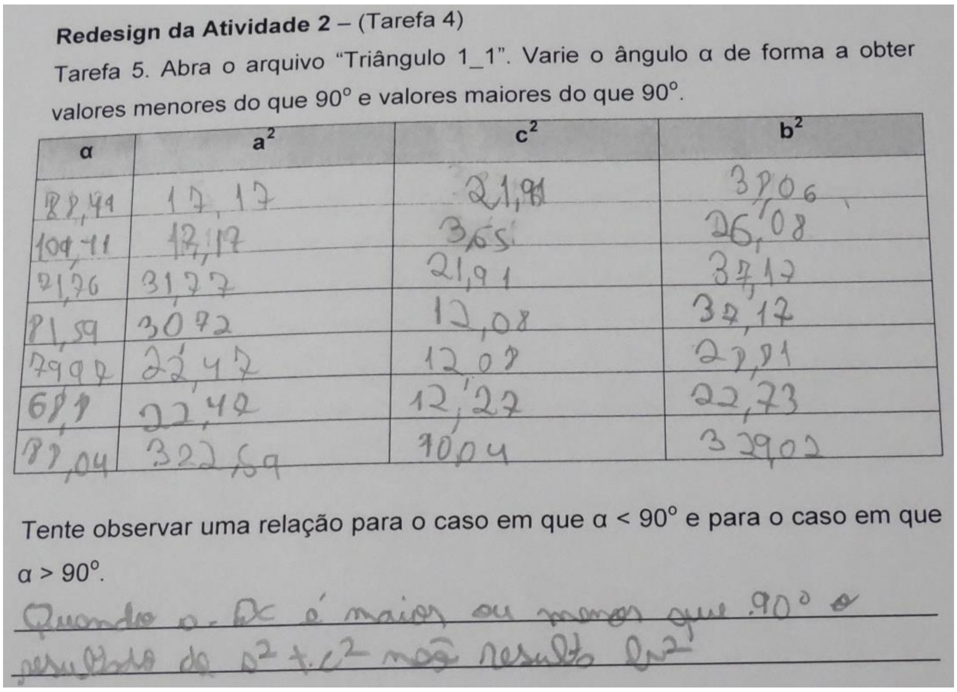
Tarefa 3. Abra o arquivo "Triângulo 1_2" e altere as medidas dos lados, mantendo um ângulo reto.

α	a^2	c^2	b^2
90°	14,24	9,27	23,51
90°	19,1	2,56	39,66
90°	14,39	20,56	34,95

Que relação é possível observar?

A soma dos quadrados dos catetos $a^2 + c^2$. [illegible] b^2

Figura 55 – Produção Dupla C – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 3.
Fonte: Acervo pessoal



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 4)

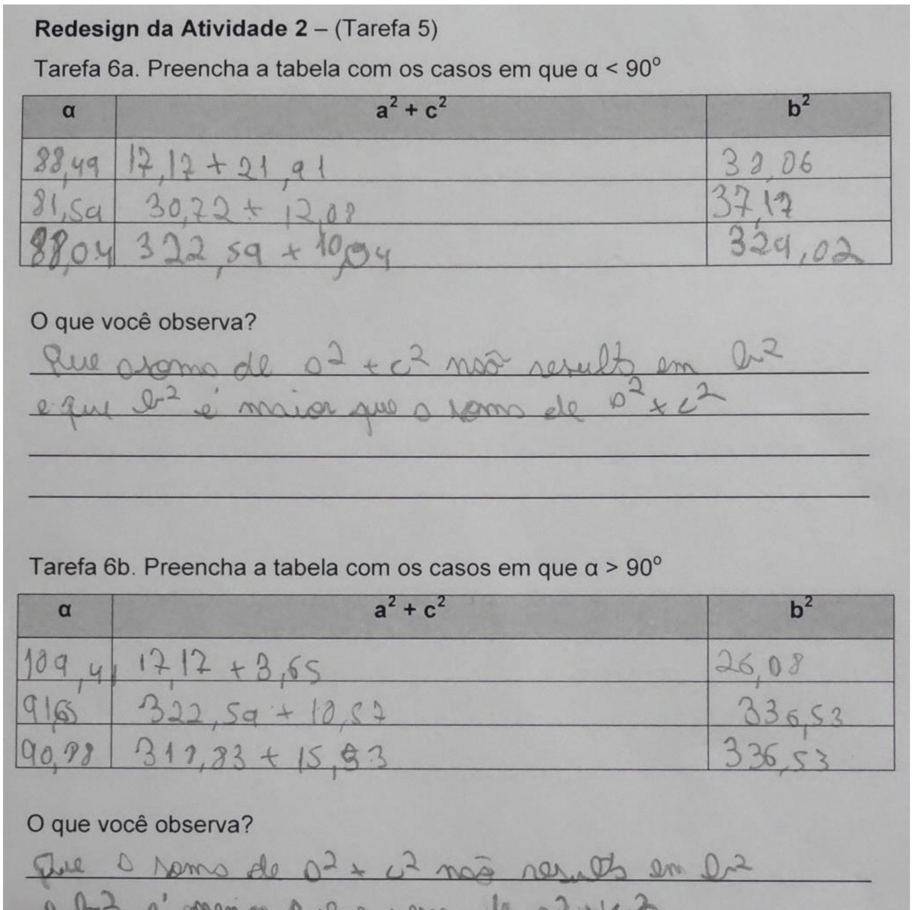
Tarefa 5. Abra o arquivo "Triângulo 1_1". Varie o ângulo α de forma a obter valores menores do que 90° e valores maiores do que 90°.

α	a^2	c^2	b^2
88,49	17,17	21,91	39,06
109,41	17,17	3,65	26,08
91,76	31,77	21,91	37,17
81,59	30,72	12,08	37,17
79,92	22,47	12,08	29,91
68,9	22,42	12,27	22,73
88,04	322,59	10,04	339,02

Tente observar uma relação para o caso em que α < 90° e para o caso em que α > 90°.

Quando o α é maior ou menor que 90° o resultado de $a^2 + c^2$ não resulta b^2

Figura 56 - Produção Dupla C – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 5.
Fonte: Acervo pessoal



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 5)

Tarefa 6a. Preencha a tabela com os casos em que α < 90°

α	$a^2 + c^2$	b^2
88,49	17,17 + 21,91	39,06
81,59	30,72 + 12,08	37,17
88,04	322,59 + 10,04	329,02

O que você observa?

Que a soma de $a^2 + c^2$ não resulta em b^2 e que b^2 é maior que a soma de $a^2 + c^2$

Tarefa 6b. Preencha a tabela com os casos em que α > 90°

α	$a^2 + c^2$	b^2
109,41	17,12 + 3,65	26,08
91,65	322,59 + 10,57	336,53
90,98	317,83 + 15,53	336,53

O que você observa?

Que a soma de $a^2 + c^2$ não resulta em b^2 e b^2 é menor que a soma de $a^2 + c^2$

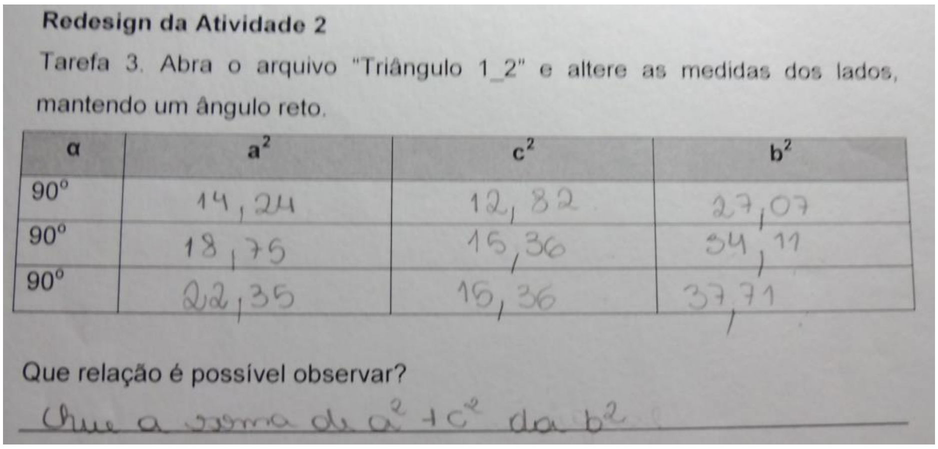
Figura 57 - Produção da Dupla C – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefas 6a e 6b.
Fonte: Acervo pessoal

A dupla C concluiu a relação no caso do ângulo reto. Para os casos em que o ângulo não era reto, ela relatou que a^2+c^2 era diferente de b^2, porém, apesar de construir corretamente a tabela, concluiu incorretamente que b^2 era maior que $a^2 + c^2$ para $\alpha < 90^o$ e que b^2 era menor que $a^2 + c^2$ para $\alpha > 90^o$. Diante disso, a professora-pesquisadora solicitou à dupla que analisasse novamente sua produção e, assim, ela comentou, professora, como era (sic) muitos cálculos, não observamos que os valores para alfa menor que noventa graus a soma de $a^2 + b^2$ era maior que b^2, o mesmo aconteceu na segunda tabela, agora que a senhora pediu para refazermos os cálculos, percebemos o nosso erro.

A seguir, apresentamos as novas produções da Dupla D. Na realização do *redesign*, o Aluno 7 não compareceu. Nos encontros anteriores, esse aluno se mostrou desmotivado e afirmou constatemente que não entendia as relações. A professora-pesquisadora procurou verificar se o aluno também apresentava esse comportamento nas aulas regulares, constatando que o mesmo não frequentava com assiduidade as aulas regulares, sempre se apresentava desmotivado e sem o material escolar. O estudante relatou à professora-pesquisadora que gostaria que as fórmulas fossem fornecidas, pois assim ele conseguiria resolver qualquer exercício. A pesquisadora esclareceu constantemente os objetivos de sua pesquisa, dizendo que não poderia fornecer a fórmula, que esperava que os alunos construíssem o conhecimento a partir das atividades e do diálogo entre as duplas.

À medida que avançávamos na resolução dos exercícios, a aluna foi constatando que a utilização de fórmulas não era o primordial naquele momento, mas que contruir novos conhecimentos e compartilhar ideias era o mais interessante.

Na sequência, apresentamos as figuras 58, 59, 60 e 61 com as novas produções da dupla D (Aluno 8).



Redesign da Atividade 2

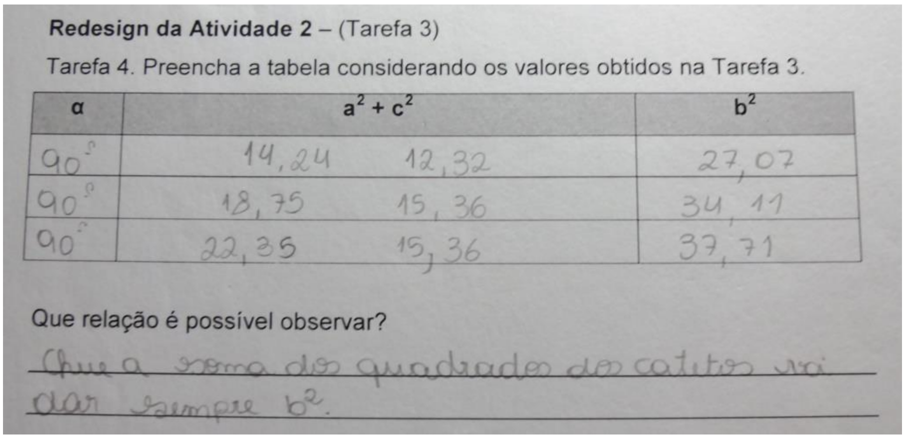
Tarefa 3. Abra o arquivo "Triângulo 1_2" e altere as medidas dos lados, mantendo um ângulo reto.

α	a^2	c^2	b^2
90°	14,24	12,82	27,07
90°	18,75	15,36	34,11
90°	22,35	15,36	37,71

Que relação é possível observar?

Que a soma de $a^2 + c^2$ da b^2

Figura 58 – Produção da Dupla D – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 3.
Fonte: Acervo pessoal



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 3)

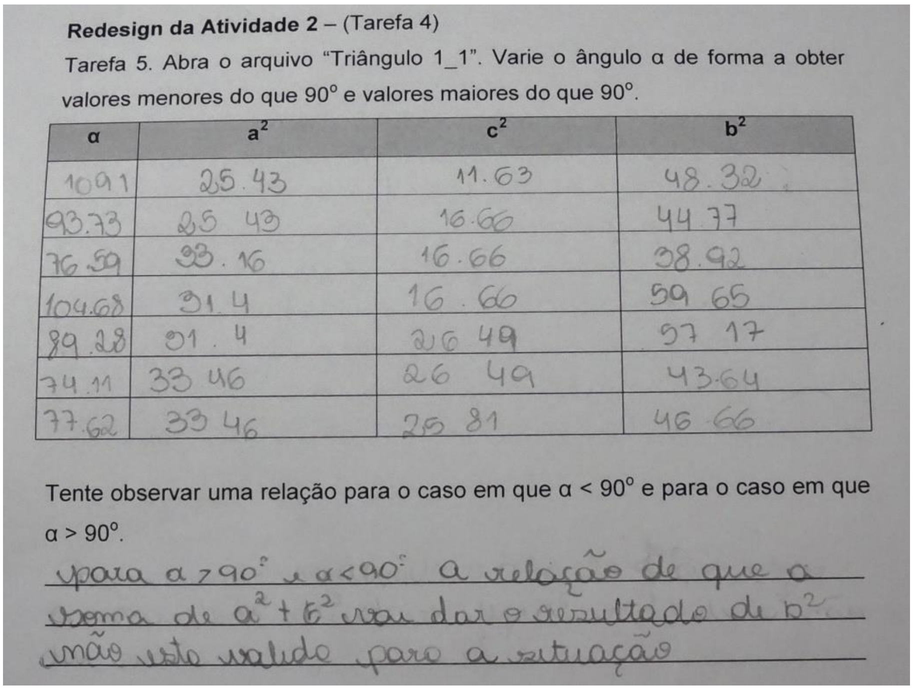
Tarefa 4. Preencha a tabela considerando os valores obtidos na Tarefa 3.

α	$a^2 + c^2$	b^2
90°	14,24 12,32	27,07
90°	18,75 15,36	34,11
90°	22,35 15,36	37,71

Que relação é possível observar?

Que a soma dos quadrados dos catetos vai dar sempre b^2.

Figura 59 – Produção da Dupla D – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 4.
Fonte: Acervo pessoal



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 4)

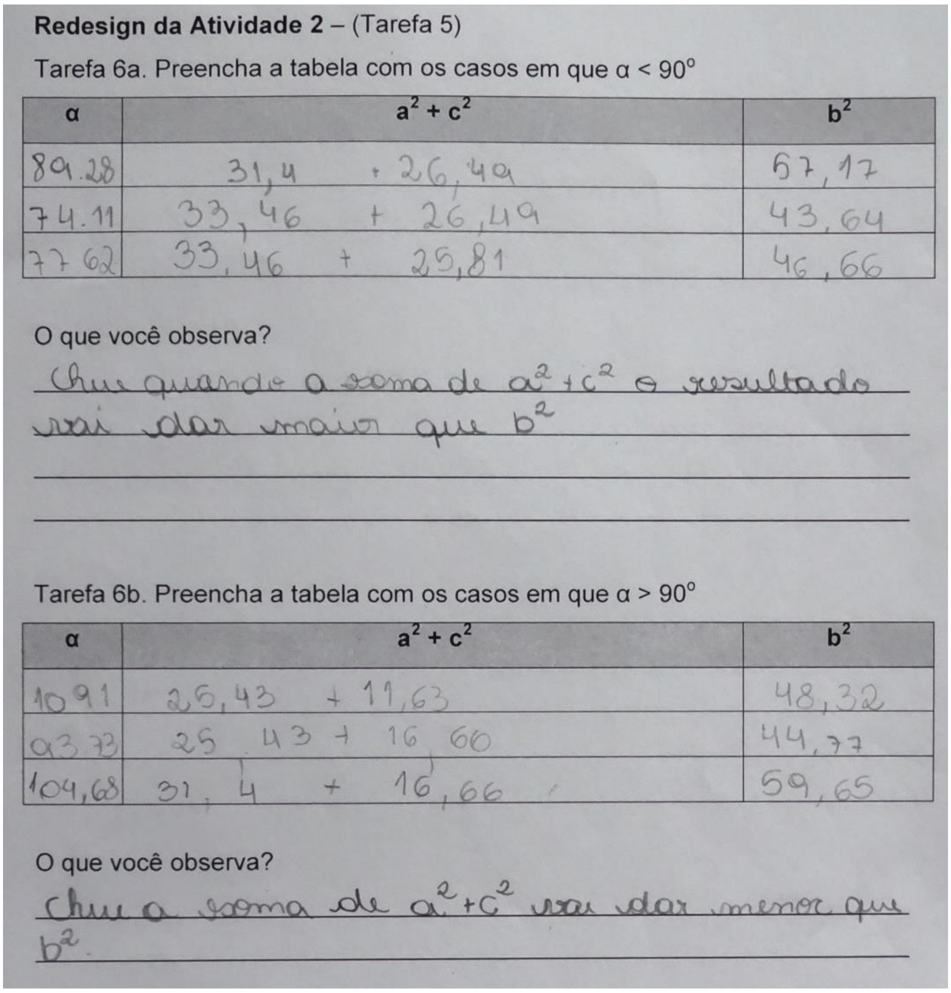
Tarefa 5. Abra o arquivo "Triângulo 1_1". Varie o ângulo α de forma a obter valores menores do que 90° e valores maiores do que 90°.

α	a^2	c^2	b^2
109.1	25.43	11.63	48.32
93.73	25.43	16.66	44.77
76.59	33.16	16.66	38.92
104.68	31.4	16.66	59.65
89.28	31.4	26.49	57.17
74.11	33.46	26.49	43.64
77.62	33.46	25.81	46.66

Tente observar uma relação para o caso em que α < 90° e para o caso em que α > 90°.

para α > 90° e α < 90° a relação de que a soma de $a^2 + c^2$ vai dar o resultado de b^2 não esta valido para a situação

Figura 60 – Produção da Dupla D – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 5.
Fonte: Acervo pessoal



Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 5)

Tarefa 6a. Preencha a tabela com os casos em que α < 90°

α	$a^2 + c^2$	b^2
89.28	31,4 + 26,49	67,17
74.11	33,46 + 26,49	43,64
77 62	33,46 + 25,81	46,66

O que você observa?

Que quando a soma de a^2+c^2 o resultado vai dar maior que b^2

Tarefa 6b. Preencha a tabela com os casos em que α > 90°

α	$a^2 + c^2$	b^2
10 91	25,43 + 11,63	48,32
93.73	25 43 + 16 66	44,77
104,68	31, 4 + 16,66	59,65

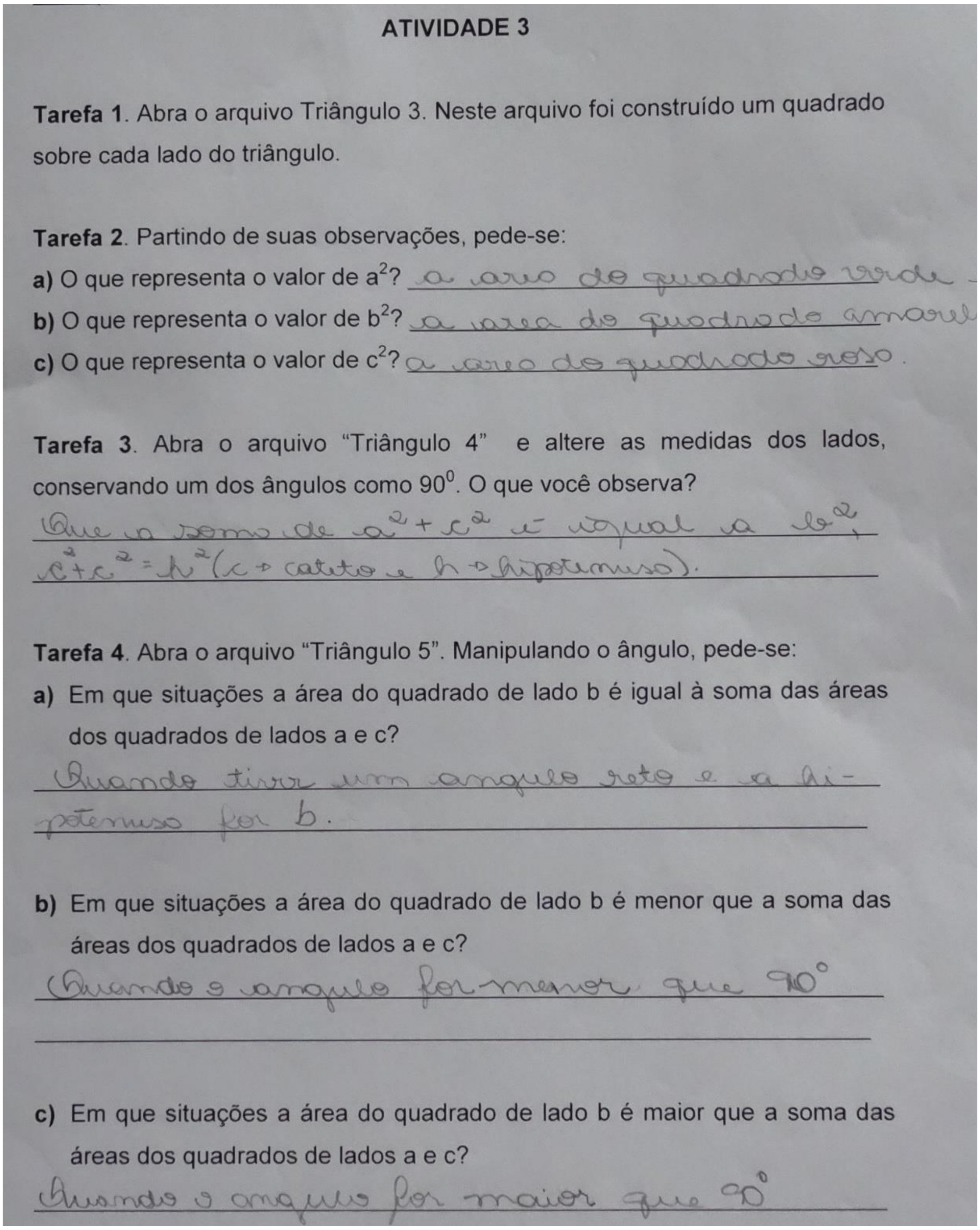
O que você observa?

Que a soma de a^2+c^2 vai dar menor que b^2.

Figura 61 - Produção da Dupla D – *Redesign* da Atividade 2 – Tarefa 6a e Tarefa 6b.
Fonte: Acervo pessoal

Após analisarmos as atividades de *redesign* das duplas, verificamos que as relações foram estabelecidas. O problema causado pela limitação do *software*, no caso dos arredondamentos, provocados inicialmente não se tornaram mais obstáculos.

Dado que o objetivo foi atingido, seguimos com a Atividade 3. Essa atividade tratou da mesma relação da Atividade 2, porém no registro figural. Pretendia-se que o aluno concluísse que, no caso em que o ângulo era reto, a área do quadrado do maior lado era igual à soma das áreas dos quadrados dos outros lados, mas que isso não ocorria quando o triângulo não era retângulo.



ATIVIDADE 3

Tarefa 1. Abra o arquivo Triângulo 3. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo.

Tarefa 2. Partindo de suas observações, pede-se:

a) O que representa o valor de a^2? a area do quadrado verde

b) O que representa o valor de b^2? a area do quadrado amarel

c) O que representa o valor de c^2? a area do quadrado roso.

Tarefa 3. Abra o arquivo "Triângulo 4" e altere as medidas dos lados, conservando um dos ângulos como 90^0. O que você observa?

Que a soma de $a^2 + c^2$ é igual a b^2, $c^2 + c^2 = h^2$ (c → cateto e h → hipotenusa).

Tarefa 4. Abra o arquivo "Triângulo 5". Manipulando o ângulo, pede-se:

a) Em que situações a área do quadrado de lado b é igual à soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quando tiver um angulo reto e a hipotenusa for b.

b) Em que situações a área do quadrado de lado b é menor que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

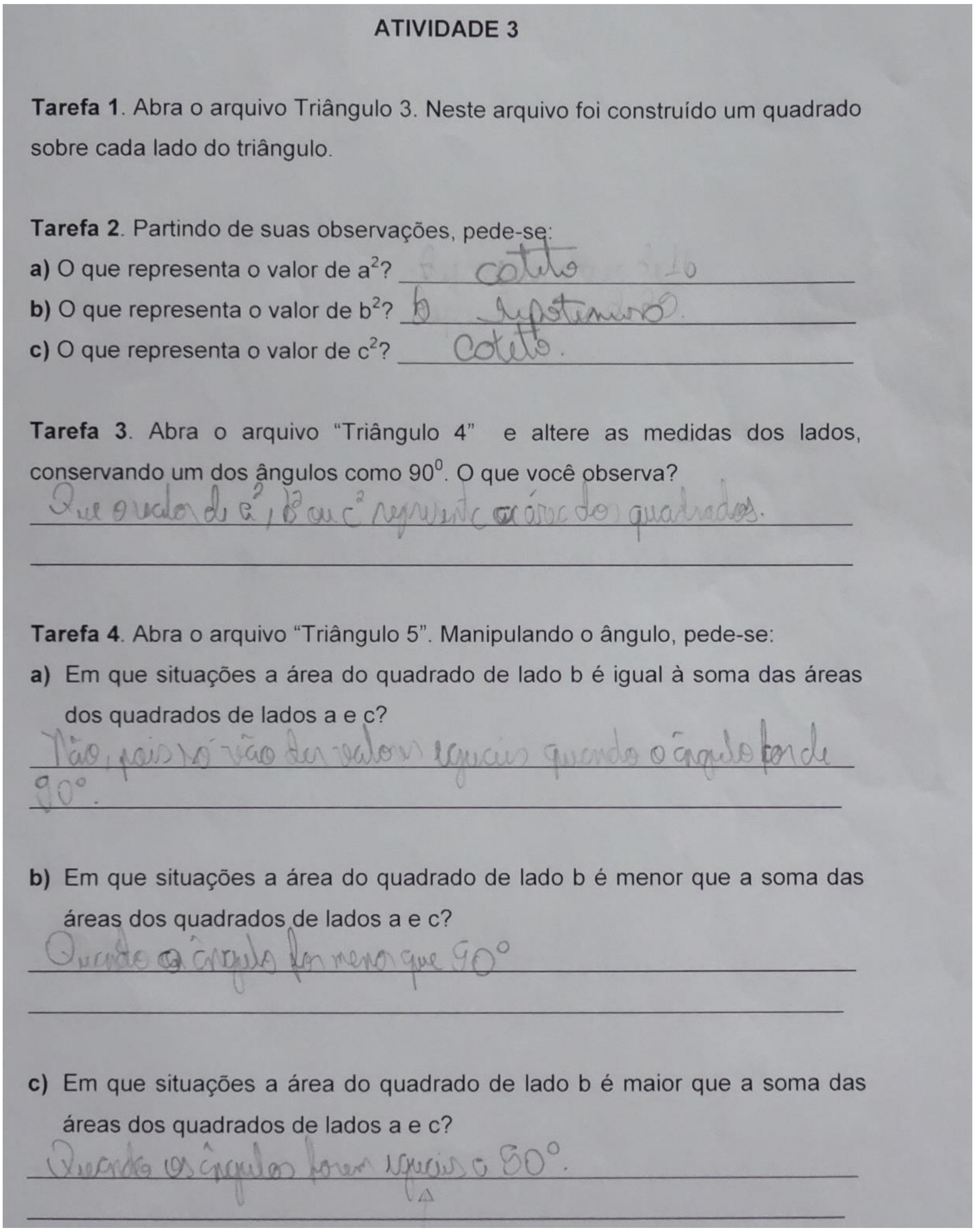
Quando o angulo for menor que $90°$

c) Em que situações a área do quadrado de lado b é maior que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quando o angulo for maior que $90°$

Figura 62 - Produção da Dupla A – Atividade 3
Fonte: Acervo pessoal

Notamos que a Dupla A realizou a atividade sem qualquer dificuldade. A seguir, apresenta-se a resolução da dupla B.


ATIVIDADE 3

Tarefa 1. Abra o arquivo Triângulo 3. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo.

Tarefa 2. Partindo de suas observações, pede-se:

a) O que representa o valor de a^2? cateto

b) O que representa o valor de b^2? b hipotenusa.

c) O que representa o valor de c^2? Cateto.

Tarefa 3. Abra o arquivo "Triângulo 4" e altere as medidas dos lados, conservando um dos ângulos como 90^0. O que você observa?

Que o valor de a^2, b^2 ou c^2 representa a área dos quadrados.

Tarefa 4. Abra o arquivo "Triângulo 5". Manipulando o ângulo, pede-se:

a) Em que situações a área do quadrado de lado b é igual à soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Não, pois só vão dar valores iguais quando o ângulo for de 90°.

b) Em que situações a área do quadrado de lado b é menor que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quando o ângulo for menor que 90°

c) Em que situações a área do quadrado de lado b é maior que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

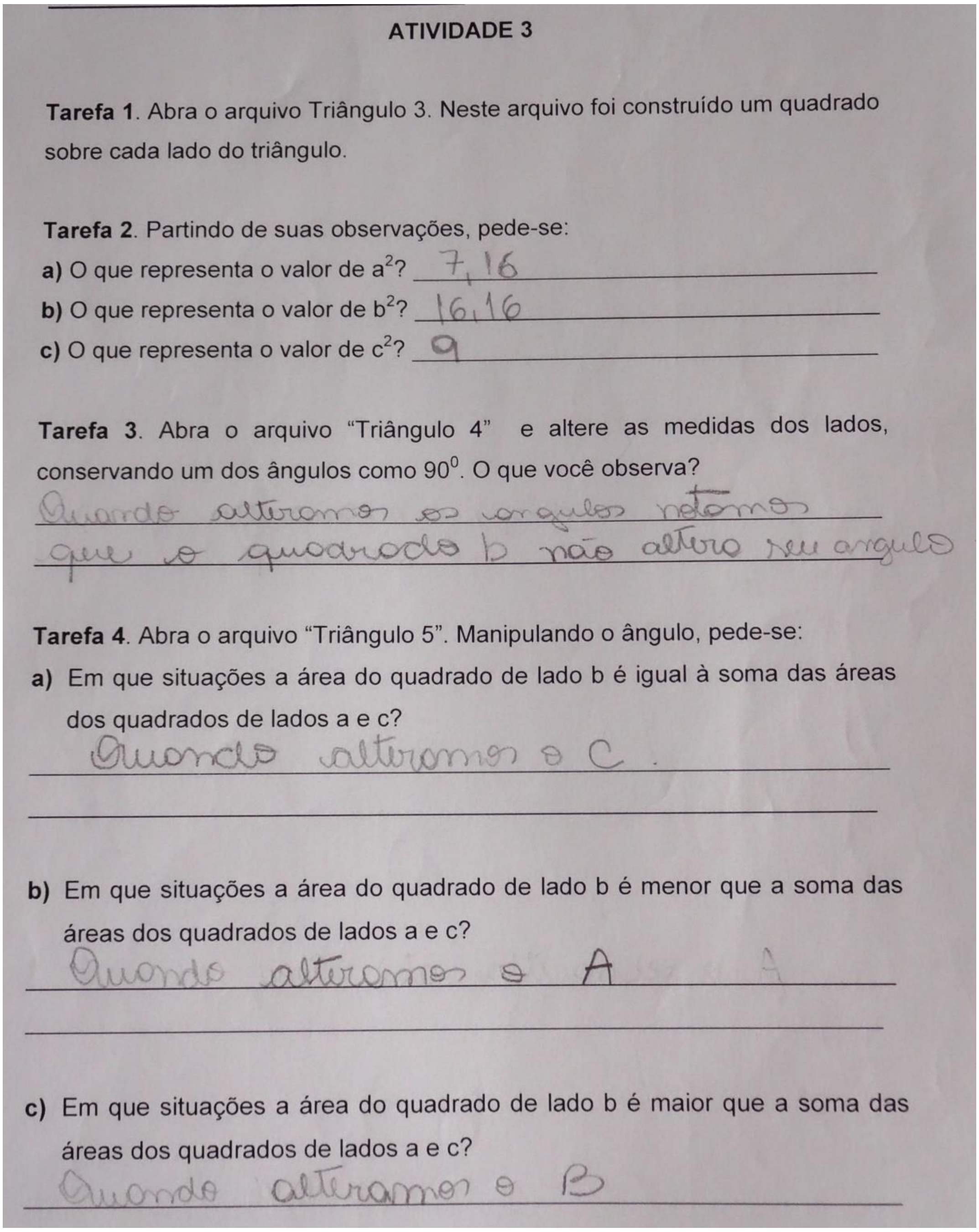
Quando os ângulos forem iguais a 90°.

Figura 63 - Produção da Dupla B – Atividade 3
Fonte: Acervo pessoal

Constatamos que, na tarefa 2, a dupla confundiu o termo a^2, que se refere a área do quadrado de lado a, com o cateto "a" do triângulo. Esse equívoco ocorreu, também, com os termos b e c. A dupla teve sucesso na tarefas 3 e 4, com exceção do item c da tarefa 4.

Bastian (2000) também verificou equívoco semelhante em sua pesquisa, ao constatar que, apesar de a conclusão sobre as áreas dos quadrados estar correta, os alunos não obtiveram êxito quando solicitados a estabelecer uma relação entre os lados do triângulo e as respectivas áreas dos quadrados. Para a pesquisadora, possivelmente esta dificuldade está associada ao fenômeno da não congruência, ou seja, ao obstáculo do deslocamento de objetos ou mesmo a interferência da rotação do triângulo.

A seguir, apresenta-se a resolução da dupla C.



ATIVIDADE 3

Tarefa 1. Abra o arquivo Triângulo 3. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo.

Tarefa 2. Partindo de suas observações, pede-se:

a) O que representa o valor de a^2? 7,16

b) O que representa o valor de b^2? 16,16

c) O que representa o valor de c^2? 9

Tarefa 3. Abra o arquivo "Triângulo 4" e altere as medidas dos lados, conservando um dos ângulos como 90^0. O que você observa?

Quando alteramos os angulos notamos que o quadrado b não altera seu angulo

Tarefa 4. Abra o arquivo "Triângulo 5". Manipulando o ângulo, pede-se:

a) Em que situações a área do quadrado de lado b é igual à soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quando alteramos o C.

b) Em que situações a área do quadrado de lado b é menor que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

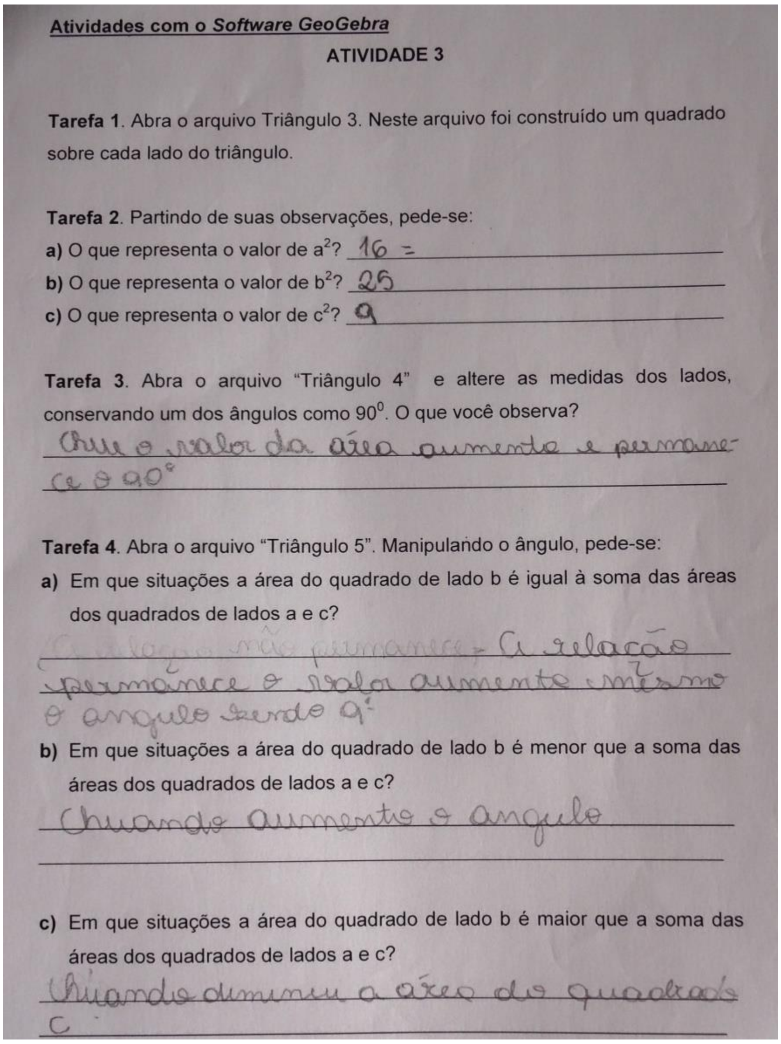
Quando alteramos o A

c) Em que situações a área do quadrado de lado b é maior que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quando alteramos o B

Figura 64 - Produção da Dupla C – Atividade 3
Fonte: Acervo pessoal

A dupla C não conseguiu estabelecer as relações esperadas na tarefa 2. Ao invés de relacionar a^2 com a respectiva área do quadrado verde, b^2 com a área do quadrado amarelo e c^2 com a do quadrado rosa, os alunos da dupla forneceram o valor da área presente na tela. Quanto às tarefas 3 e 4, notamos que as respostas fornecidas denotaram que a atenção não foi voltada à alteração do ângulo. Apresentamos na figura 66 a resolução da dupla D.



Atividades com o *Software GeoGebra*

ATIVIDADE 3

Tarefa 1. Abra o arquivo Triângulo 3. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo.

Tarefa 2. Partindo de suas observações, pede-se:

a) O que representa o valor de a^2? 16 =

b) O que representa o valor de b^2? 25

c) O que representa o valor de c^2? 9

Tarefa 3. Abra o arquivo "Triângulo 4" e altere as medidas dos lados, conservando um dos ângulos como 90^0. O que você observa?

Que o valor da área aumenta e permane-ce o 90°

Tarefa 4. Abra o arquivo "Triângulo 5". Manipulando o ângulo, pede-se:

a) Em que situações a área do quadrado de lado b é igual à soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

~~A relação não permanece~~ - A relação permanece o valor aumento mesmo o angulo sendo 9°

b) Em que situações a área do quadrado de lado b é menor que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quando aumento o angulo

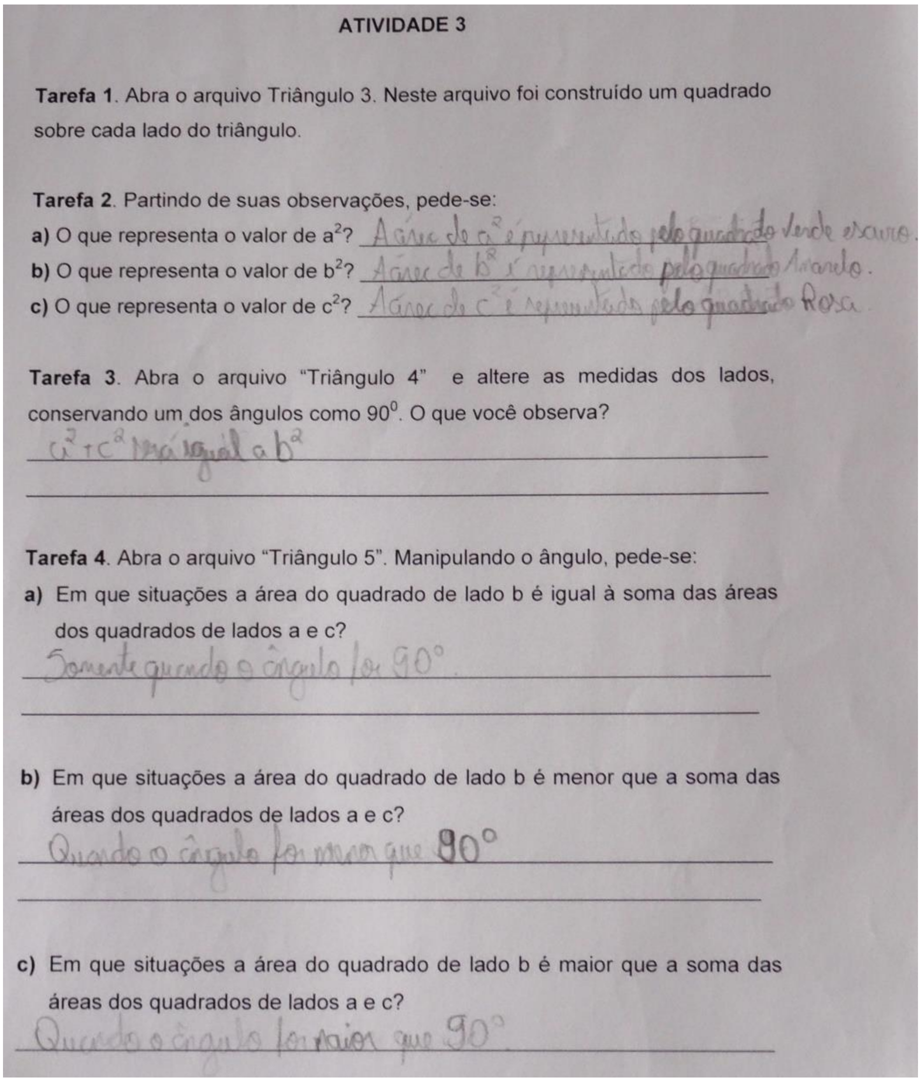
c) Em que situações a área do quadrado de lado b é maior que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quando diminui a área do quadrado c

Figura 65 – Produção da Dupla D – Atividade 3
Fonte: Acervo pessoal

A produção da Dupla D revelou que ela não observou a relação esperada. Diante das produções das duplas B, C e D, a professora-pesquisadora optou por fazer uma nova intervenção, pois a maioria não constatou todas as relações esperadas, com exceção da dupla A. Cada dupla refez a Atividade 3, sendo questionada individualmente sobre sua compreensão a cada tarefa. Quintaneiro (2010) evidenciou problemas semelhantes, ao relatar que em diversas atividades que propôs, os sujeitos nem sempre compreendiam o objetivo da proposta. Neste caso, é provável que essa ocorrência possa ser justificada pela forma como os conceitos são trabalhados em sala de aula. No caso do teorema de Pitágoras, muitas vezes os alunos não são questionados em que condições podem aplicá-lo, ou que relações existem entre ele e as relações métricas no triângulo retângulo. Ainda, muitas vezes a exploração se reduz a um único tipo de registro, não favorecendo ao estudante o estabelecimento dessas reflexões.

Apresentamos, nas figuras 66, 67 e 68 as produções obtidas após essa intervenção.


ATIVIDADE 3

Tarefa 1. Abra o arquivo Triângulo 3. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo.

Tarefa 2. Partindo de suas observações, pede-se:

a) O que representa o valor de a^2? A área de a^2 é representado pelo quadrado Verde escuro.

b) O que representa o valor de b^2? A área de b^2 é representado pelo quadrado Amarelo.

c) O que representa o valor de c^2? A área de c^2 é representado pelo quadrado Rosa.

Tarefa 3. Abra o arquivo "Triângulo 4" e altere as medidas dos lados, conservando um dos ângulos como 90^0. O que você observa?

a^2+c^2 será igual a b^2

Tarefa 4. Abra o arquivo "Triângulo 5". Manipulando o ângulo, pede-se:

a) Em que situações a área do quadrado de lado b é igual à soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Somente quando o ângulo for 90°.

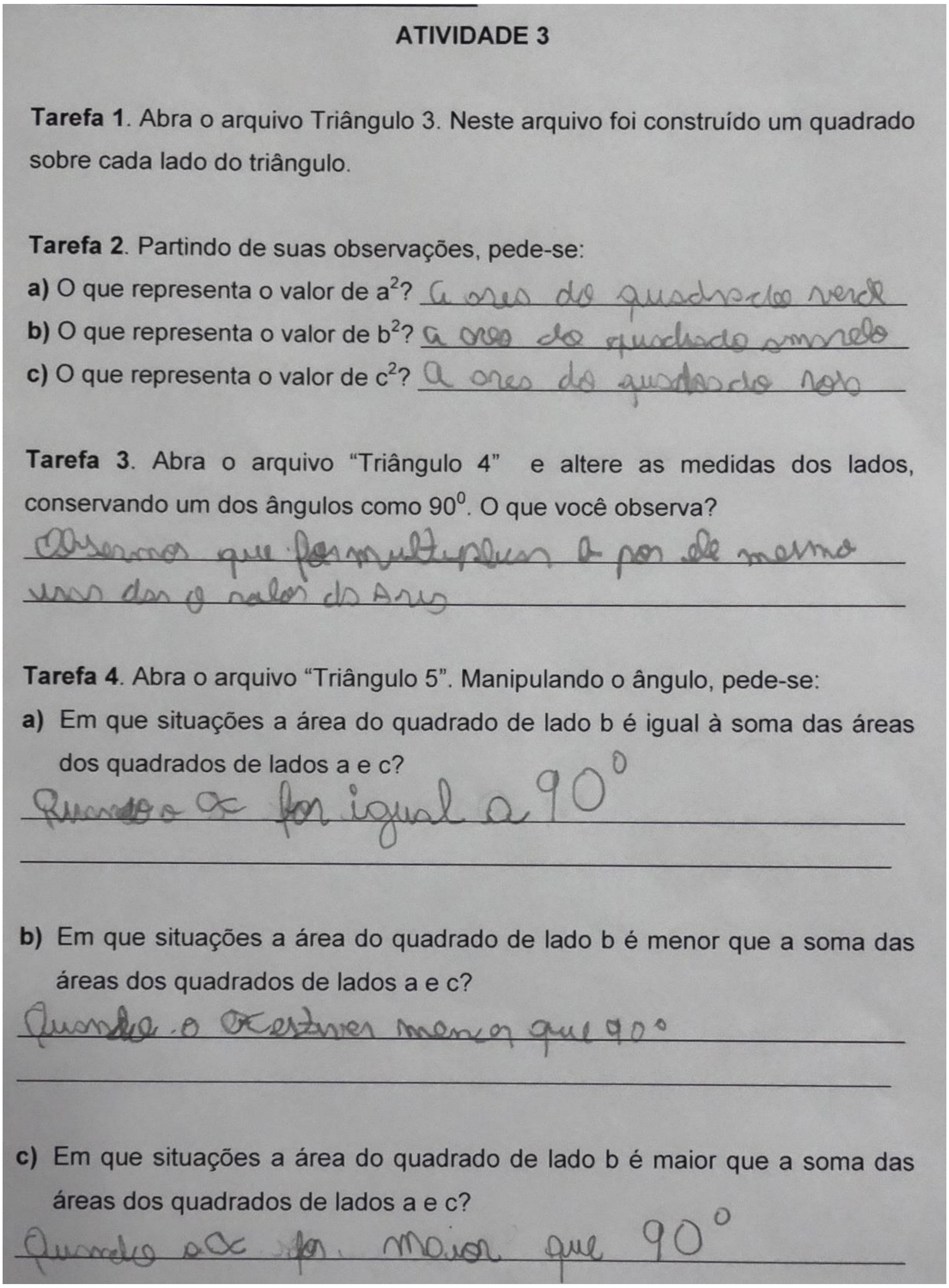
b) Em que situações a área do quadrado de lado b é menor que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quando o ângulo for menor que 90°

c) Em que situações a área do quadrado de lado b é maior que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quando o ângulo for maior que 90°.

Figura 66 - Produção da Dupla B – Atividade de *Redesign* da Atividade 3
Fonte: Acervo pessoal



ATIVIDADE 3

Tarefa 1. Abra o arquivo Triângulo 3. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo.

Tarefa 2. Partindo de suas observações, pede-se:

a) O que representa o valor de a^2? a area do quadrado verde

b) O que representa o valor de b^2? a area do quadrado amarelo

c) O que representa o valor de c^2? a area do quadrado roxo

Tarefa 3. Abra o arquivo "Triângulo 4" e altere as medidas dos lados, conservando um dos ângulos como 90^0. O que você observa?

Observamos que for multiplica a por ele mesmo vai dar o valor da Area

Tarefa 4. Abra o arquivo "Triângulo 5". Manipulando o ângulo, pede-se:

a) Em que situações a área do quadrado de lado b é igual à soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quando o α for igual a 90^0

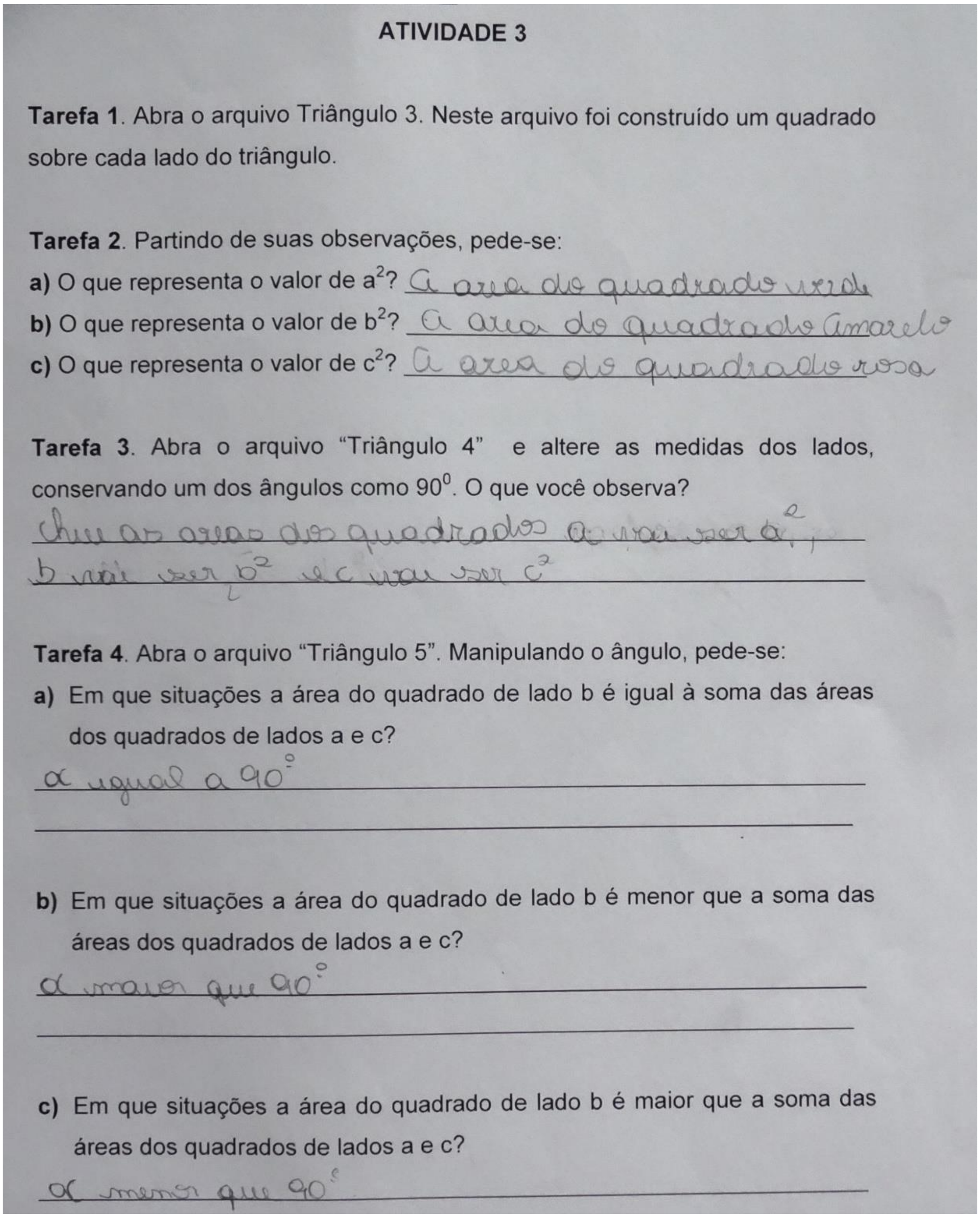
b) Em que situações a área do quadrado de lado b é menor que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quando o α estiver menor que 90°

c) Em que situações a área do quadrado de lado b é maior que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

Quando o α for maior que 90^0

Figura 67 – Produção da Dupla C – Atividade de *Redesign* da Atividade 3
Fonte: Acervo pessoal



ATIVIDADE 3

Tarefa 1. Abra o arquivo Triângulo 3. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo.

Tarefa 2. Partindo de suas observações, pede-se:

a) O que representa o valor de a^2? A area do quadrado verde

b) O que representa o valor de b^2? A area do quadrado Amarelo

c) O que representa o valor de c^2? A area do quadrado rosa

Tarefa 3. Abra o arquivo "Triângulo 4" e altere as medidas dos lados, conservando um dos ângulos como 90^0. O que você observa?

Que as areas dos quadrados a vai ser a^2, b vai ser b^2 e c vai ser c^2

Tarefa 4. Abra o arquivo "Triângulo 5". Manipulando o ângulo, pede-se:

a) Em que situações a área do quadrado de lado b é igual à soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

α igual a $90°$

b) Em que situações a área do quadrado de lado b é menor que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

α maior que $90°$

c) Em que situações a área do quadrado de lado b é maior que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

α menor que $90°$

Figura 68 - Produção da Dupla D – Atividade de *Redesign* da Atividade 3
Fonte: Acervo pessoal

Para as duplas A, B e C, o objetivo foi alcançado com a nova aplicação da Atividade 3, ou seja, elas observaram que, no caso de triângulos acutângulos, a área do quadrado do maior lado é menor que a soma das áreas dos quadrados dos outros lados e, no caso de triângulos obtusângulos, a área do quadrado do maior lado é maior que a soma das áreas dos quadrados dos outros lados, constatando as condições para que $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 < a^2 + b^2$ e $c^2 > a^2 + b^2$.

Já a dupla D apresentou as conclusões dos itens b e c incorretamente. Diante do comportamento apresentado pelo Aluno 7, havia a possibilidade de ele não comparecer mais, o que se confirmou. E o Aluno 8, por motivos familiares, mudou de cidade, consequentemente de escola, impossibilitando assim sua participação nas atividades seguintes. Desta forma, não foi possível realizar o *redesign* dessa atividade com a Dupla D.

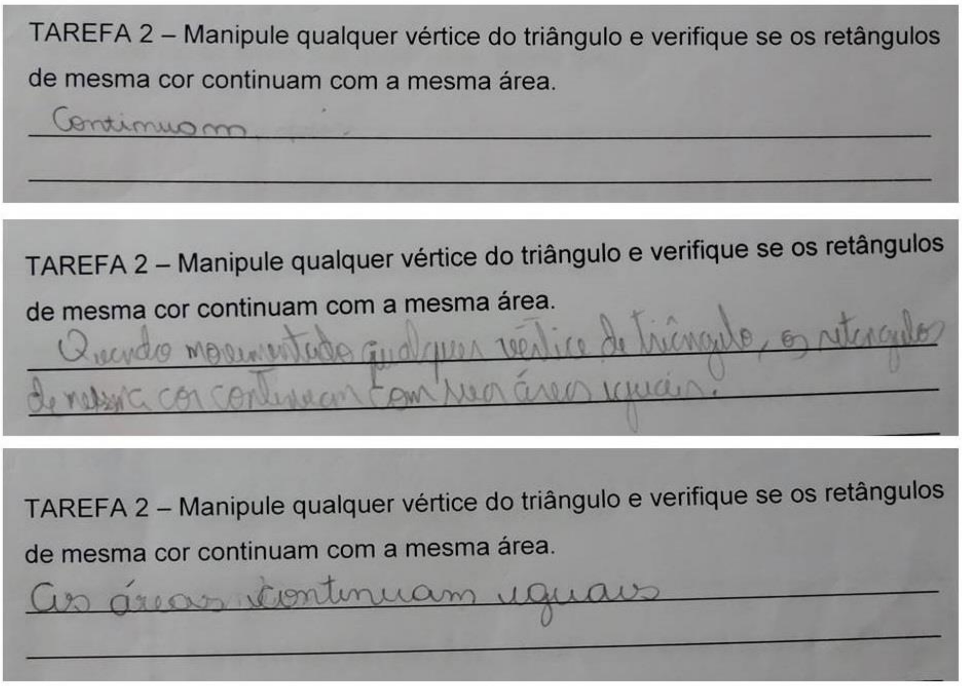
Em geral, da mesma forma que constatado por Procópio (2011), notamos que as ferramentas do *GeoGebra* permitiram ao aluno praticidade de manipulação dinâmica, experimentação, verificação, construção e representação das relações esperadas.

O objetivo da Atividade 4 era que o estudante tivesse um primeiro contato com a lei dos cossenos partindo de uma entrada experimental no *GeoGebra*. Neste caso, por meio de manipulações no *software*, intencionava-se que ele investigasse, usando o comando de determinação de áreas presente na ferramenta, situações com triângulos não retângulos. Ressalta-se que nesta fase não se pretendia a formalização da lei dos cossenos.

Ao abrir o arquivo "Colorir", as duplas encontraram uma construção geométrica no *GeoGebra*, conforme apresentado no Capítulo 4. Elas calcularam a área de cada retângulo, originado da divisão do quadrado construído sobre cada lado do triângulo e, em seguida, pintaram de mesma cor os retângulos de áreas iguais.

Os alunos manipularam um vértice do triângulo e constataram que os retângulos de mesma cor continuavam com áreas iguais. Em seguida eles manipularam os outros vértices e constataram que o observado independia do vértice manipulado.

Com relação ao questionamento dessa situação, referente à análise das áreas após a manipulação dos vértices, as duplas forneceram as produções presentes na figura 69.



TAREFA 2 – Manipule qualquer vértice do triângulo e verifique se os retângulos de mesma cor continuam com a mesma área.

Continuam

TAREFA 2 – Manipule qualquer vértice do triângulo e verifique se os retângulos de mesma cor continuam com a mesma área.

Quando movimentado qualquer vértice do triângulo, os retângulos de mesma cor continuam com suas áreas iguais.

TAREFA 2 – Manipule qualquer vértice do triângulo e verifique se os retângulos de mesma cor continuam com a mesma área.

As áreas continuam iguais

Figura 69 - Produções das Duplas A, B e C, respectivamente – Atividade 4 – Tarefa 2
Fonte: Acervo pessoal

A constatação de que os retângulos de mesma cor continuavam com áreas iguais, independente do vértice manipulado, só foi possível pelo dinamismo que o *software GeoGebra* proporciona. Neto (2010) destacou que a possibilidade de trabalhar num ambiente de aprendizagem como o *GeoGebra*, é trabalhar com uma perspectiva que incorpora a produção e a reelaboração de conhecimentos, permitindo aos sujeitos da pesquisa assumir papéis menos passivos na busca por novos conhecimentos matemáticos. A experimentação e a visualização são possíveis dentro dos ambientes computacionais, sendo, portanto, fundamentais para a aplicação de atividades como a Atividade 4 proposta nesta pesquisa.

Já familiarizados com o *software* e o instrumento de ensino disponibilizados, cada dupla personalizou a sua atividade, selecionando as cores desejadas para pintar os contornos dos quadrados ABDE, BCGF e ACHI, conforme solicitado na Tarefa 3. As produções das três duplas para essa tarefa são apresentadas nas figuras 70, 71 e 72.

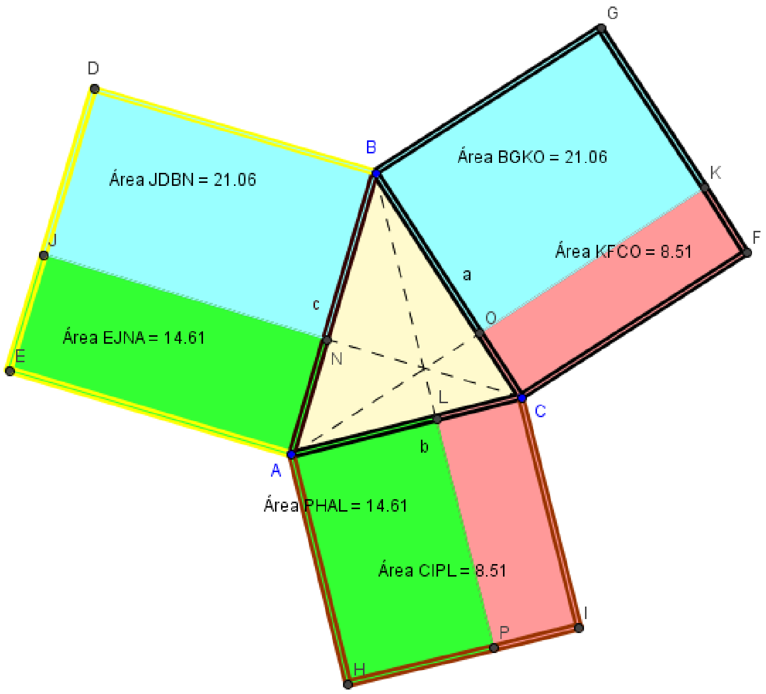


Figura 70 - Produção da Dupla A – Atividade 4 – Tarefas 1 e 3.
Fonte: Acervo pessoal

Figura 71 - Produção da Dupla B – Atividade 4 – Tarefas 1 e 3.
Fonte: Acervo pessoal

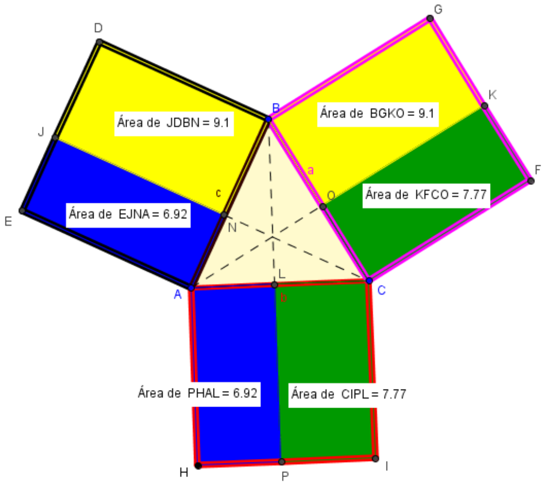


Figura 72 – Produção da Dupla C – Atividade 4 – Tarefas 1 e 3.
Fonte: Acervo pessoal

Com a atividade já personalizada no *software*, cada dupla foi motivada a prosseguir com a situação no ambiente papel e lápis. Neste ambiente foram propostas às duplas duas tarefas. A primeira, Tarefa 3, solicitava de cada dupla que pintasse com cores diferentes os contornos dos quadrados ABDE, BCGF e ACHI. Em seguida cada dupla completaria a Tarefa 4 de acordo com as orientações fornecidas pela professora-pesquisadora.

Cada dupla interpretou de forma diferente as atividades propostas e tal fato nos fez refletir sobre a construção dessa etapa do *design*. Nas figuras 73, 74, e 75, podemos observar que o objetivo da Atividade 4 não foi alcançado.

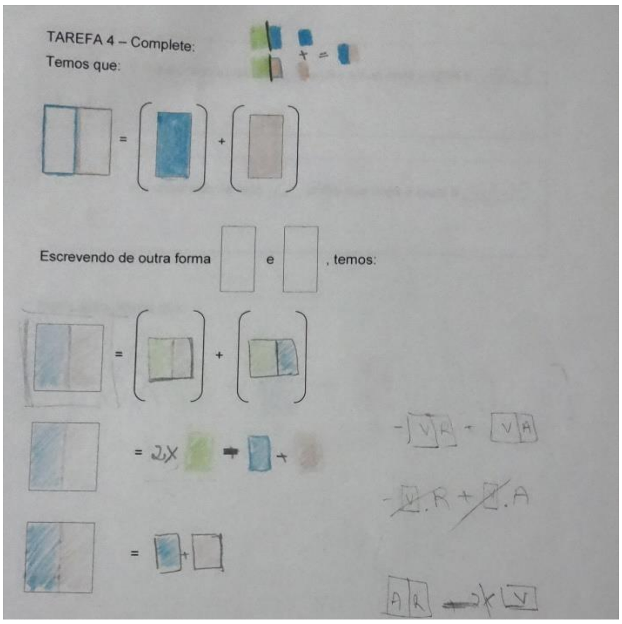


Figura 73 - Produção da Dupla A – Atividade 4 – Tarefa 4 – Parte 1 e 2
Fonte: Acervo pessoal

A dupla B apresentou dificuldades na resolução da Tarefa 4 da Atividade 4, uma vez que não preencheu todas as situações solicitadas, conforme podemos constatar na figura 74.

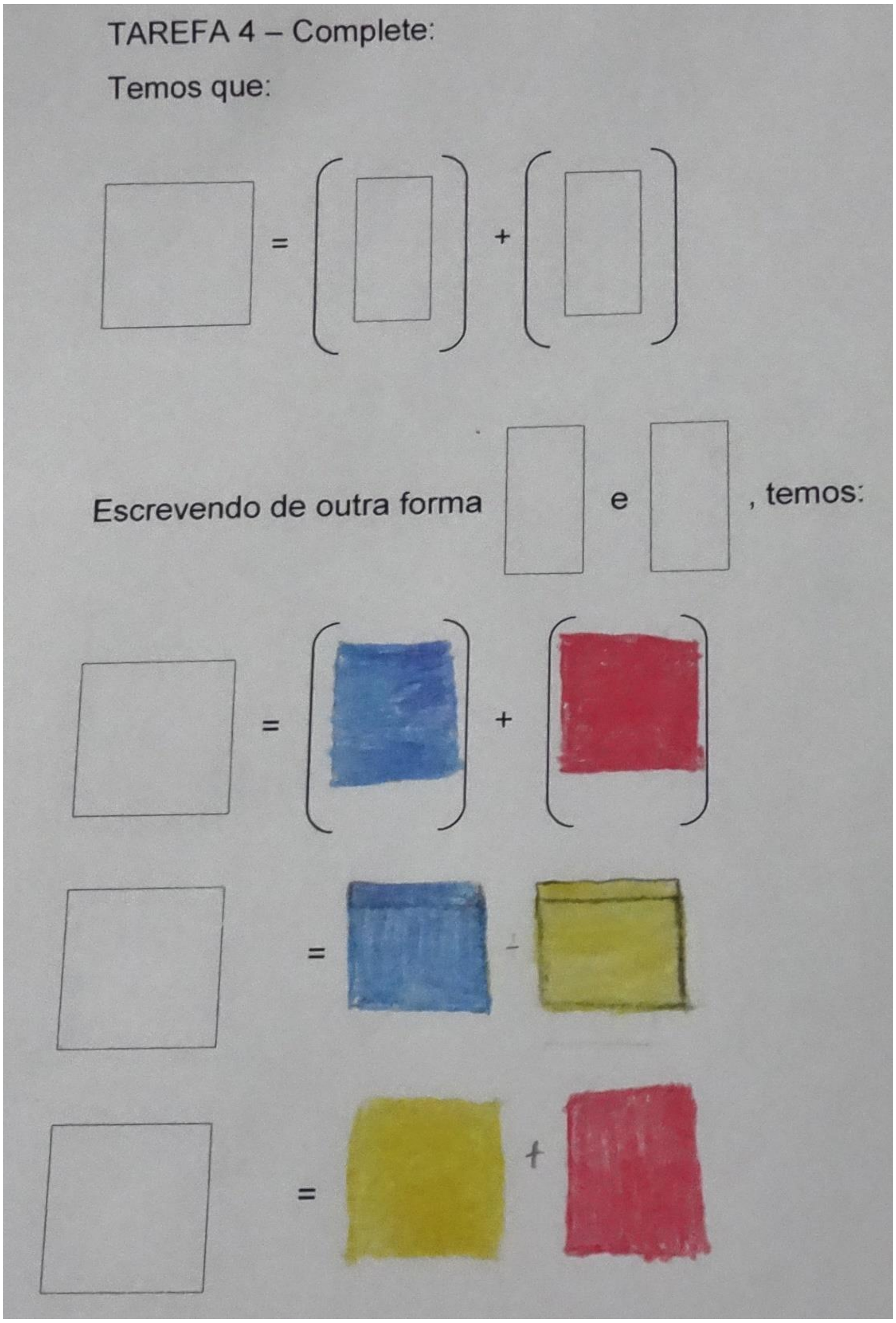


Figura 74 – Produção da Dupla B – Atividade 4 – Tarefa 4 – Partes 1 e 2
Fonte: Acervo pessoal

Na figura 75, apresentamos a produção da dupla C.

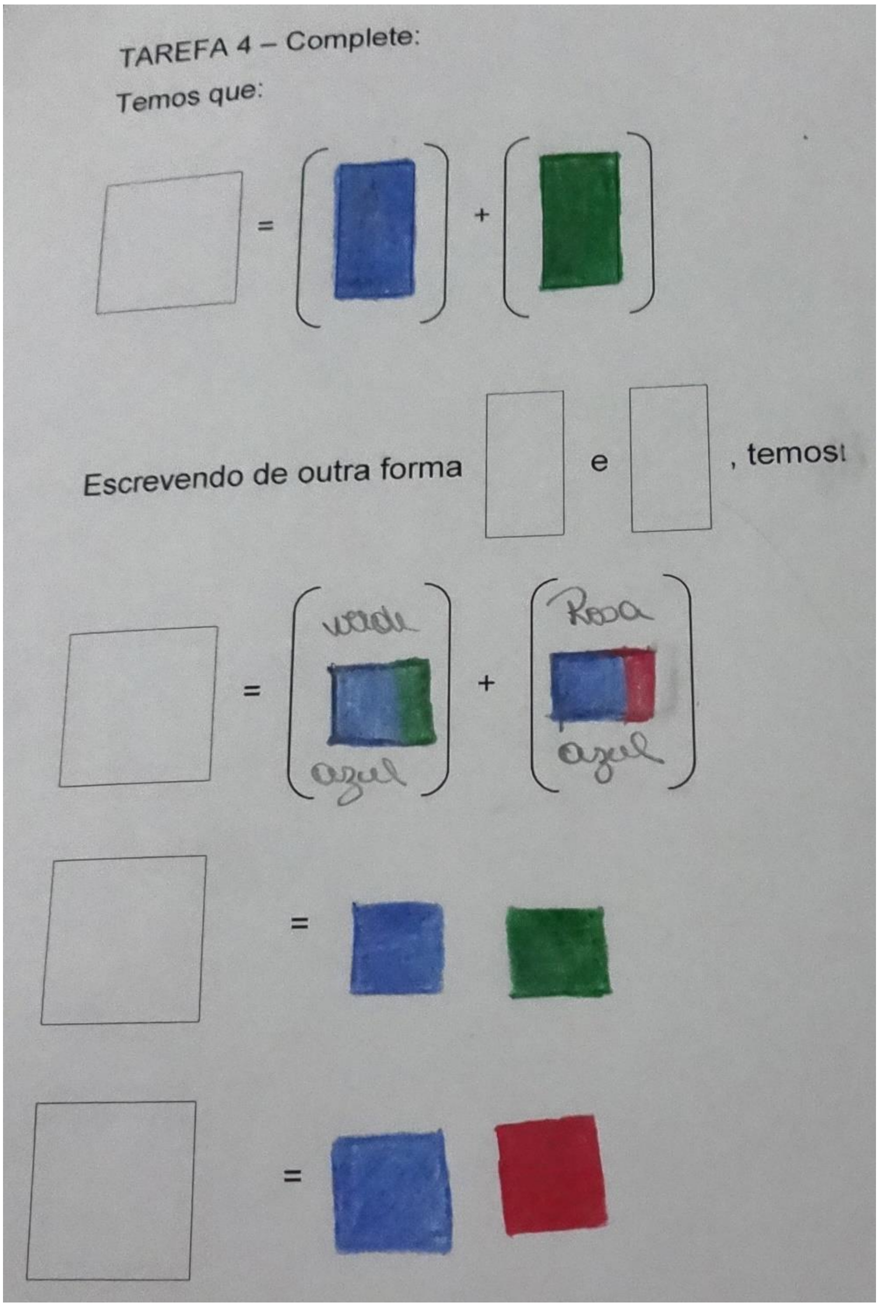
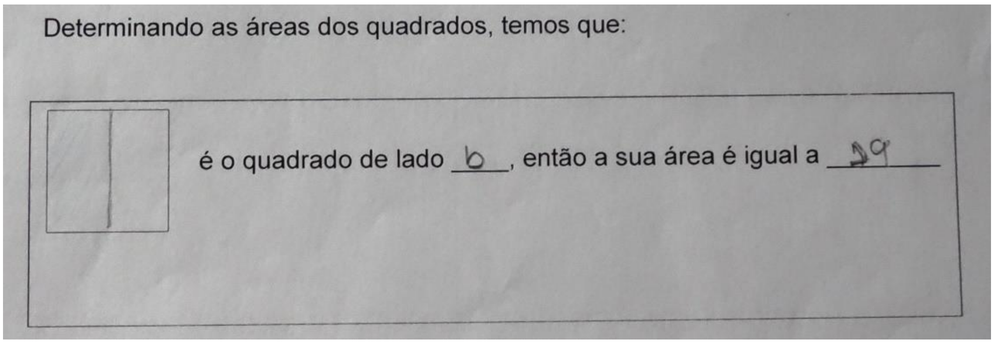


Figura 75 - Produção da Dupla C – Atividade 4 – Tarefa 4 – Partes 1 e 2
Fonte: Acervo pessoal

Assim como Bastian (2000), contatamos que as duplas não encontraram congruência entre o enunciado dado na língua natural e a representação figural solicitada.

Com relação ao questionamento da área dos quadrados, esperávamos que as duplas observassem os dados na forma genérica. Por exemplo, esperávamos que elas registrassem que a área do quadrado de lado “a” seria igual a^2, mas notamos que elas tomaram o valor numérico da área presente no *software*. Na figura 76, apresentamos uma das resoluções que mostram como as duplas interpretaram essa tarefa.


Determinando as áreas dos quadrados, temos que:

é o quadrado de lado b, então a sua área é igual a 29

Figura 76 – Produção da Dupla A – Atividade 4 – Tarefa 4 – Parte 3
Fonte: Acervo pessoal

Esperávamos que os alunos se desvinculassem do *software* para resolver essa parte da atividade. Gravina (1999) *apud* Aguiar (2011) enfatiza que as ferramentas computacionais por si só não garantem a aprendizagem, ou mesmo mudanças significativas, portanto, torna-se importante refletir sobre a forma como a tecnologia é introduzida nos processos de ensino e aprendizagem.

As demais duplas utilizaram o mesmo tipo de raciocínio, diferenciando apenas o valor da área, dado que cada dupla manipulou o vértice de forma diferente. Para os quadrados de lado “a” e lado “c”, as duplas utilizaram o mesmo critério.

Por acharem a atividade cansativa, pelo fato de terem que repetir as mesmas pinturas em mais de uma figura, as duplas não pintaram os quadrados com as cores que estabeleceram. Elas apenas localizaram a variável correspondente a cada um dos quadrados e observaram na tela a área já calculada.

O objetivo dessa atividade era que cada dupla concluísse que $b^2 = a^2 + c^2$ – 2 vezes “a área do retângulo da tela do computador”, observando que o teorema de Pitágoras não era viável nessa situação. Em seguida, esperávamos que, após uma revisão das relações trigonométricas no triângulo retângulo, os estudantes calculassem a área do retângulo da tela do computador.

Dado que desde o início da atividade houve problemas de interpretação, essa conclusão não foi obtida pelas duplas, conforme apresentado a seguir.

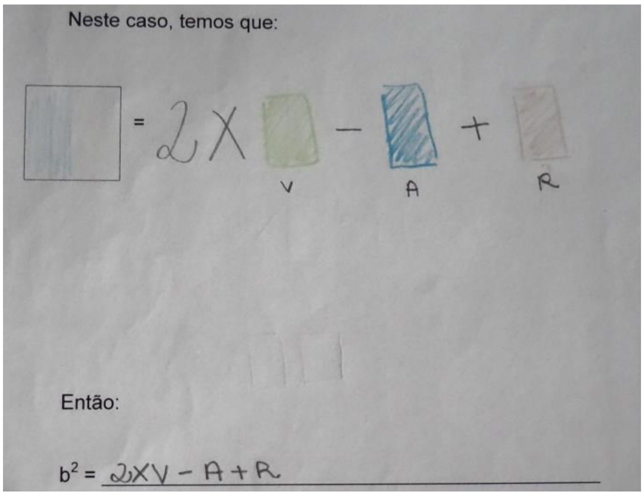


Figura 77 – Produção da Dupla A – Atividade 4 – Tarefa 4 – Parte 1
Fonte: Acervo pessoal

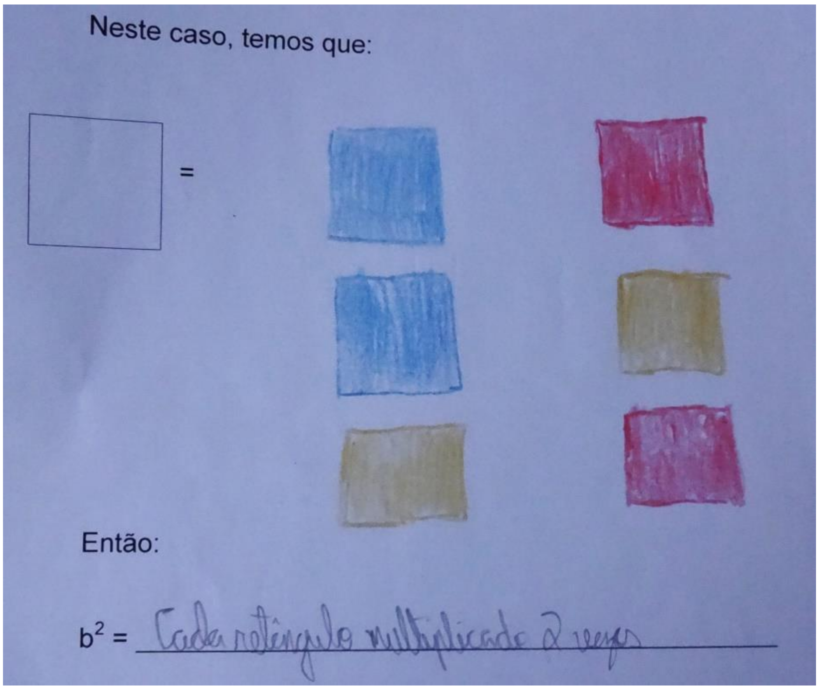


Figura 78 - Produção da Dupla B – Atividade 4 – Tarefa 4 – Parte 2
Fonte: Acervo pessoal

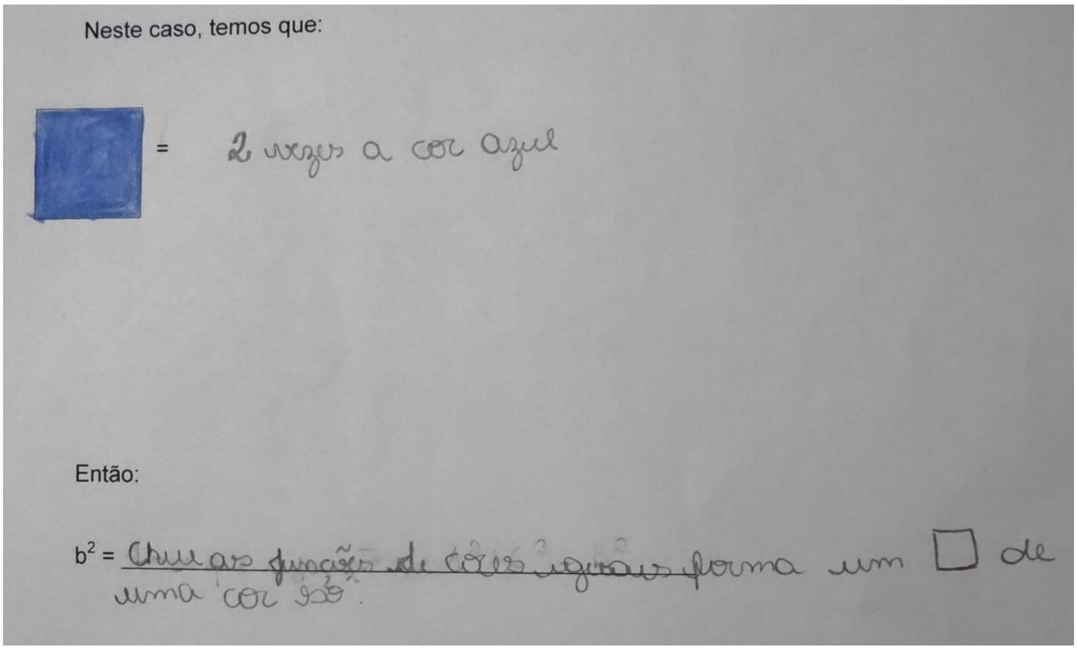


Figura 79 – Produção da Dupla C – Atividade 4 – Tarefa 4 – Parte 3
Fonte: Acervo pessoal

Na realização da Atividade 4, as duplas tiveram dificuldades em interpretar a proposta e em relacionar o algébrico com o figural. Verificamos que os alunos conseguiram construir, no registro figural, a primeira parte da lei de acordo com o objetivo da atividade que lhes foi proposta. Apesar disso, não conseguiram determinar a lei algébrica no ambiente papel e lápis, ou seja, notamos que, quando questionados, eles conseguiam explicar a situação presente na tela do computador, mas não conseguiam transcrever a relação $b^2 = a^2 + c^2$ – 2 vezes “a área do retângulo" no ambiente papel e lápis.

Duval (2003, 2009, 2011) ressalta a importância de propor aos estudantes situações que envolvam relações entre registros mono e multifuncionais. Por esse motivo, procuramos explorar conversões entre os registros algébrico e figural. Provavelmente o fato de os alunos desconhecerem a correspondência entre esses registros tenha inibido a construção da primeira parte da lei no registro algébrico, visto que eles estão acostumados, na maioria das vezes, apenas com situações de tratamentos com representações do registro algébrico.

Portanto, dada a dificuldade apresentada pelas duplas, a professora-pesquisadora procurou compreender cada produção e acabou por avaliar a elaboração dessa fase do experimento. Notou como falha que nenhum dos quadrados expostos estava com seus vértices nomeados e que a atividade ficou extensa e cansativa. O texto das tarefas provavelmente não estava claro, considerando as produções fornecidas pelos estudantes.

Tal fato indicou a necessidade de um *redesign* desta atividade. Para obter críticas sobre o texto original da atividade 4, a professora-pesquisadora optou por solicitar a opinião de alunos de outras séries acerca da atividade proposta. Participaram dessa pesquisa paralela alunos da segunda série do Ensino Médio da mesma escola, que não haviam tido acesso a essa pesquisa.

Esses alunos foram unânimes em mencionar a dificuldade de interpretação da atividade, sugeriram mudanças textuais e comentaram que as indicações dos vértices dos quadrados ajudariam na visualização.

Partindo dessas contribuições, a atividade foi reformulada. Foram apresentadas às duplas novas imagens com os vértices de cada quadrado nomeados e foram inseridas setas norteadoras para favorecer o estabelecimento das relações solicitadas.

Aplicando essa atividade reformulada para as duplas, observamos que todas construíram a relação esperada para essa fase. A seguir, nas figuras 80 e 81, apresentamos as produções da dupla A.

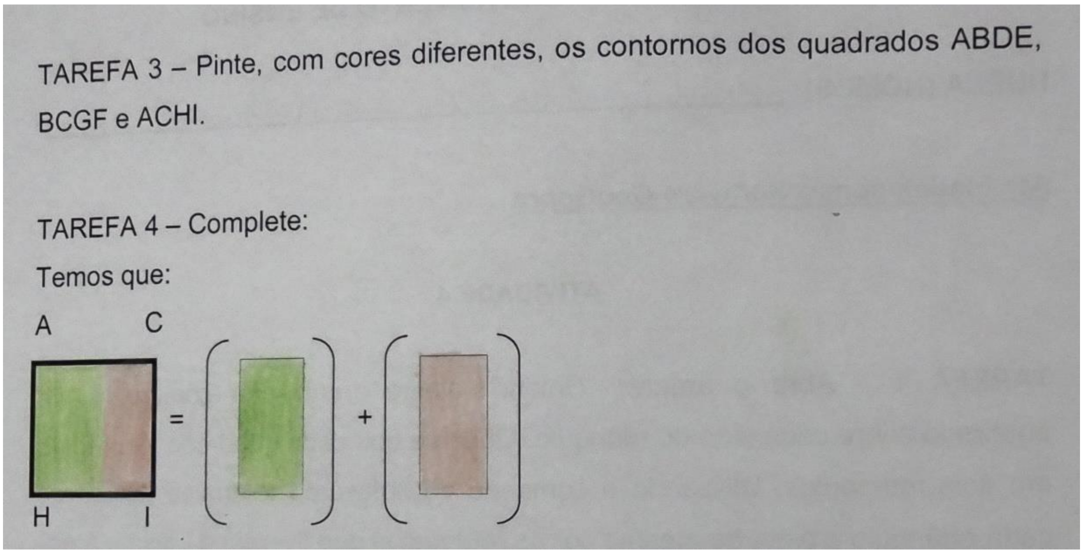


Figura 80 - Produção da Dupla A – Atividade 4 – Tarefa 4 – Parte 1 do *redesign*
Fonte: Acervo pessoal

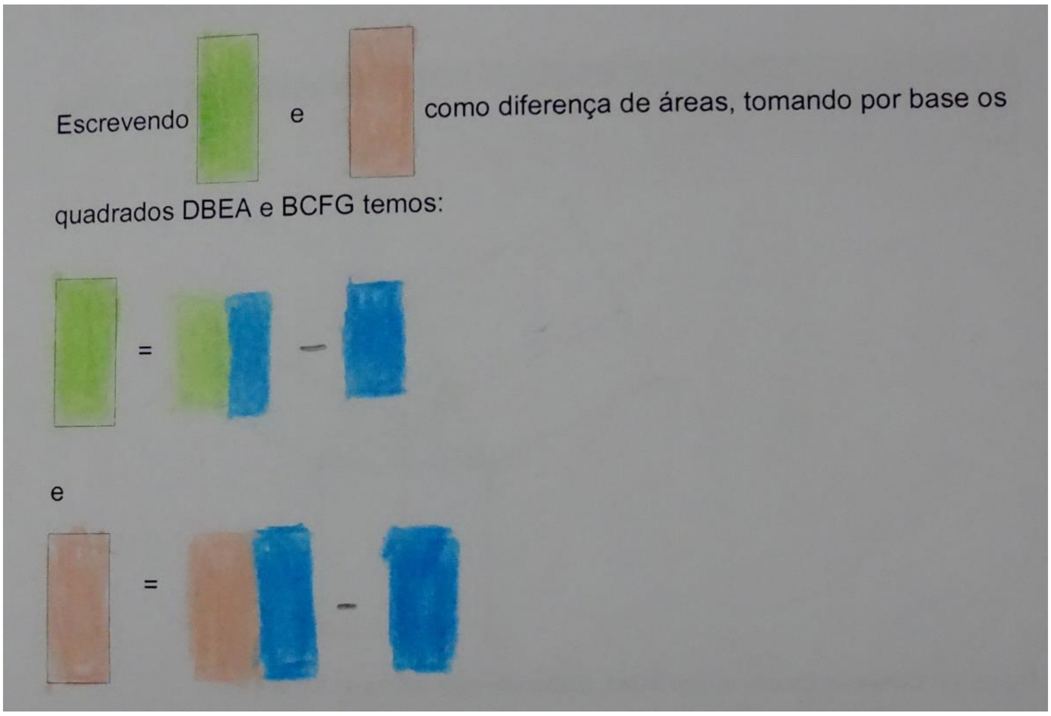


Figura 81 – Produção da Dupla A – Atividade 4 – Tarefa 4 – Parte 2 do *redesign*
Fonte: Acervo pessoal

Na sequência a dupla retomou a igualdade anterior, substituindo os retângulos anteriores pelas novas relações encontradas, conforme figuras 82 e 83.

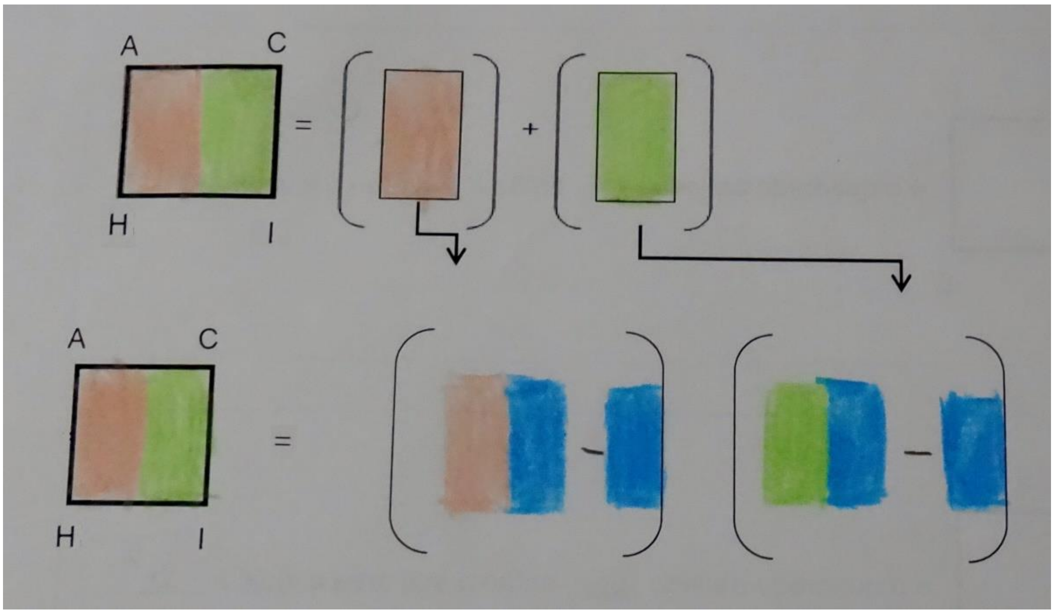


Figura 82 – Produção da Dupla A – Atividade 4 – Tarefa 4 – Parte 3 do *redesign*
Fonte: Acervo pessoal

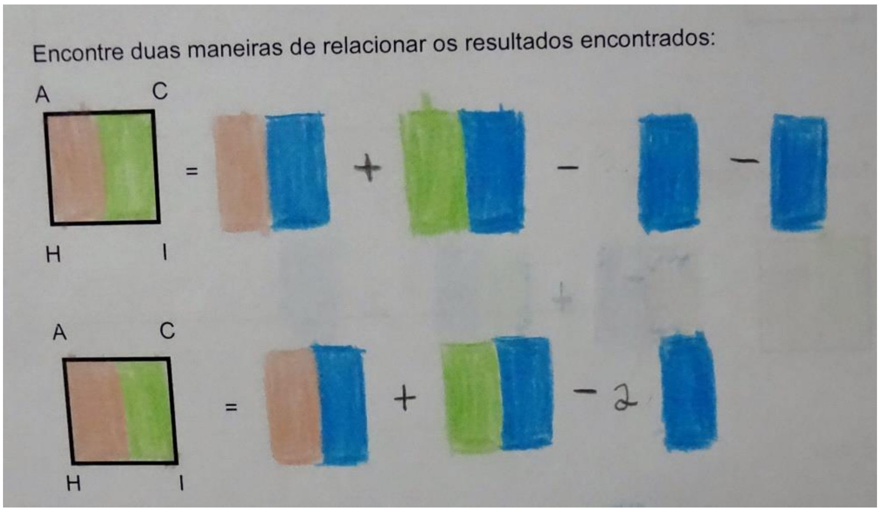


Figura 83 – Produção da Dupla A – Atividade 4 – Parte 4 do *redesign*
Fonte: Acervo Pessoal

Retomando o cálculo algébrico das áreas, as Duplas A, B e C determinaram que a área do quadrado de lado a é a^2, que a área do quadrado de lado b é b^2 e que a área do quadrado de lado c é c^2. Como a parte 5 da atividade 4 era comum a todas as duplas, optamos por apresentar apenas a resolução da Dupla A, uma vez que ela é semelhante à produção das demais duplas.

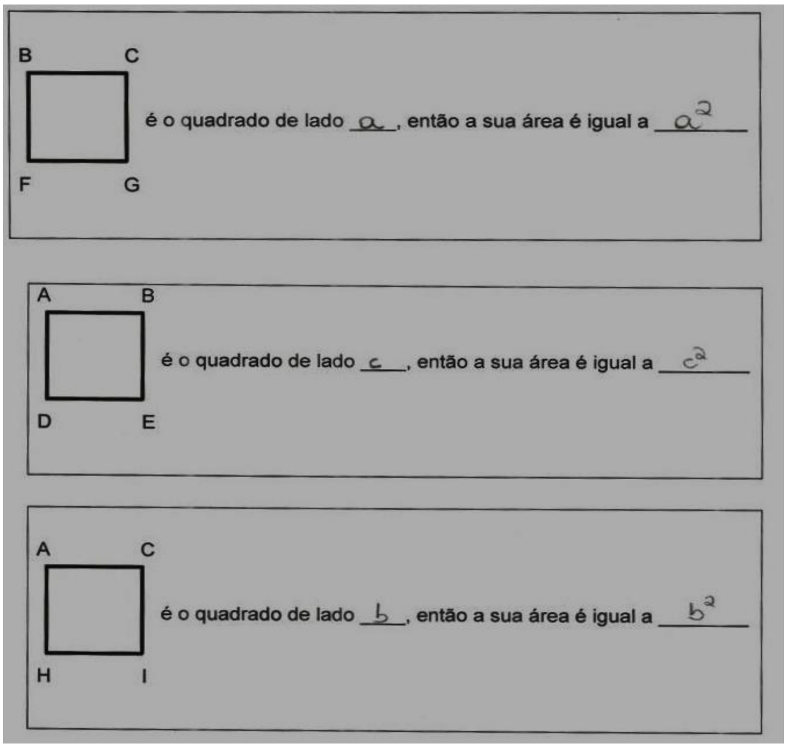


Figura 84 - Produção da Dupla A – Atividade 4 – Parte 5 do *redesign*
Fonte: Acervo pessoal

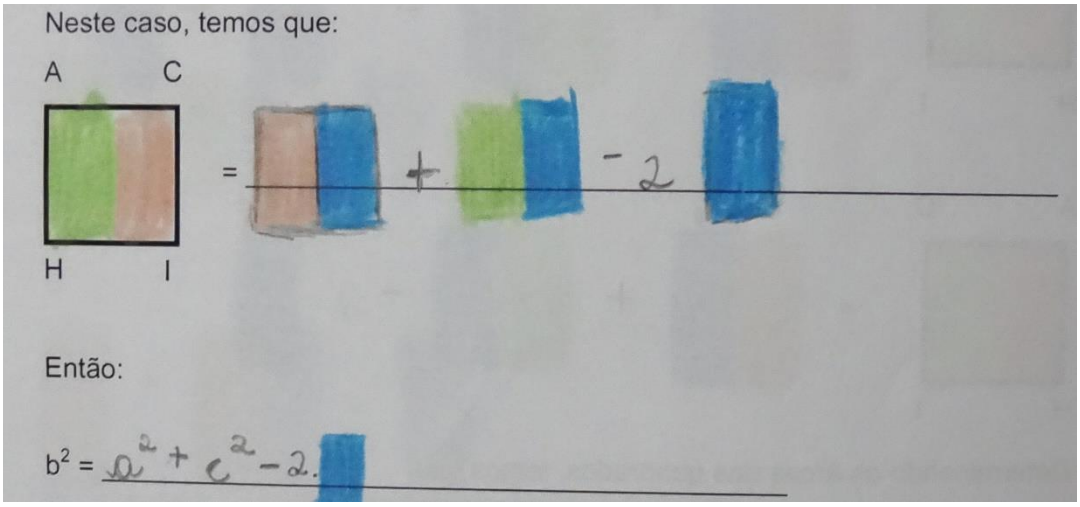


Figura 85 - Produção da Dupla A – Atividade 4 – Parte 6 do *redesign*
Fonte: Acervo Pessoal

Salientamos que dois alunos voluntários, por motivos pessoais, faltaram nesse encontro. Com isso, uma dupla foi reorganizada, com um integrante da Dupla B e outro da Dupla C, justificando a apresentação de apenas uma resolução para as duas duplas nessa fase.

Pela produção da dupla A, podemos observar que os alunos se apoiaram em dois registros, o figural e o algébrico. Tal fato ilustra a afirmação de Duval (2003) a respeito da importância de integrar diferentes registros na construção de um objeto matemático. A partir dessa atividade de experimentação, os alunos estabeleceram as relações e discutiram as novas possibilidades para concluírem suas observações no ambiente papel e lápis.

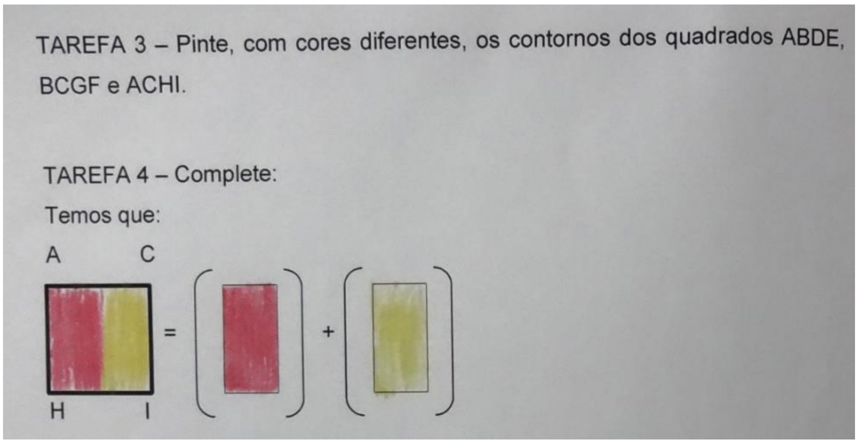


Figura 86 – Produção dos estudantes das Duplas B e C – Atividade 4 – Tarefa 4 – Parte 1 do *redesign*
Fonte: Acervo pessoal

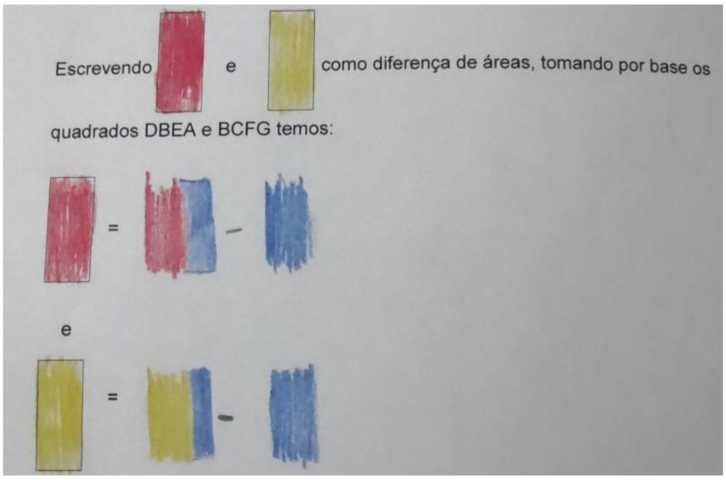


Figura 87 - Produção da Dupla A – Atividade 4 – Tarefa 4 – Parte 2 do *redesign*
Fonte: Acervo pessoal

Na sequência a dupla retomou a igualdade anterior, substituindo os retângulos anteriores pelas novas relações encontradas, conforme figuras 88, 89 e 90.

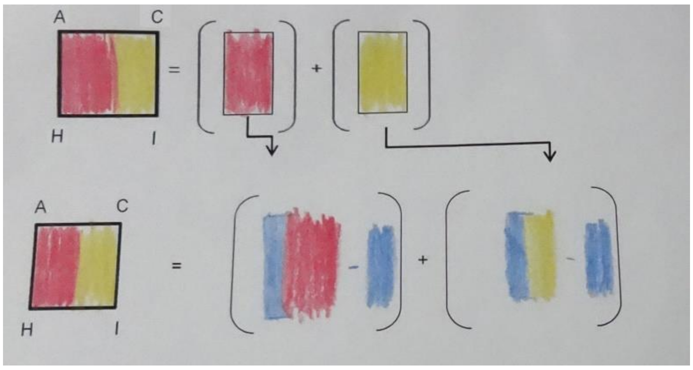


Figura 88 - Produção dos estudantes das Duplas B e C – Atividade 4 – Tarefa 4 – Parte 3 do *redesign*
Fonte: Acervo Pessoal

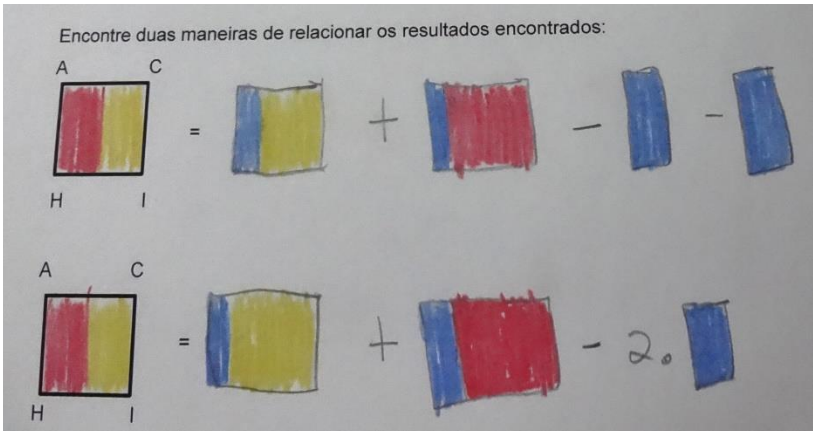


Figura 89 – Produção dos estudantes das Duplas B e C – Atividade 4 – Tarefa 4 – Parte 4 do *redesign*
Fonte: Acervo Pessoal

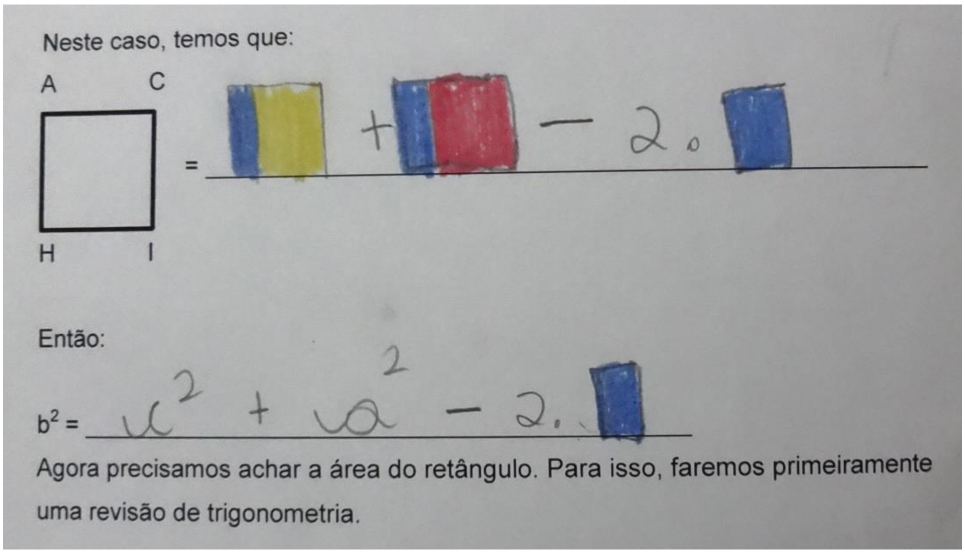


Figura 90 - Produção dos estudantes das Duplas B e C – Atividade 4 – Tarefa 4 – Parte 5 do *redesign*
Fonte: Acervo Pessoal

A atividade anterior foi realizada em duas etapas, dada a necessidade de *redesign*.

Salientamos que, da mesma forma que Procópio (2011), a utilização de um *software* de geometria dinâmica favoreceu a autonomia de nossos sujeitos e permitiu a visualização, construção, manipulação dinâmica, experimentação, intervenção e formalização de conceitos.

Neto (2010) também observou que a utilização de ferramentas computacionais é necessária em atividades como esta, pois serve como forma de mediar e reorganizar processos de criação, busca de armazenamento de informação e estabelecimento de relações humanas, tornando-se uma ferramenta que não só auxilia, mas que transforma a atividade.

De acordo com Duval (2003, 2009, 2011), ao realizar a conversão entre o figural e o algébrico, a transformação realizada só mudou o sistema de representação, mas manteve referências ao mesmo objeto. O autor destaca que tratar um objeto matemático por meio de diferentes registros amplia o grau de liberdade que um sujeito pode dispor para compreender esse objeto

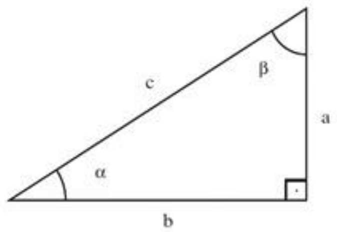
As duplas, ao realizarem de forma coordenada as conversões entre o registro figural e o algébrico, conseguiram estabelecer as relações por nós almejadas, dando continuidade aos trabalhos propostos pela professora-pesquisadora.

Para que pudéssemos dar sequência às nossas atividades e para que os estudantes tivessem condições de determinar a área do “retângulo que sobra”, conforme denominado por eles, revisamos as relações trigonométricas no triângulo retângulo, conteúdo ministrado no ano anterior (nono ano).

Apresentamos na figura 91, a primeira parte da revisão que a professora-pesquisadora realizou com os estudantes.

ATIVIDADE 5 – PARTE 1

Tarefa 1 – Considere o triângulo abaixo:



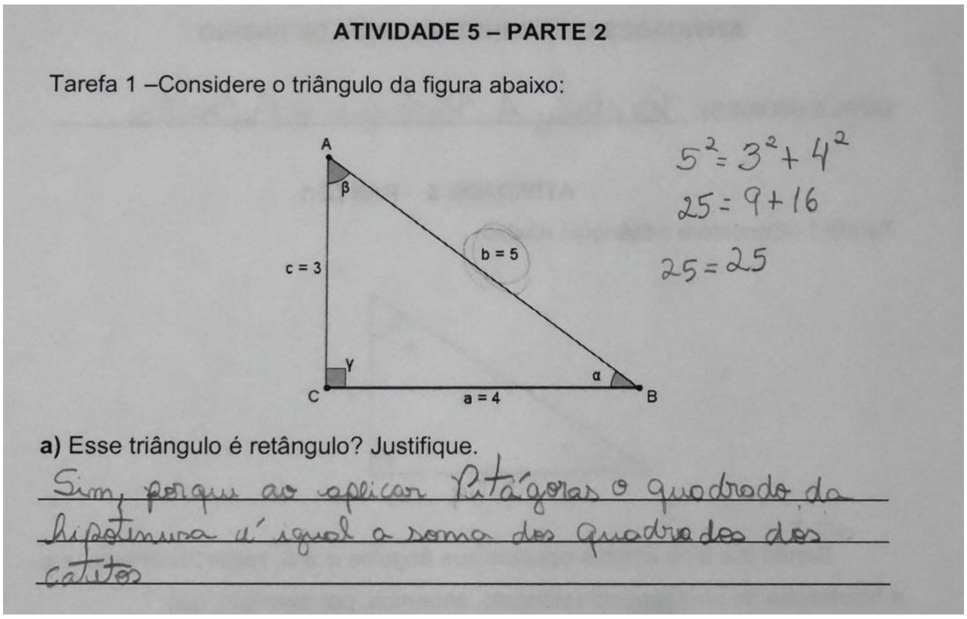
Sendo **a** e **b** os catetos opostos aos ângulos α e β, respectivamente, e **c** a hipotenusa de um triângulo retângulo, sabemos, por exemplo, que:

$c^2 = a^2 + b^2$ (Teorema de Pitágoras)	
sen $\alpha = \frac{a}{c}$, ou seja, a = c. senα;	sen $\beta = \frac{b}{c}$, ou seja, b = c.senβ;
cos $\alpha = \frac{b}{c}$, ou seja, b = c.cosα;	cos $\beta = \frac{a}{c}$, ou seja, a = c.cosβ;
tg $\alpha = \frac{a}{b}$, ou seja, a = b.tgα;	tg$\beta = \frac{b}{a}$, ou seja, b = a.tgβ.

Figura 91 - Atividade 5 – Parte 1 – Revisão
Fonte: Acervo Pessoal

Essa atividade foi trabalhada coletivamente, com o auxílio da lousa, giz, papel e lápis. As duplas acompanharam a explanação da professora-pesquisadora acerca do conteúdo ministrado, esclarecendo dúvidas e relembrando das aulas que tiveram no decorrer do nono ano do Ensino Fundamental.

Após a revisão, foi aplicada a Atividade 5 – Parte 2, para que pudéssemos investigar a compreensão dos alunos a respeito dessa revisão, conforme apresentado nas figuras 92, 93, 94 e 95.

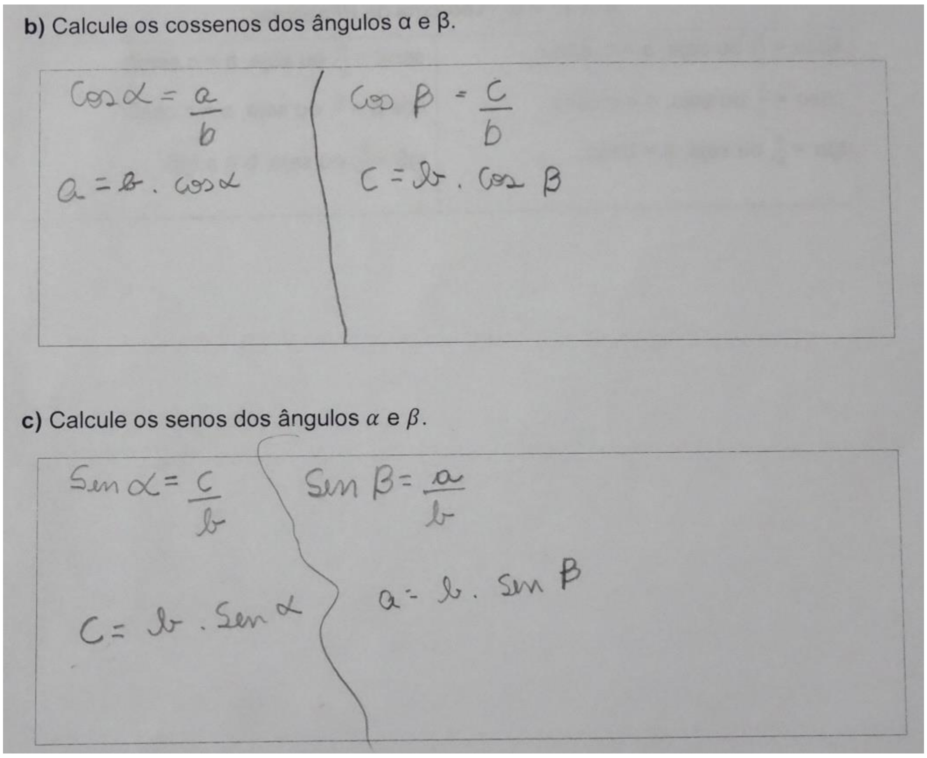

ATIVIDADE 5 – PARTE 2

Tarefa 1 –Considere o triângulo da figura abaixo:

a) Esse triângulo é retângulo? Justifique.

Sim, porque ao aplicar Pitágoras o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos

Figura 92 - Produção da Dupla A – Atividade 5 – Parte 2 – Tarefa 1 – item a.
Fonte: Acervo Pessoal


b) Calcule os cossenos dos ângulos α e β.

$\cos\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad$ $\cos\beta = \frac{c}{b}$

$a = b \cdot \cos\alpha$ $\quad$ $c = b \cdot \cos\beta$

c) Calcule os senos dos ângulos α e β.

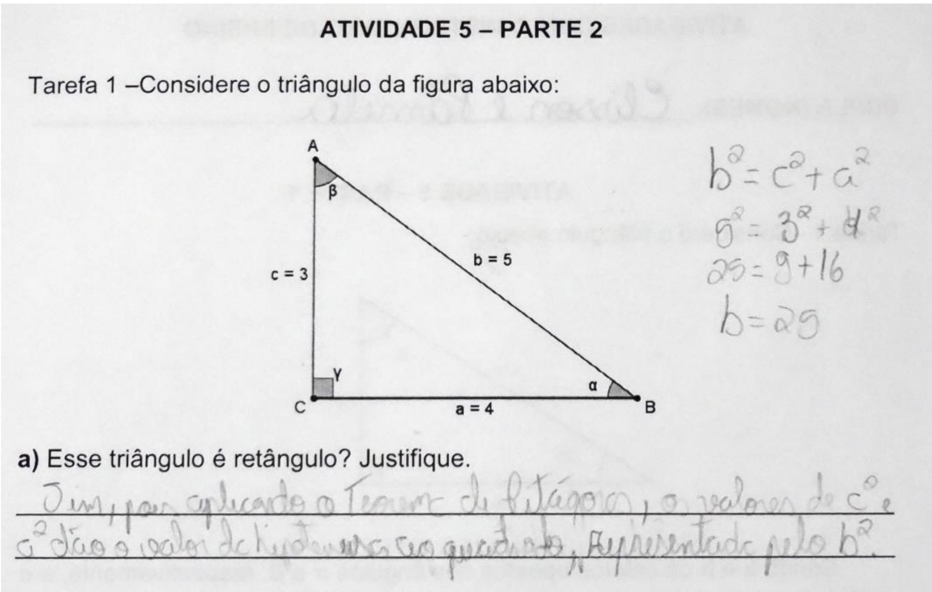
$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{b}$ $\quad$ $\operatorname{sen}\beta = \frac{a}{b}$

$c = b \cdot \operatorname{sen}\alpha$ $\quad$ $a = b \cdot \operatorname{sen}\beta$

Figura 93 - Produção da Dupla A – Atividade 5 - Parte 2 – Tarefa 1 – itens b e c.
Fonte: Acervo Pessoal

Fortes (2012) destacou que os erros mais frequentes estavam relacionados ao fato de os estudantes não reconhecerem os elementos de um triângulo retângulo, desconhecerem conceitos básicos como cateto e ângulo e na identificação de qual relação trigonométrica relacionava o cateto oposto e o cateto adjacente do triângulo retângulo. Salientamos que essas dificuldades não ocorreram em nossa pesquisa, uma vez que os estudantes identificaram os elementos do triângulo retângulo e estabeleceram as relações trigonométricas esperadas.

A seguir apresentamos a produção dos estudantes das Duplas B e C.



ATIVIDADE 5 – PARTE 2

Tarefa 1 –Considere o triângulo da figura abaixo:

$b^2 = c^2 + a^2$

$5^2 = 3^2 + 4^2$

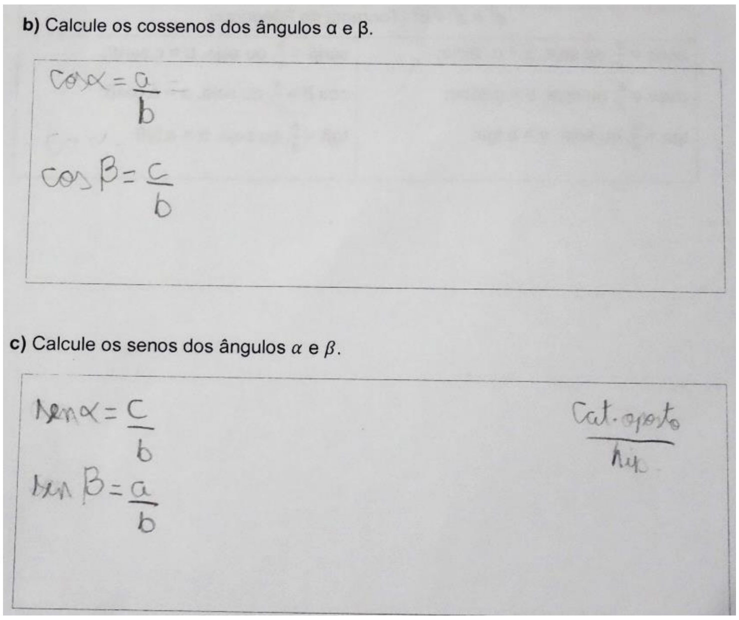
$25 = 9 + 16$

$b = 25$

a) Esse triângulo é retângulo? Justifique.

Sim, pois aplicando o Teorema de Pitágoras, os valores de c^2 e a^2 dão o valor da hipotenusa ao quadrado, representado pelo b^2.

Figura 94 – Produção dos estudantes das Duplas B e C–Atividade 5–Parte 2 – Tarefa 1-item a.
Fonte: Acervo Pessoal



b) Calcule os cossenos dos ângulos α e β.

$\cos\alpha = \frac{a}{b}$

$\cos\beta = \frac{c}{b}$

c) Calcule os senos dos ângulos α e β.

$\text{sen}\,\alpha = \frac{c}{b}$

$\text{sen}\,\beta = \frac{a}{b}$

$\frac{\text{Cat. oposto}}{\text{hip}}$

Figura 95 - Produção dos estudantes das Duplas B e C–Atividade 5-Parte 2–Tarefa 1 – itens b e c.
Fonte: Acervo Pessoal

Constatamos que as duplas conseguiram realizar as atividades de revisão Após essa revisão, cada dupla retomou a conclusão da Atividade 4.

Ressaltamos que os alunos novamente utilizaram o ambiente dinâmico, explorando a figura que coloriram e que calcularam a área na atividade 4. Para relembrarmos as produções de cada dupla, apresentamos suas resoluções nas figuras 96 e 97.

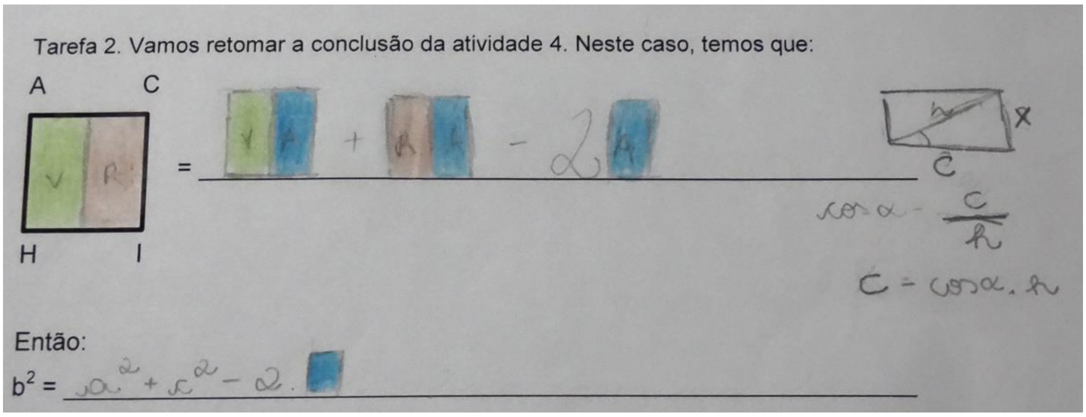


Figura 96 - Produção da Dupla A – Atividade 6 – Tarefa 2.
Fonte: Acervo Pessoal

Ressaltamos que a dupla incluiu algumas anotações ao lado referentes à tarefa seguinte.

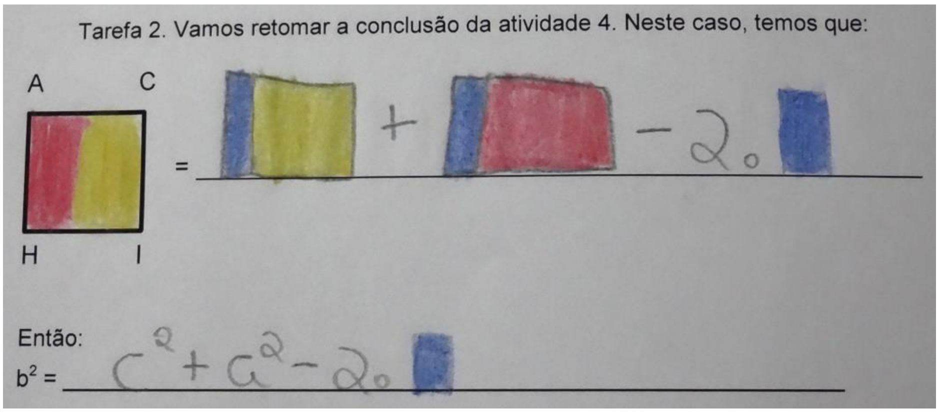


Figura 97 – Produção da Dupla B e C – Atividade 6 – Tarefa 2.
Fonte: Acervo Pessoal

Retomadas as conclusões de cada dupla, a professora-pesquisadora solicitou que cada uma prosseguisse na tarefa seguinte da Atividade 6, com o objetivo de calcular a área do “retângulo que sobra”, construindo, assim, a lei dos cossenos, mas a atividade não atingiu o objetivo previsto, conforme ilustram as imagens 98 e 99.

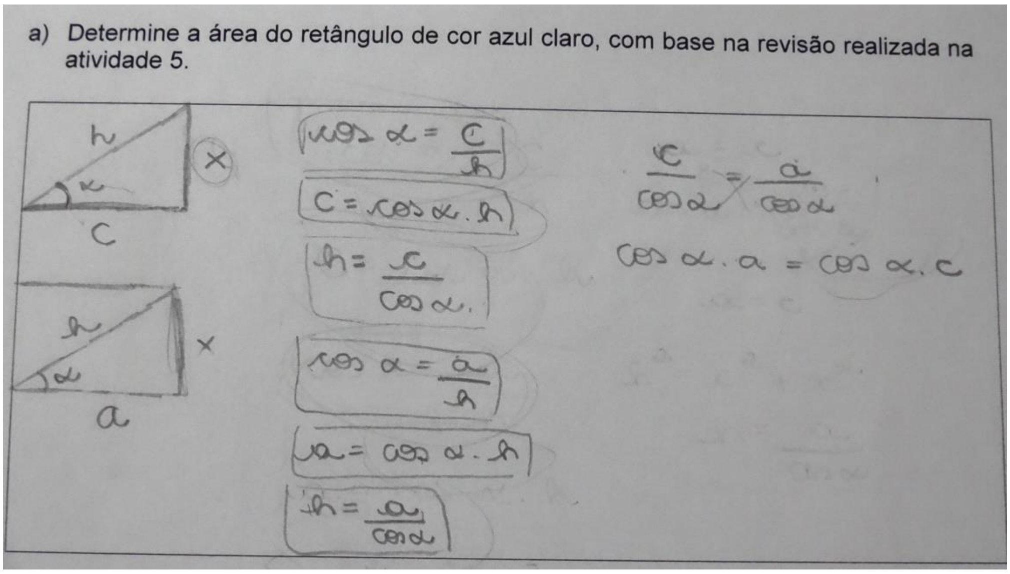
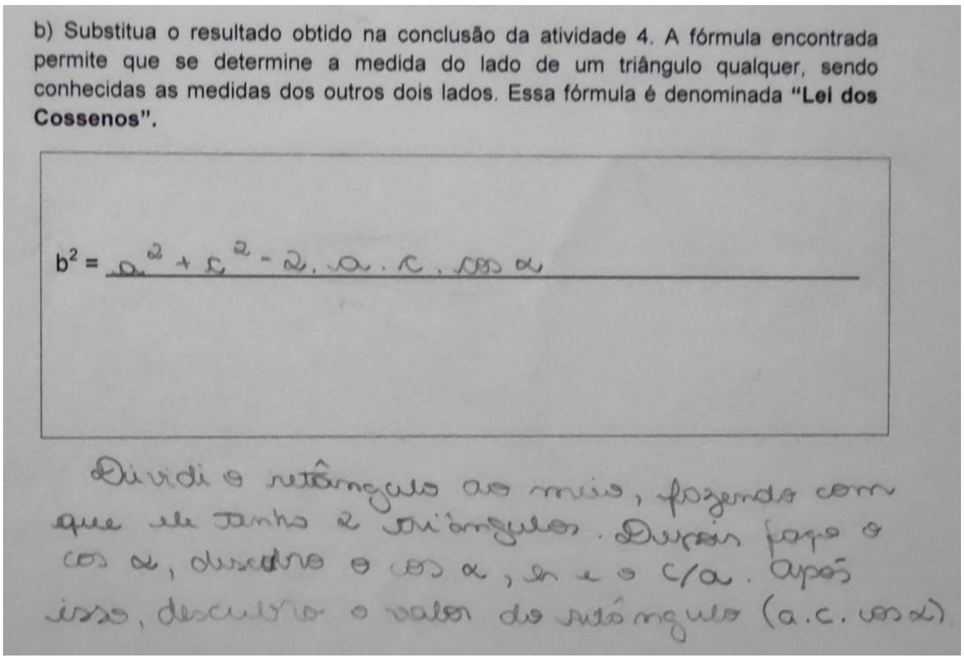

a) Determine a área do retângulo de cor azul claro, com base na revisão realizada na atividade 5.

Figura 98 – Produção da Dupla A – Atividade 6 – Tarefa 2 – item a.
Fonte: Acervo Pessoal

A professora-pesquisadora, no momento da aplicação, não compreendendo as relações que a Dupla A apresentou, questionou-a e pediu para que anotasse suas conclusões.


b) Substitua o resultado obtido na conclusão da atividade 4. A fórmula encontrada permite que se determine a medida do lado de um triângulo qualquer, sendo conhecidas as medidas dos outros dois lados. Essa fórmula é denominada **"Lei dos Cossenos".**

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 . a . c . \cos\alpha$

Dividi o retângulo ao meio, fazendo com que ele tenha 2 triângulos. Depois faço o cos α, descubro o cos α, h e o c/a. Após isso, descubro o valor do retângulo (a.c. cos α)

Figura 99 – Produção da Dupla A – Atividade 6 – Tarefa 2 item b.
Fonte: Acervo Pessoal

A Dupla A aplicou corretamente a relação trigonométrica, ao identificar o cosseno do ângulo, mas não obteve elementos que lhe permitissem continuar a solução. Analisando a produção dessa dupla, notamos que ela concebeu o “retângulo que sobra” como dois triângulos retângulos, uma vez que traçou a diagonal em cada retângulo e em seguida calculou o cosseno do ângulo α. Após esse cálculo, como as áreas na tela do computador eram iguais, a dupla igualou os resultados que encontrou, mas não compreendeu que não podia estabelecer tal igualdade. É provável que, na ocasião, a dupla não tenha encontrado significado para o objeto matemático proposto, levando-a a realização de cálculos de forma mecânica.

Os estudantes das Duplas B e C apresentaram uma produção confusa e apagaram diversas vezes a resolução, conforme apresentado nas figuras 100 e 101.

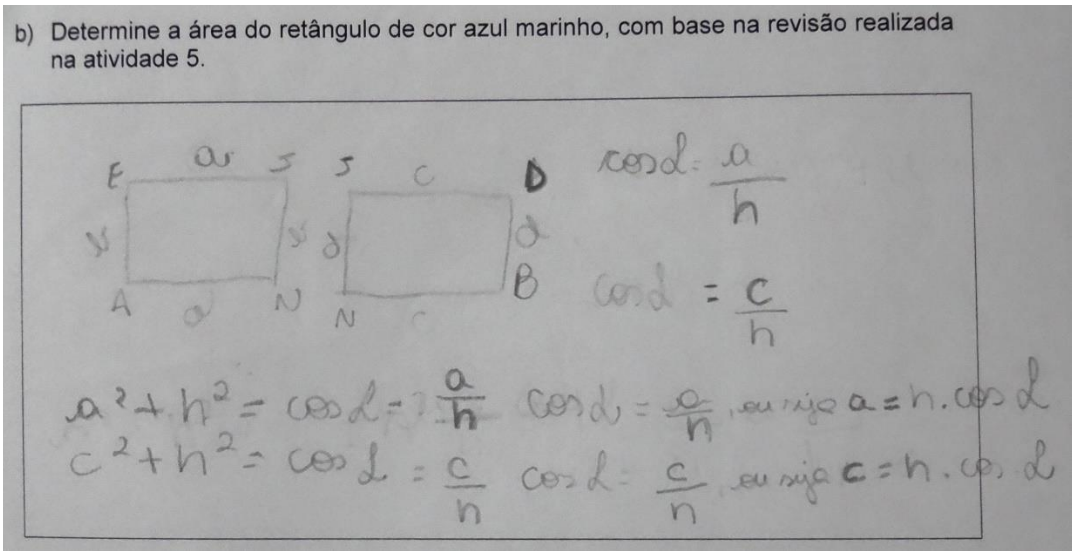


Figura 100 – Produção dos alunos das Duplas B e C – Atividade 6 – Tarefa 2 item a.
Fonte: Acervo Pessoal

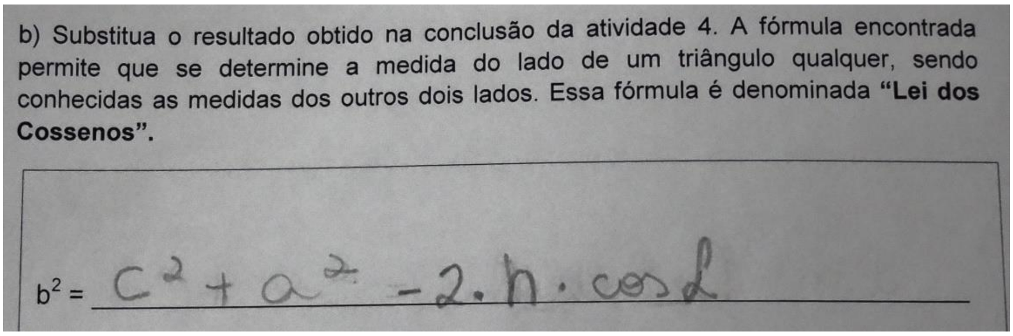


Figura 101 – Produção dos alunos das Duplas B e C – Atividade 6 – Tarefa 2 item b.
Fonte: Acervo Pessoal

A produção dos alunos das Duplas B e C ficou confusa. Assim como a Dupla A, é provável que esses estudantes realizaram os cálculos de forma mecânica, dado que eles apagaram por diversas vezes os seus cálculos e, quando questionados oralmente, responderam “não conseguimos encontrar a área do retângulo que sobra, desculpa professora”.

Aguiar (2011) encontrou dificuldades semelhantes em sua pesquisa. Ele observou que os estudantes, apesar de reconhecerem o objeto matemático no registro algébrico, não conseguiam concebê-lo no registro figural.

Conforme constatado nas figuras 98, 99, 100 e 101, as duplas não realizaram satisfatoriamente a Atividade 6. Com isso, realizamos um *redesign* desta atividade, apresentando um novo enfoque da situação proposta, por meio de um recorte da figura inicial, apresentada na Atividade 4, priorizando a junção de duas figuras, o quadrado com o “retângulo sobra”, para favorecer a observação da situação proposta, conforme exposto a seguir, na figura 102, que retoma, como exemplo, a produção da Dupla A com o “retângulo sobra”, representado pela cor azul. A atividade de *redesign* foi projetada neste novo formato, recorte do original, por compreendermos que os alunos trabalhariam com um número menor de dados e figuras no ambiente papel e lápis, podendo focar na observação dos elementos que realmente eram significantes para o cálculo da área do retângulo BGKO.

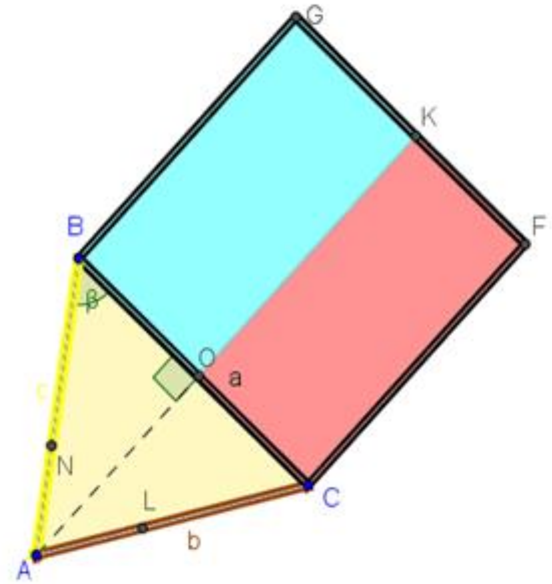
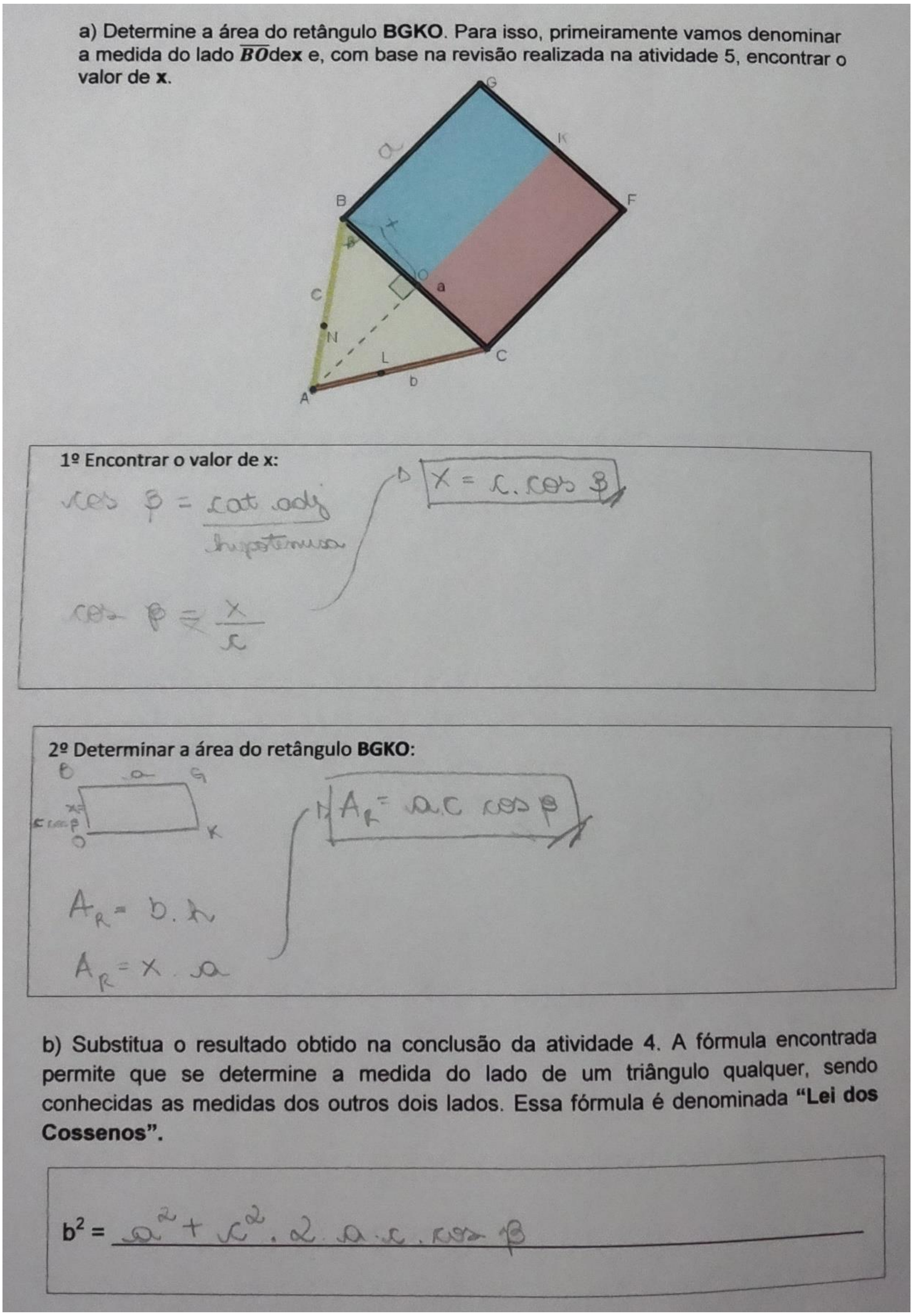


Figura 102 - Atividade 6 – *Redesign* da Tarefa 2

Fonte: Acervo Pessoal

As novas produções são apresentadas nas figuras 103 e 104.



a) Determine a área do retângulo **BGKO**. Para isso, primeiramente vamos denominar a medida do lado $\overline{BO}$ de **x** e, com base na revisão realizada na atividade 5, encontrar o valor de **x**.

1º Encontrar o valor de x:

$\cos\beta = \frac{\text{cat. adj}}{\text{hipotenusa}}$

$\cos\beta = \frac{x}{c}$

$\boxed{X = c.\cos\beta}$

2º Determinar a área do retângulo **BGKO**:

B a G
x = c cos β
O K

$A_R = b.h$

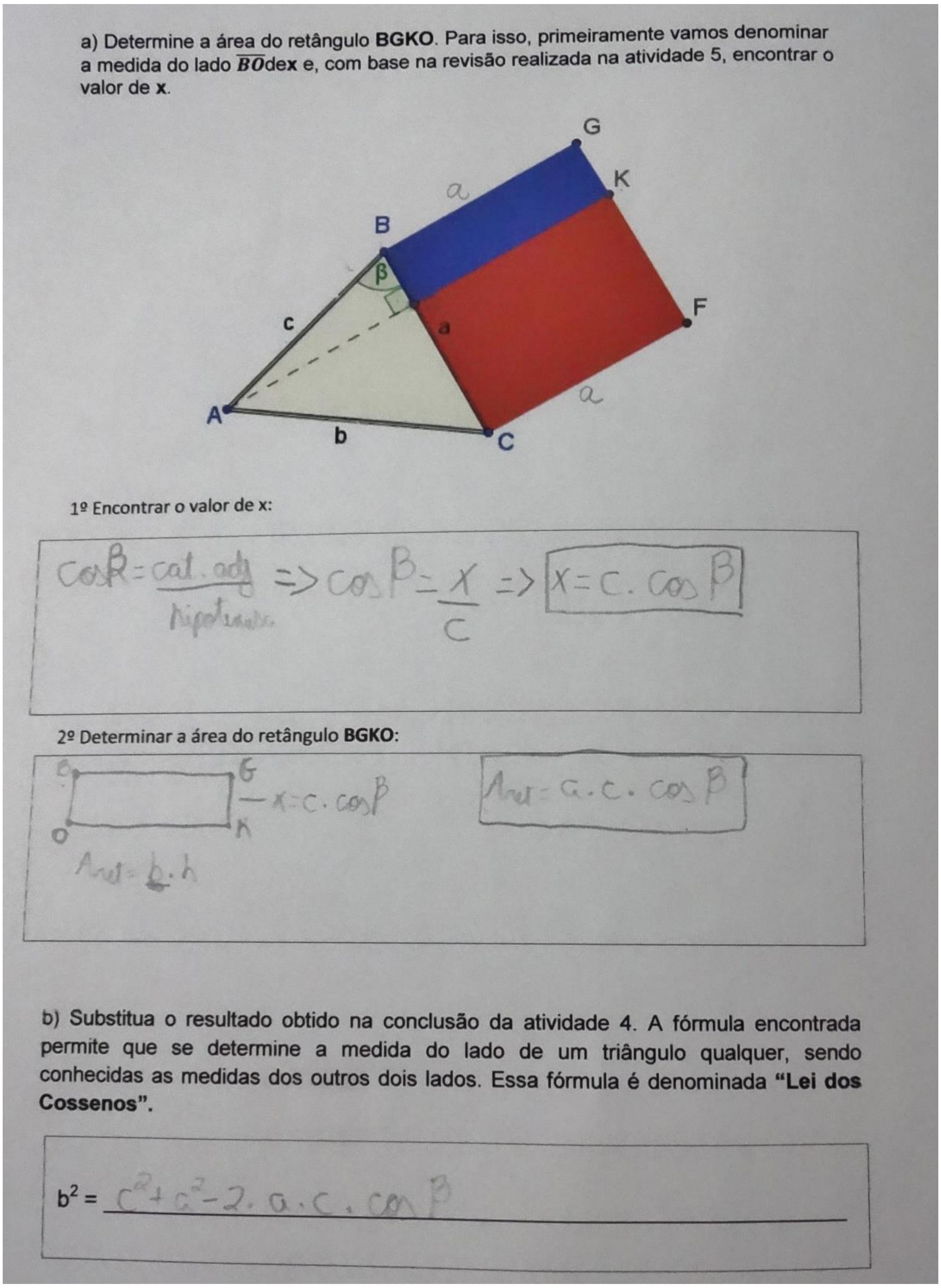
$A_R = x.a$

$\boxed{A_R = a.c\cos\beta}$

b) Substitua o resultado obtido na conclusão da atividade 4. A fórmula encontrada permite que se determine a medida do lado de um triângulo qualquer, sendo conhecidas as medidas dos outros dois lados. Essa fórmula é denominada **"Lei dos Cossenos"**.

$b^2 = a^2 + c^2 . 2.a.c.\cos\beta$

Figura 103 - Produção da Dupla A – Atividade 6 – *Redesign* da Tarefa 2 – itens a e b.
Fonte: Acervo Pessoal



a) Determine a área do retângulo **BGKO**. Para isso, primeiramente vamos denominar a medida do lado $\overline{BO}$ de **x** e, com base na revisão realizada na atividade 5, encontrar o valor de **x**.

1º Encontrar o valor de x:

$\cos\beta = \frac{\text{cat. adj}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{x}{c} \Rightarrow \boxed{x = c.\cos\beta}$

2º Determinar a área do retângulo **BGKO**:

B G O K — $x = c.\cos\beta$

$A_{ret} = b.h$

$\boxed{A_{ret} = a.c.\cos\beta}$

b) Substitua o resultado obtido na conclusão da atividade 4. A fórmula encontrada permite que se determine a medida do lado de um triângulo qualquer, sendo conhecidas as medidas dos outros dois lados. Essa fórmula é denominada **"Lei dos Cossenos"**.

$b^2 = c^2 + a^2 - 2.a.c.\cos\beta$

Figura 104 – Produção dos estudantes das Duplas B e C – Atividade 6 – Tarefa 2 – itens a e b.
Fonte: Acervo Pessoal

Constatamos que na Atividade 6 nosso objetivo foi alcançado. As duplas deduziram a Lei dos cossenos após o *redesign*. Para investigarmos a compreensão dos alunos, retomamos a atividade exploratória individual, com algumas reformulações.

Assim como Fortes (2012), procuramos entender como o aluno pensou ao resolver as atividades, mesmo sendo uma tarefa difícil, pois procuramos entender a resolução a partir do que era esperado como resposta certa. A análise dos erros dos alunos balizou as reformulações durante o processo. Procuramos explorar triângulos em diferentes posições, verificando se os alunos conseguiam estabelecer as relações nesses casos. Com isso, intencionamos evitar o mecanicismo da aplicação dos teoremas em triângulos apresentados na posição usual.

Na atividade exploratória individual, verificamos que os alunos não conheciam a lei dos cossenos. Com isso, optamos por incluir nesta atividade final os mesmos exercícios propostos anteriormente, pois ao resolvê-los, os alunos poderiam ter o respaldo dos questionamentos realizados no dia da aplicação. Nosso objetivo foi verificar se os alunos aplicariam adequadamente a lei dos cossenos, sendo capazes de distinguir situações em que era possível aplicar o teorema de Pitágoras das que requeriam a aplicação da lei dos cossenos. Neste caso, pretendíamos que eles estabelecessem relações entre os registros figural, da língua natural e algébrico.

A seguir a produção das Duplas da Atividade 7, conforme figuras 105, 106, 107, 108 e 109, respectivamente.

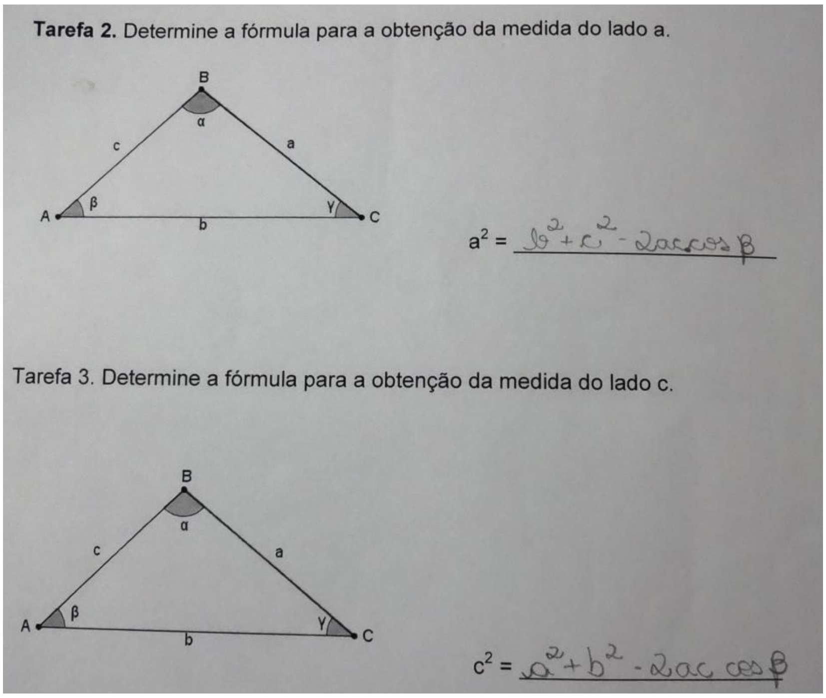
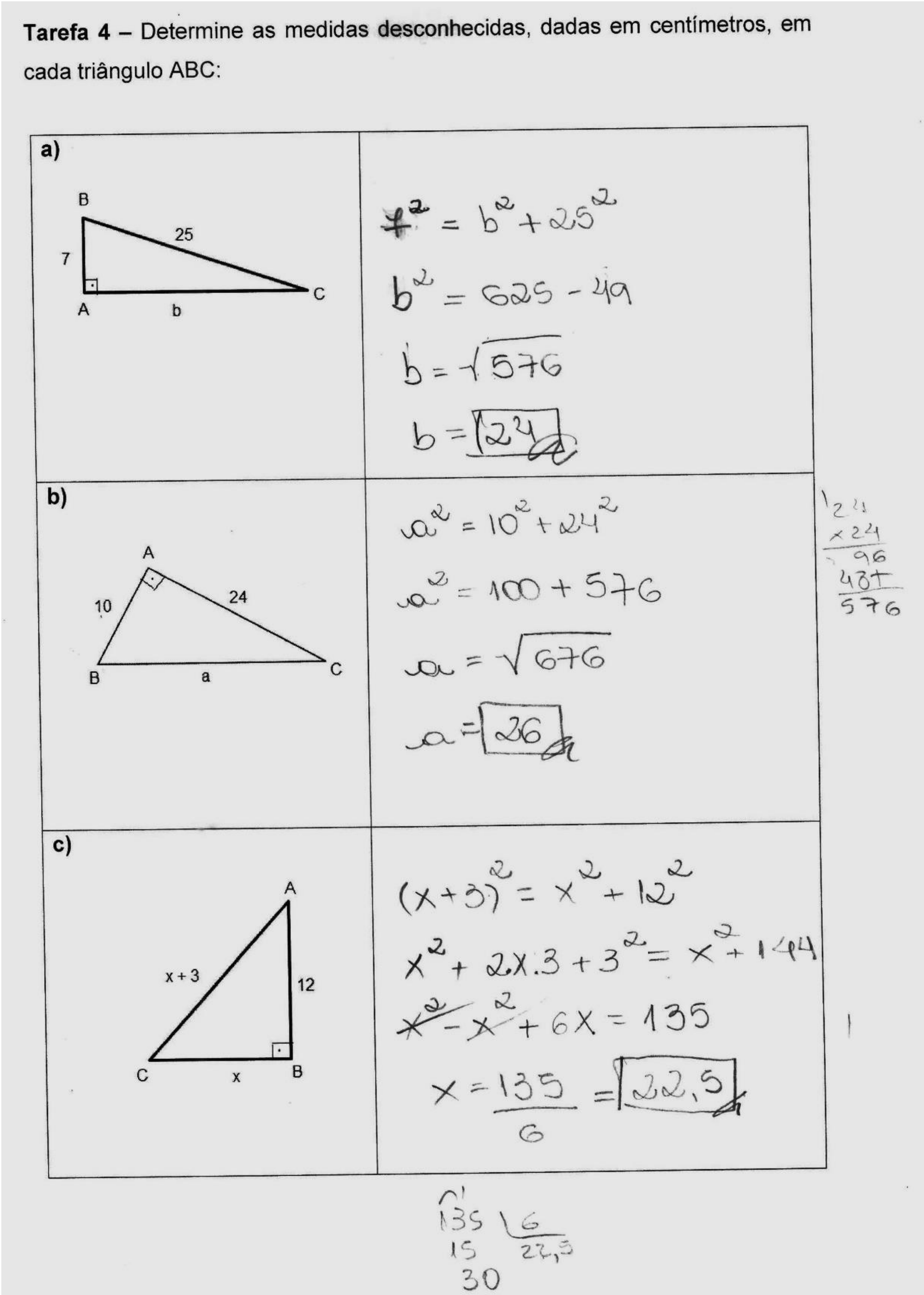


Figura 105 – Produção Dupla A – Atividade 7 – Tarefas 2 e 3
Fonte: Acervo Pessoal



Tarefa 4 – Determine as medidas desconhecidas, dadas em centímetros, em cada triângulo ABC:

$$\cancel{f}^2 = b^2 + 25^2$$
$$b^2 = 625 - 49$$
$$b = \sqrt{576}$$
$$b = \boxed{24}\ cm$$

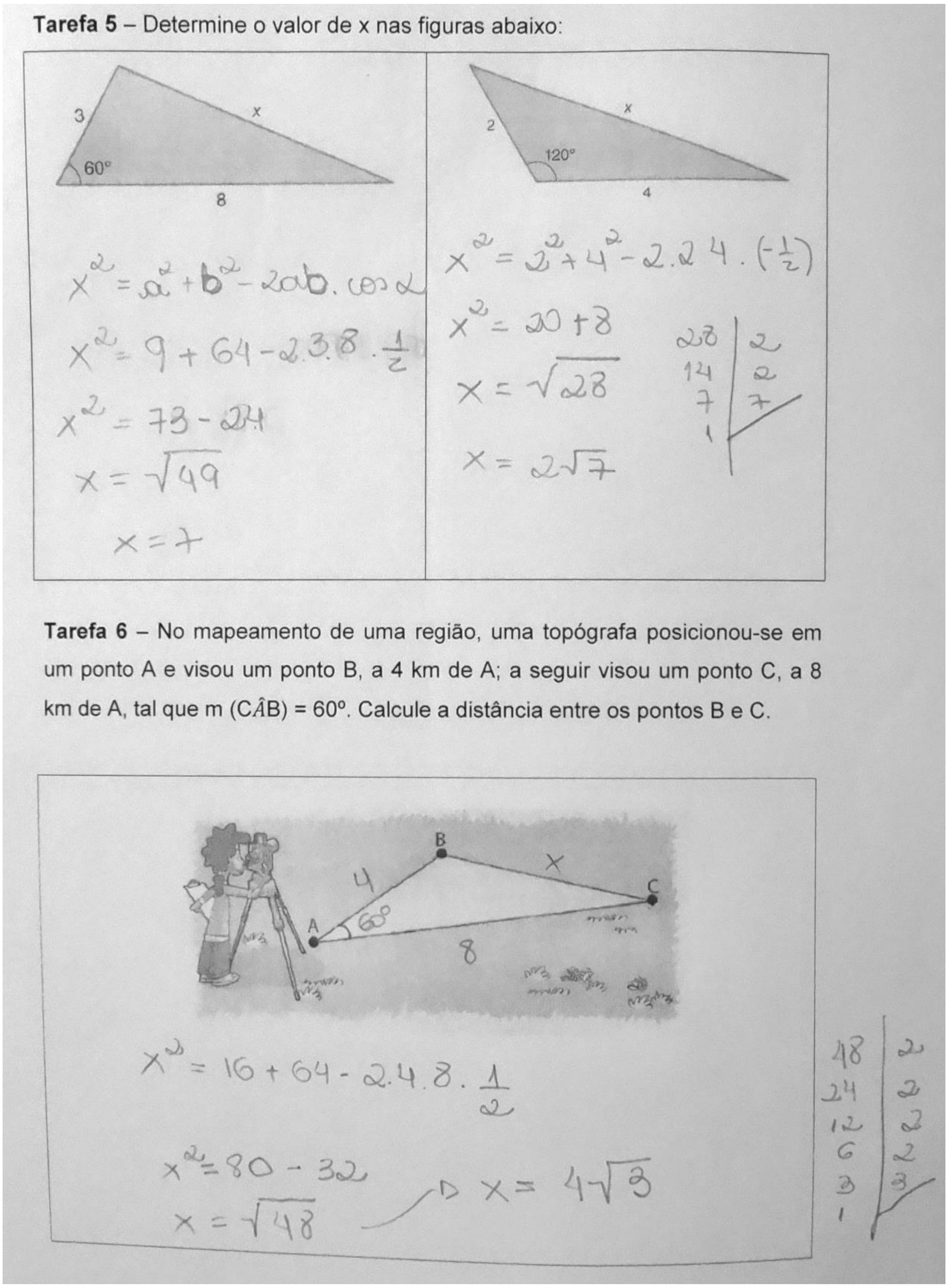
$$a^2 = 10^2 + 24^2$$
$$a^2 = 100 + 576$$
$$a = \sqrt{676}$$
$$a = \boxed{26}\ cm$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48+ \\ \hline 576 \end{array}$$

$$(x+3)^2 = x^2 + 12^2$$
$$x^2 + 2.x.3 + 3^2 = x^2 + 144$$
$$\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 6x = 135$$
$$x = \frac{135}{6} = \boxed{22,5}\ cm$$

$$135 \;\underline{|\,6}$$
15 22,5
30

Figura 106 - Produção Dupla A – Atividade 7 – Tarefa 4
Fonte: Acervo Pessoal



Tarefa 5 – Determine o valor de x nas figuras abaixo:

$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha$

$x^2 = 9 + 64 - 2.3.8.\frac{1}{2}$

$x^2 = 73 - 24$

$x = \sqrt{49}$

$x = 7$

$x^2 = 2^2 + 4^2 - 2.2.4.(-\frac{1}{2})$

$x^2 = 20 + 8$

$x = \sqrt{28}$

$x = 2\sqrt{7}$

28	2
14	2
7	7
1	

Tarefa 6 – No mapeamento de uma região, uma topógrafa posicionou-se em um ponto A e visou um ponto B, a 4 km de A; a seguir visou um ponto C, a 8 km de A, tal que m (C$\hat{A}$B) = 60º. Calcule a distância entre os pontos B e C.

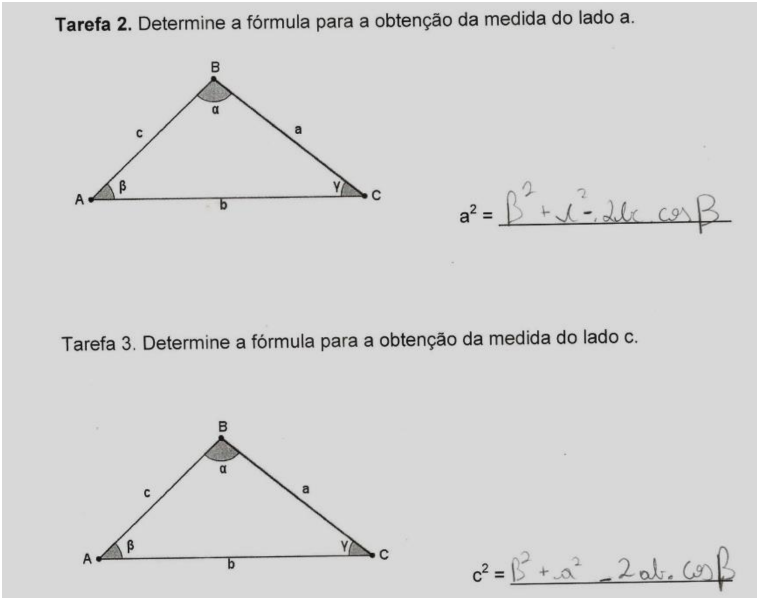
$x^2 = 16 + 64 - 2.4.8.\frac{1}{2}$

$x^2 = 80 - 32$

$x = \sqrt{48} \rightarrow x = 4\sqrt{3}$

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Figura 107 - Produção Dupla A – Atividade 7 – Tarefa 5 e 6.
Fonte: Acervo Pessoal



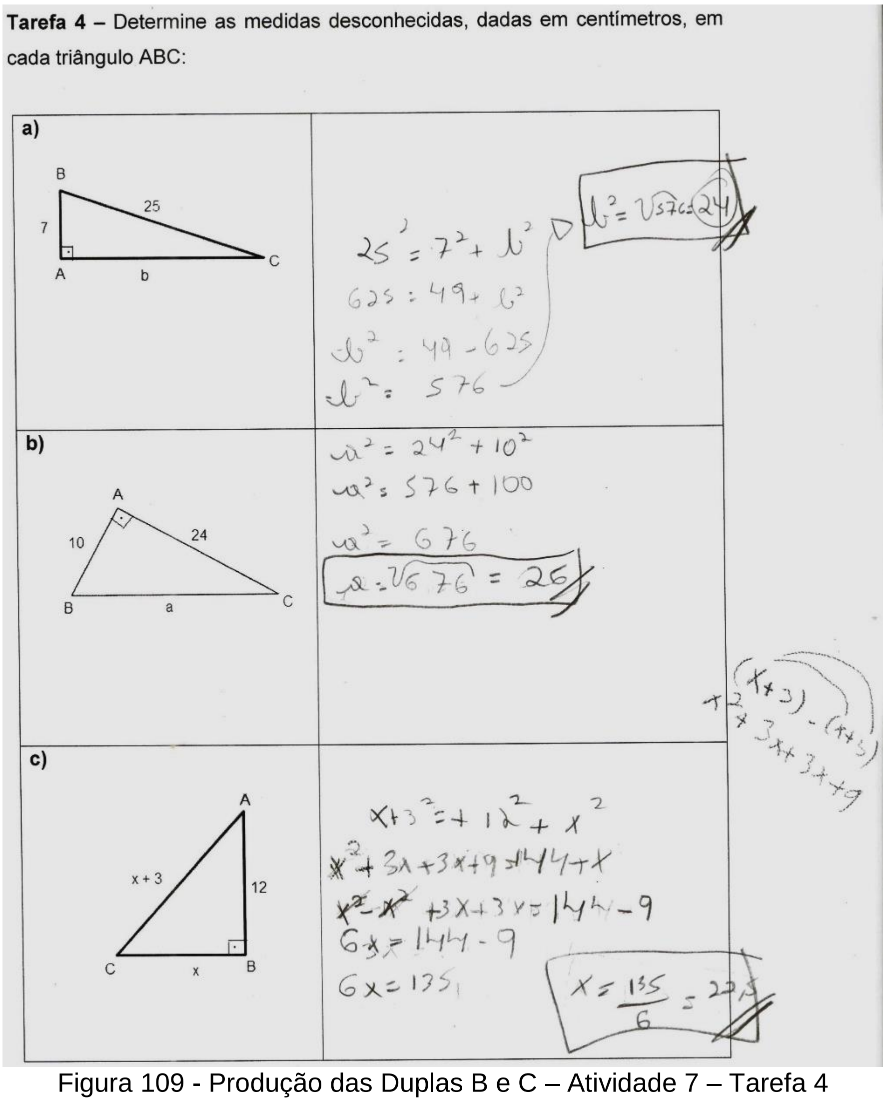
Tarefa 2. Determine a fórmula para a obtenção da medida do lado a.

$a^2 = \beta^2 + a^2 - 2ab \cos \beta$

Tarefa 3. Determine a fórmula para a obtenção da medida do lado c.

$c^2 = \beta^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos \beta$

Figura 108 - Produção Dupla B/C – Atividade 7 – Tarefas 2 e 3
Fonte: Acervo Pessoal



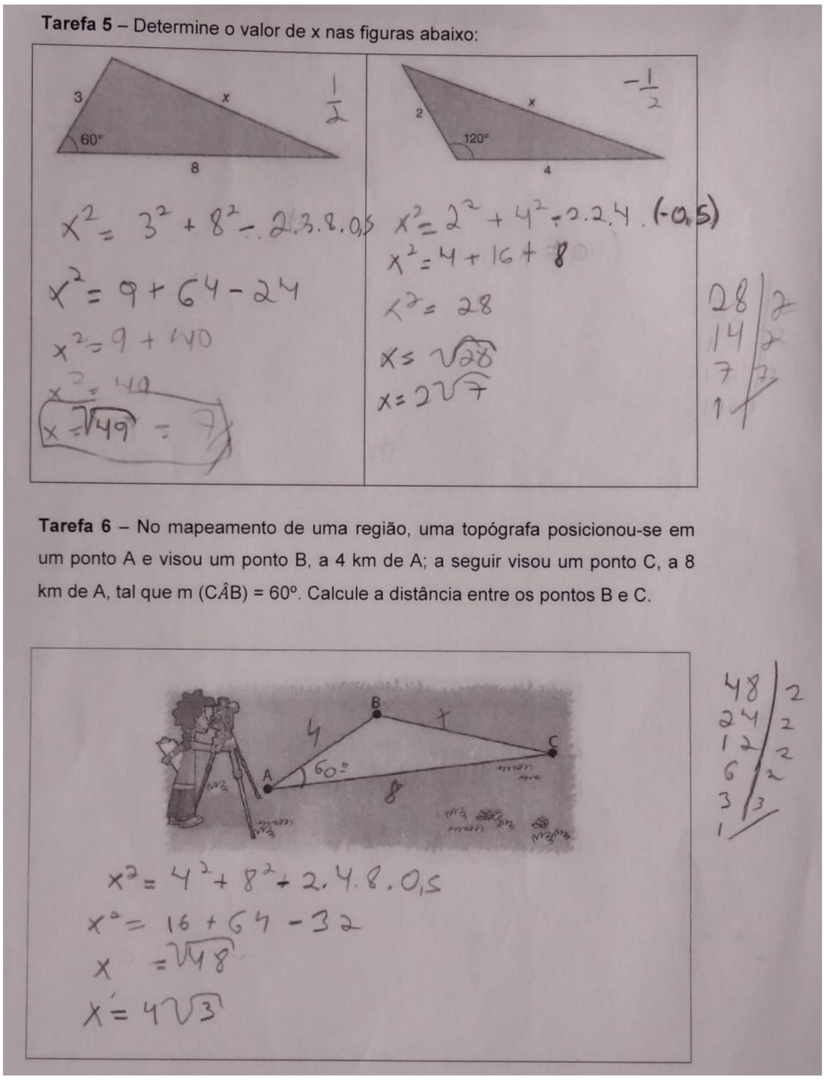
Tarefa 4 – Determine as medidas desconhecidas, dadas em centímetros, em cada triângulo ABC:

a) B, A, C; 7, 25, b	$25^2 = 7^2 + b^2$ $625 = 49 + b^2$ $b^2 = 49 - 625$ $b^2 = 576$ $\boxed{b^2 = \sqrt{576} = 24}$
b) A, B, C; 10, 24, a	$a^2 = 24^2 + 10^2$ $a^2 = 576 + 100$ $a^2 = 676$ $\boxed{a = \sqrt{676} = 26}$
c) A, C, B; x + 3, 12, x	$x+3^2 = 12^2 + x^2$ $x^2 + 3x + 3x + 9 = 144 + x$ $\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 3x + 3x = 144 - 9$ $6x = 144 - 9$ $6x = 135$ $\boxed{x = \frac{135}{6} = 22,5}$

$(x+3) \cdot (x+3)$
$x^2 + 3x + 3x + 9$

Figura 109 - Produção das Duplas B e C – Atividade 7 – Tarefa 4
Fonte: Acervo Pessoal

Na resolução da Tarefa 4a, identificamos o mesmo erro apontado por Fortes (2012), pois os alunos da Dupla A não identificaram corretamente a hipotenusa e os catetos ao aplicarem o teorema de Pitágoras e os alunos das Duplas B e C cometeram erros nos cálculos. Apesar disso, esses equívocos foram específicos, dado que os estudantes acertaram as demais questões.


Tarefa 5 – Determine o valor de x nas figuras abaixo:

$x^2 = 3^2 + 8^2 - 2.3.8.0,5$

$x^2 = 9 + 64 - 24$

$x^2 = 9 + 40$

$x^2 = 49$

$x = \sqrt{49} = 7$

$x^2 = 2^2 + 4^2 - 2.2.4.(-0,5)$

$x^2 = 4 + 16 + 8$

$x^2 = 28$

$x = \sqrt{28}$

$x = 2\sqrt{7}$

Tarefa 6 – No mapeamento de uma região, uma topógrafa posicionou-se em um ponto A e visou um ponto B, a 4 km de A; a seguir visou um ponto C, a 8 km de A, tal que m (CÂB) = 60º. Calcule a distância entre os pontos B e C.

$x^2 = 4^2 + 8^2 + 2.4.8.0,5$

$x^2 = 16 + 64 - 32$

$x = \sqrt{48}$

$x = 4\sqrt{3}$

Figura 110 – Produção das Duplas B e C – Atividade 7 – Tarefas 5 e 6
Fonte: Acervo Pessoal

Após a aplicação da Atividade 7, constatamos um erro no enunciado na fórmula da tarefa 1, o que foi prontamente corrigido pela professora pesquisadora . Foi solicitado um novo encontro para que as duplas realizassem as correções.

Da Dupla A foi solicitada revisão da tarefa 1, com a nomenclatura dos lados e ângulos corrigida. Na sequência retomaram as tarefas 2 e 3. Como na tarefa 4a, o uso do teorema de Pitágoras ficou incorreto, a dupla foi questionada oralmente acerca dos elementos do triângulo (catetos e hipotenusa) e do teorema de Pitágoras, para que pudesse constatar o erro, efetuando, em seguida, a correção. É interessante comentar a reação desses alunos quando questionados, pois ficaram perplexos diante da confusão que fizeram, apresentando a seguinte fala: “Nossa professora, confundimos o cateto com a hipotenusa! Pura falta de atenção”.

Para os estudantes das Duplas B e C também foi solicitada a revisão da tarefa 1, com a nomenclatura dos lados e ângulos corrigida. Na sequência retomaram a tarefa 3, sendo questionados oralmente para que comparassem a fórmula deduzida com as respostas dadas na tarefa. Na tarefa 4a, a dupla foi questionada, na terceira linha, porque escreveu a subtração de forma incorreta.

Com essa intervenção, a dupla localizou o erro e apresentou o seguinte comentário acompanhado de risadas: “é professora está errado, desculpa foi falta de atenção”.

As novas produções das duplas foram satisfatórias, finalizando desta forma a atividade 7. Constatamos que o objetivo foi atingido, conforme demonstram as figuras 111, 112, 113 e 114.

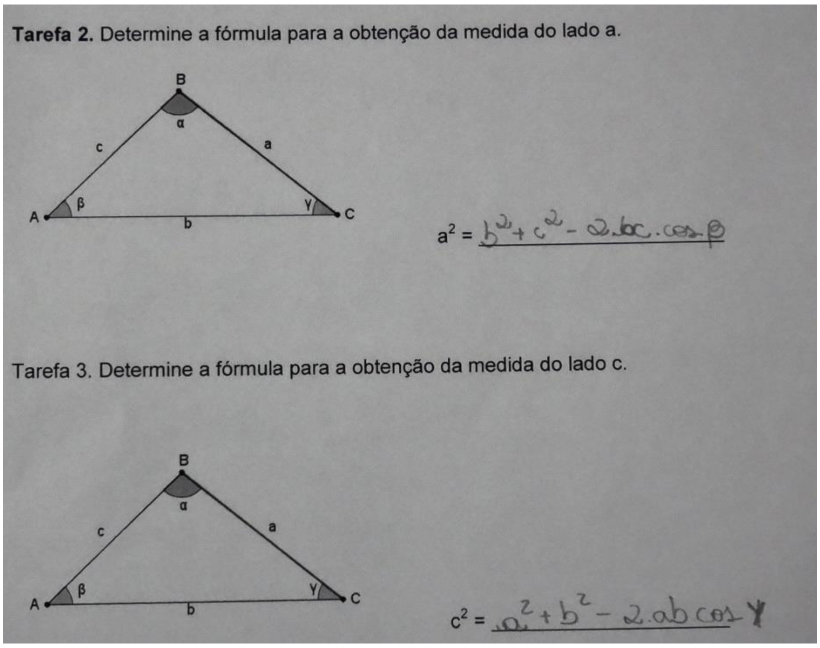


Figura 111 – Produção Dupla A – Redesign da Atividade 7 – Tarefas 1, 2 e 3.
Fonte: Acervo Pessoal

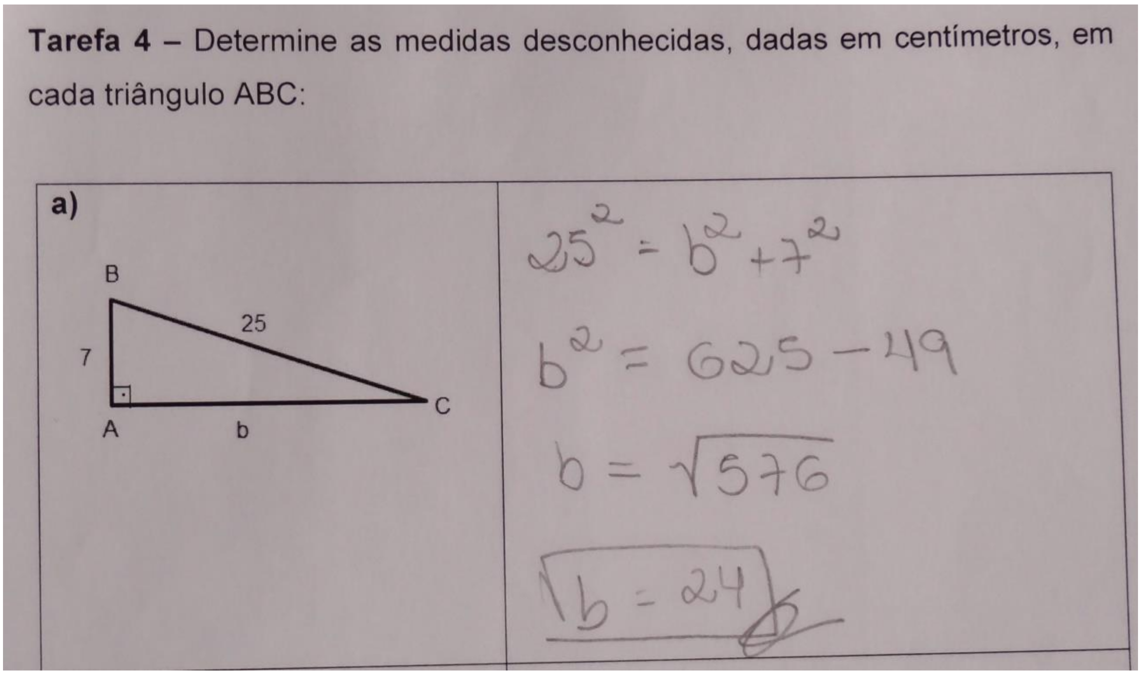


Figura 112 – Produção Dupla A – Redesign da Atividade 7 – Tarefa 4a.
Fonte: Acervo Pessoal

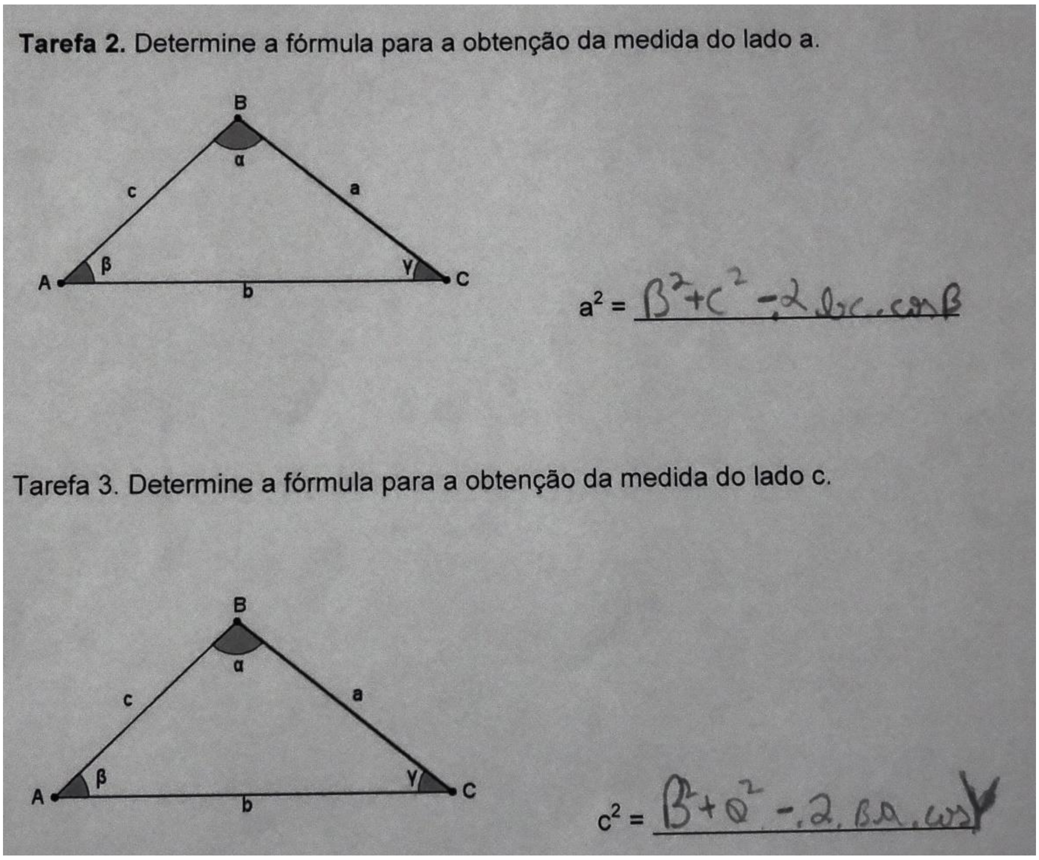


Figura 113 – Produção dos estudantes das Duplas B e C – Redesign da Atividade 7 – Tarefas 1, 2 e 3.
Fonte: Acervo Pessoal

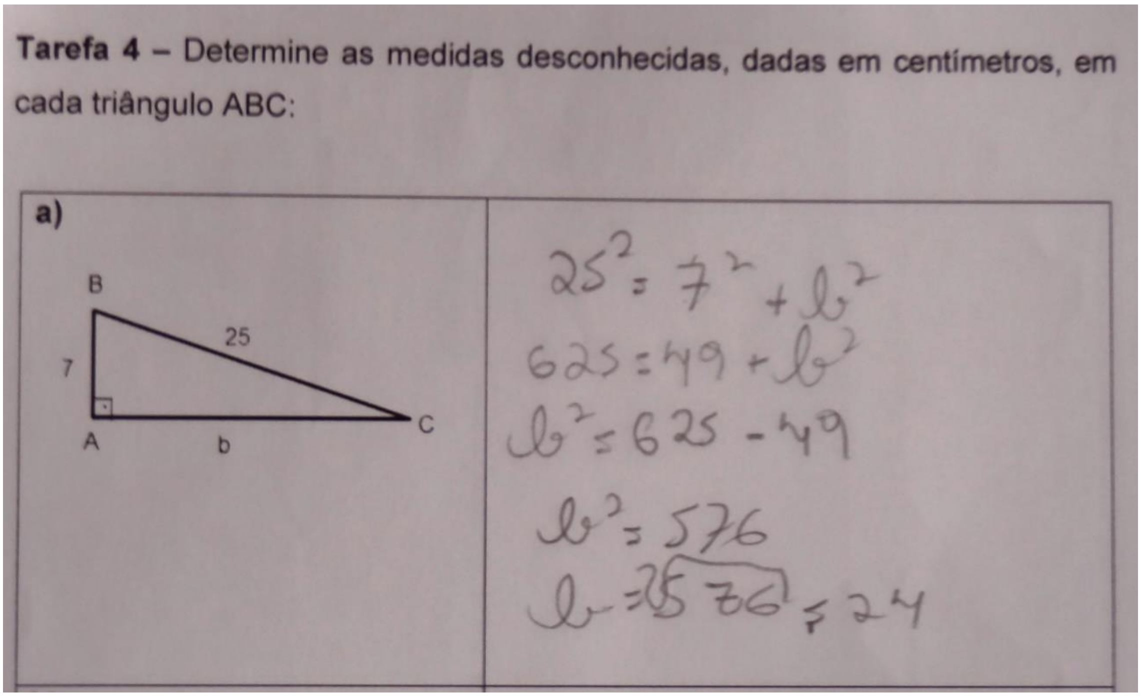


Figura 114 – Produção dos estudantes das Duplas B e C – Redesign da Atividade 7 – Tarefa 4a.
Fonte: Acervo Pessoal

Observamos que as duplas, ao retomarem a Atividade 7, conseguiram realizá-la independentemente da forma como era apresentado o triângulo retângulo, evidenciando avanços em relação à produção apresentada na atividade preliminar. Ainda, conseguiram aplicar a lei dos cossenos com sucesso em todas as situações solicitadas.

As dificuldades apontadas por Bastian (2000) e Fortes (2012) na identificação dos elementos de um triângulo retângulo, na aplicação do teorema de Pitágoras e em cálculos, praticamente não ocorreram na atividade final de nossa pesquisa e, quando evidenciados, constituíram equívocos pontuais. É provável que o experimento de ensino proposto tenha favorecido a minimização das dificuldades dos alunos na identificação de elementos do triângulo retângulo (catetos e hipotenusa), pois, independente da disposição do triângulo, eles foram capazes de identificá-los. Eles não tiveram dificuldades para aplicar o teorema de Pitágoras e também não apresentaram problemas para diferenciar situações em que podiam aplicar o teorema de Pitágoras daquelas nas quais a lei dos cossenos era necessária.

Faz-se necessário destacar a importância da utilização do *software* de geometria dinâmica GeoGebra, que associado à teoria dos Registros de

Representação Semióticas, favoreceu a construção do conhecimento de forma independente, constituindo outro cenário de desenvolvimento dos conteúdos propostos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos a conclusão de nosso estudo. Para favorecer a compreensão, vamos inicialmente retomar de forma sintética os aspectos gerais da pesquisa. Em seguida, apresentaremos as contribuições do instrumento de ensino desenvolvido, a relevância do *software GeoGebra* na aplicação das atividades e retomaremos o objetivo e as hipóteses da pesquisa. Por fim, forneceremos sugestões para futuras pesquisas.

6.1 SÍNTESE DAS ETAPAS DE PESQUISA

Ansiávamos neste trabalho tratar da lei dos cossenos, tanto no sentido de construção da fórmula quanto na sua utilização como ferramenta para resolução de problemas. Assim, elaboramos, aplicamos e avaliamos um experimento de ensino concebido de forma a propiciar uma entrada experimental integrada a um trabalho de exploração de representações de diferentes registros nos ambientes papel e lápis e *software GeoGebra.*

A presente pesquisa teve como fundamentação teórica os registros de representações semióticas de Duval (2003, 2009, 2011). Buscamos na literatura pesquisas que trataram do objeto matemático lei dos cossenos. Como não encontramos estudos sobre esse tema, ampliamos nossa busca para pesquisas que se voltaram a conteúdos de trigonometria relacionados com a lei dos cossenos.

De uma forma geral, essas pesquisas identificaram que as principais dificuldades encontradas estão associadas ao fato de os alunos não reconhecerem elementos básicos de um triângulo retângulo, de não conseguirem aplicar o teorema de Pitágoras quando o triângulo retângulo não está na posição usual e de não distinguirem medidas de ângulos e medidas de lados de um triângulo. Ainda, foram identificadas indicações incorretas de relações trigonométricas, erros de cálculo e dificuldades com a linguagem matemática.

Na literatura observamos também que alguns problemas podem ser motivados pelo abismo entre as necessidades contemporâneas e as formas tradicionais de aprender, com práticas desmotivadoras, em que a relação tempo-aprendizagem perde seu sentido frente à velocidade com que avançamos tecnologicamente. Nesse sentido, algumas pesquisas indicam a utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica, pelo fato de fornecerem visualizações e experimentações diferentes das obtidas no ambiente papel e lápis, favorecendo conversões entre registros de representações semióticas.

Diante da problemática evidenciada, elaboramos um primeiro desenho sobre a lei dos cossenos, ou seja, um experimento de ensino com o objetivo de favorecer a construção dessa lei partindo do registro figural no ambiente computacional. Esse experimento foi aplicado com base em aspectos da metodologia de *Design Experiment* de Cobb *et al*. (2003), a qual orienta a construção e a análise de experimentos de ensino de conteúdos matemáticos específicos, permitindo que as atividades elaboradas possam constantemente ser remodeladas, de acordo com as necessidades evidenciadas nas produções dos alunos e com os problemas apontados na revisão de literatura.

O experimento foi aplicado em duas fases. Na primeira, os alunos responderam a um questionário preliminar que teve por objetivo identificar os conhecimentos adquiridos na série anterior sobre o Teorema de Pitágoras. Em seguida, foram aplicadas atividades nos ambientes *GeoGebra* e papel e lápis.

6.2 VERIFICAÇÃO DAS HIPÓTESES INICIALMENTE ESTABELECIDAS

Para a realização deste estudo, tínhamos por hipóteses que a abordagem proposta favoreceria a dedução e a compreensão da lei dos cossenos, por permitir uma entrada experimental aliada a um trabalho de relação dinâmica entre representações dos registros algébrico, figural e gráfico e que o aspecto dinâmico do *software GeoGebra* favoreceria também a elaboração de conjecturas e a compreensão da passagem de um registro para outro.

Ao analisarmos as produções dos alunos, concluímos que nossas hipóteses foram confirmadas, uma vez que os sujeitos tiveram sucesso na construção e na aplicação da lei dos cossenos. Notamos, também, que, após o experimento, os alunos apresentaram avanços na aplicação do teorema de Pitágoras. Salientamos que, para alcançarmos nosso objetivo, foram necessárias várias reformulações. Com isso, concluímos que a opção pela metodologia de *Design Experiment* foi imprescindível, pelo fato de ser flexível, permitindo *redesign* durante o processo.

Na apresentação das produções dos alunos, destacamos como essenciais as resoluções fornecidas a partir da atividade 4, apresentadas e discutidas no capítulo 5. Partindo das análises, verificamos que os alunos tiveram sucesso na diferenciação entre situações em que se deveria usar a lei dos cossenos daquelas em que seria possível aplicar Pitágoras.

Ao provocarmos nos alunos o trabalho com notações diferentes da usual, como por exemplo, desmitificar que o teorema de Pitágoras só poderá ser aplicado como $a^2 = b^2 + c^2$, notamos que eles realmente se desvincularam da memorização de fórmulas, visto que eles demonstraram capacidade de construir a lei independente da colocação dos lados “a”, “b” e “c” no triângulo retângulo. Outra situação averiguada é a de que, diferentemente do apontado na literatura, os estudantes não encontraram dificuldades em reconhecer os elementos de um triângulo retângulo, independentemente da disposição dele. As conjecturas levantadas pelos estudantes foram comprovadas em seus diálogos durante a realização das atividades, ao comentarem que “a letra é o menos importa, se soubermos o que é cateto e hipotenusa, saberemos aplicar o teorema de Pitágoras”. Tal comentário nos faz acreditar que houve mudança de postura, ou seja, eles notaram que a resolução de um problema não está associada apenas ao uso de fórmulas, como pensavam inicialmente.

A concepção de que só poderiam resolver as atividades propostas se aplicassem diretamente uma fórmula, não é verdadeira que podem analisar a situação, pensar e formular hipóteses de resolução, concluindo de que forma resolverão o problema.

Analogamente ao teorema de Pitágoras, para a aplicação da lei dos cossenos, os alunos demonstraram habilidade em determinar a medida de qualquer lado solicitado nas atividades propostas, evidenciando que construíram o conhecimento. Tal fato foi constatado na atividade 7, a qual realizaram sem intervenções da professora-pesquisadora.

Apesar de termos alcançado o nosso objetivo com a realização da Atividade 7, vale ressaltar que não foram imediatas as constatações. Em alguns registros, principalmente nos iniciais, verificamos que as articulações entre os registros figural e algébrico não foram imediatas, mas de grande importância para a construção do conhecimento. A principal dificuldade ocorreu no momento de converter do registro multifuncional figural, presente na tela do computador, para o monofuncional algébrico, no ambiente papel e lápis. Tal fato demandou várias reformulações para que o objetivo fosse atingido.

Com relação à segunda hipótese, concluímos que ela também foi confirmada, uma vez que o aspecto dinâmico do GeoGebra se mostrou fundamental para que os estudantes testassem suas conjecturas e relacionassem os registros semióticos explorados, pois trouxe vantagens em relação ao ambiente papel e lápis, ao promover análises simultâneas.

6.3 ANÁLISE DA QUESTÃO DE PESQUISA

Retomando nossa questão de pesquisa: “Que percepções emergem dos estudantes quando participam de um experimento de ensino sobre a lei dos cossenos, concebido de forma a propiciar uma entrada experimental integrada a um trabalho de exploração de representações de diferentes registros?”.

Na realização das atividades, a preocupação inicial dos alunos era lembrar quais fórmulas poderiam aplicar para resolver o problema proposto. À medida que fomos conduzindo o experimento de ensino, os alunos passaram a adquirir outra postura. Em diversos momentos eles paravam para refletir e tentar encontrar o melhor caminho, em outras não conseguiam relacionar os registros algébrico e figural, sendo, portanto, necessário retomar conjecturas já estabelecidas. Vale lembrar que, para Duval (1993, 1995, 2003, 2009, 2011), as representações semióticas são fundamentais para o acesso a um objeto matemático. Ainda, para este autor, a atividade matemática caracteriza-se pela mobilização simultânea de pelos menos dois registros de representação, ou a possibilidade de mudança em qualquer momento de um registro para o outro. Nesta perspectiva é que buscamos provocar a mudança de registros na maioria das atividades propostas.

Neste processo de construção da lei dos cossenos, o mais gratificante foi perceber que eles não se prenderam a situações de memorização, ou seja, que sabiam com segurança quando aplicar a lei dos cossenos e quando aplicar

Pitágoras e que lidavam com triângulos dispostos em diferentes posições. Apesar disso, como já mencionado anteriormente, o processo não foi imediato, ou seja, em diversos momentos os alunos não encontraram congruência entre o enunciado dado na língua natural e a representação figural.

A liberdade dada aos alunos a partir da atividade 4, quando eles foram convidados a personalizar suas atividades, foi de grande importância, pois, principalmente a partir desse momento, eles assumiram uma postura mais independente, com autonomia para construir o objeto matemático, diferentemente do que ocorre usualmente em sala de aula, quando muitas vezes a aula já está pronta e o tempo de aula estabelecido impede, em muitos casos, o estabelecimento de um espaço de discussão. Quando o aluno se torna coadjuvante, ele se sente importante e contribui significativamente na construção do conhecimento, é como protagonizar a própria história.

Quanto à segunda questão de pesquisa: “Em quais aspectos a ferramenta de geometria dinâmica adotada influencia os estudantes a compreender a lei dos cossenos?”

Concluímos que o trabalho aliado às representações dos registros de representações semióticas e ao aspecto dinâmico do *software GeoGebra* favoreceu a elaboração de conjecturas e a compreensão da passagem de um registro para outro, permitindo a construção da lei dos cossenos.

O dinamismo do *software* foi imprescindível para a visualização do “retângulo que sobra”, contribuindo significativamente para as conclusões que os alunos apresentaram em suas produções, conduzindo-os a diferenciar quando estavam trabalhando com triângulos retângulos e não retângulos. Tais evidências não poderiam ser concebidas em um ambiente estático. A utilização deste *software* beneficiou a construção do conhecimento do objeto matemático, lei dos cossenos, de forma independente, constituindo um novo cenário de desenvolvimento do conteúdo proposto.

Na atividade 3, por exemplo, quando eles alternavam entre os dois ambientes, software e papel e lápis, o dinamismo apresentado pelo *GeoGebra*, foi imprescindível para que pudessem verificar a manutenção das áreas. Ainda, quando o ângulo era maior ou menor que 90º, puderam verificar que a relação conhecida – Teorema de Pitágoras – não era válida. Diante dessas constatações, eles tinham que estabelecer novas conjecturas, que poderiam ser facilmente testadas no próprio ambiente.

Apesar disso, sugerimos alterações nas construções que foram realizadas no *GeoGeobra* para a realização das atividades 2, 3 e 4.

6.4 PERSPECTIVAS PARA NOVAS INVESTIGAÇÕES

Por ter contribuído significativamente nos processos de ensino e aprendizagem da lei dos cossenos, esperamos que o experimento proposto no presente estudo possa representar uma ferramenta de ensino desse conteúdo. Sugerimos que abordagens elaboradas com a preocupação de explorar relações entre registros semióticos aliadas a recursos computacionais dinâmicos possam ser desenvolvidas para outros objetos matemáticos.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, Anderson Luiz de. ***Moodle* e *GeoGebra* como apoio virtual ao ensino de trigonometria segundo a nova proposta curricular do Estado de São Paulo**. Dissertação (Mestrado) – Unversidade Federal de São Carlos, 2011.

ARAÚJO, J. C. M.. **Geometria Plana.** 2007. (Material didático ou instrucional). Disponível em: <http://marciocesarrocha.files.wordpress.com/2012/06/apostila-de-geometria-plana.pdf> Acesso em: 28/07/2012 as 14h

ARTIGUE, M. 1988. **Ingénierie didactique. Recherches en didactique des mathématiques**, vol. 9, nº 3, p. 281-308. La Pensée Sauvage Editions.

BAGÉ, Idalise Bernardo. **Proposta para a prática do professor do ensino fundamental I de noções básicas de Geometria com o uso de Tecnologias.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.

BALDINI, Loreni Aparecida Ferreira. **Construção do conceito de Área e Perímetro: Uma sequência Didática com auxílio de *Software* de Geometria Dinâmica.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Edições 70, 1997.

BASTIAN, Irma Verri. **O Teorema de Pitágoras**. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC, São Paulo – SP, 2000.

BERTÉ, A. 1995. **Différents ordres de présentation des premières notions de géometrie métrique dans l'enseignement secondaire. Recherches em didactique des mathématiques,** vol. 15, nº 3, p. 83-130. La Pensée Sauvage Editions.

BORBA, M. C.; Penteado. M. G. **Informática e Educação Matemática.** 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

BROLEZZI, A.C. **A tensão entre o discreto e o contínuo na História da Matemática e no ensino de Matemática**. 1996. 88f.Tese de doutoramento. Faculdade De Educação da Universidade De São Paulo, São Paulo, 1996.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. **Design experiments in education research**. Educational Researcher, v. 32, n.1, 2003. p. 9–13.

DAMM, R. F. **Registros de Representação. In: Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: Educ, 1999. pp. 135-154.

DUVAL, R. **The Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematica**. Estraburgo: Irem de Estraburgo, 1993.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. In: Aprendizagem em Matemática. Machado, S. D. A. (org.). Campinas, SP: Papirus, 2003. pp. 11-33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Semiósis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels): (fassículo I).** Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira.. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2009. pp. 11-33.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no mundo matemático de pensar os registros de representações semióticas.** Organização Tânia M.M. Campos; [tradução Marlene Alves Dias]. São Paulo: PROEM, 2011.

FORTES, A. W. B. **Razões trigonométricas no triângulo retângulo: Análise de erros no ensino médio**. 2012. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática)– (Centro Universitário Franciscano, UNIFRA).

GIOVANNI, José Ruy. **Aprendendo Matemática** / José Ruy Giovanni, Eduardo Parente. - Ed. renovada, São Paulo: FTD, 2007. (Coleção aprendendo matemática). pp. 137;139.

GRAVINA, M. A.; Santarosa, L. M, **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados,** In: **Revista Informática na Educação: Teoria & prática**. Porto Alegre, vol. 1, n.2. UFRGS, pág. 73 -88. 1998. Disponível em http://seer.ufrgs.br/InfEducTeoriaPratica/article/view/6275. Acesso em: 20/07/2010.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância.** 2. Ed. Campinas, SP; Papirus, 2003.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: o novo ritmo da informática.** 7. Ed. Campinas, SP; Papirus, 2007.

MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática**. Campinas, SP: Papirus, 2003.

MISKULIN, R.G.S. **Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino-aprendizagem da geometria.** Tese de Doutorado. Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, SP, 1999.

MORAN, J. M. **Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias**, In: **Revista Informática na Educação: Teoria & Prática.** Porto Alegre, vol. 3 n.1. UFRGS, Disponível em: < http://www.eca.usp.br/prof/moran/inov.htm> Acesso em: 10/03/2010.

NETO. José Roque Damasco. **Registros de Representação Semiótica e o *GeoGebra*: um ensaio para o ensino de Funções trigonométricas**. Dissertação de mestrado. Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica, da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis – SC, 2010.

PAIVA, Manoel. **Matemática volume 2**. 1ª ed. – São Paulo: Moderna, p.101, 2009.

PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática.** Trad. Sandra Costa. Porto Alegre: Artes médica, 1994.

PROCÓPIO, W. **O currículo de matemática do Estado de São Paulo: sugestões de atividades com o uso do *GeoGebra***. Dissertação de mestrado. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC, São Paulo – SP, 2011.

QUINTANEIRO, Wellerson. **Representações e Definições Formais em Trigonometria no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) – Rio de Janeiro: UFRJ / IM, 2010.

RIBEIRO, Edith Valladão Campos. **O design e o uso de um micromundo musical para explorar relações multiplicativas**. Dissertação de mestrado. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC, São Paulo – SP, 2007.

ROSA, Kelly Cristina. **Ambiente computacionais no contexto da Geometria: Panorama das teses e dissertações do Programa de Educação Matemática da PUC-SP de 1994 a 2007**. Dissertação (Mestrado acadêmico em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2009.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. Coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. São Paulo: SEE, 2010.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática (Ensino fundamental – Ciclo II e Médio)**. São Paulo: SEE, 2008.

_____. Secretaria da Educação Básica. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**; volume 2. Brasília; MEC, 2006.

_____.Secretaria da Educação. **Caderno do Professor – Matemática do 1º ano do ensino Médio**. 4º bimestre 2009. São Paulo, SEE, 2009.

SILVA, Júnior Teodoro Da. **O uso reconstrutivo do erro na aprendizagem de simetria axial: uma abordagem a partir de estratégias pedagógicas com uso de tecnologias.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2010.

TALL, D., VINNER, S. **Imagem de Conceito e Definição de conceito em Matemática, com especial referência em Limites e Continuidades**. Educational Studies im Mathematics, 12, pp. 151 – 169, 1981

VALENTE, J. A., **Por quê o computador na educação?** . In: Valente, JA. (Org.), **Computadores e conhecimento: repensando a educação**. 2ª ed. Campinas: Gráfica Unicamp, p. 29-53. 1998.

http://www.dinamatica.com.br/2011/03/uma-deducao-grafica-da-lei-dos cossenos.html Acesso: 06/12/2012. às: 16h.

http://eugenialima.blogspot.com.br/2012/08/001-calcule-o-valor-do-cateto-no.html Acesso: 19/02/2013 às: 21: 38

APÊNDICES

APÊNDICE A – Termo de consentimento livre e esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título da Pesquisa: "**LEI DOS COSSENOS NO AMBIENTE *GEOGEBRA*: Proposta de um experimento de ensino envolvendo os registros de representações semióticas**"

Nome do (a) Pesquisador (a): **Lidiane Ferreira Nunes – RG: 473.939**

Nome do (a) Orientador (a): **Monica Karrer – RG: 9304497-5**

Telefones para contato: (13) 3387 – 4309 / (13)9756-2857 / (11) 99687 - 7012

Instituição dos pesquisadores: Universidade Bandeirante Anhanguera

Local: Unidade Maria Cândida

R. Maria Cândida, 1813 – 4º andar –Vila Guilherme – São Paulo – SP

Este documento é um convite ao aluno para participar da pesquisa científica no campo da Educação Matemática intitulada "**LEI DOS COSSENOS NO AMBIENTE *GEOGEBRA***: *Proposta de um experimento de ensino envolvendo os registros de representações semióticas".*

Você participará da pesquisa realizando atividades sobre a definição e a aplicação da lei dos cossenos. Os dados serão coletados da seguinte forma: coleta do material escrito e entrevista. Tal entrevista será realizada por meio de um questionário escrito, de forma individual, em local e data agendada entre o sujeito da pesquisa e o pesquisador.

Você tem a liberdade para recusar o convite e, ainda, poderá suspender o seu consentimento de participação em qualquer etapa da pesquisa. Salienta-se que sempre que quiser, você poderá pedir mais informações sobre a pesquisa, entrando em contato com os pesquisadores responsáveis.

O projeto dessa investigação visa promover a aprendizagem da lei dos cossenos para alunos do primeiro ano do Ensino Médio, explorando as diferentes representações.

Não há situações de risco ou de desconforto na participação dessa pesquisa e ela também não traz complicações legais, considerando que a investigação é de cunho pedagógico e será realizada no ambiente escolar. Os procedimentos adotados nesta pesquisa obedecem aos Critérios da Ética em Pesquisa com Seres Humanos, conforme Res. 196/96 do Conselho Nacional de Saúde. Nenhum dos procedimentos usados oferece riscos a sua dignidade.

Ressaltamos que a sua participação nessa pesquisa não terá qualquer benefício direto. No entanto, esperamos que esse estudo proporcione informações importantes sobre a aprendizagem da lei dos cossenos, de forma a contribuir para o ensino desse conteúdo.

Todas as informações coletadas nesse estudo são estritamente confidenciais. Somente o pesquisador e a orientadora terão conhecimento dos dados. Os resultados dessa pesquisa poderão ser divulgados e publicados pelo pesquisador com fins

educacionais e no âmbito acadêmico e, para isso, os participantes terão seus nomes trocados por pseudônimos, preservando a identidade do sujeito em sigilo. Ainda, a escola onde o experimento será realizado não será identificada.

Ressaltamos que não haverá despesas pessoais para o participante em qualquer fase do estudo, assim como não há compensação financeira relacionada à sua participação.

Desde já agradecemos sua contribuição, a qual será de extrema importância para que os objetivos deste trabalho sejam atingidos.

Após estes esclarecimentos, solicitamos o seu consentimento de forma livre e esclarecida para participar desta pesquisa.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____, portador do RG______________________________, responsável legal por ____ residente na Rua ____, com número de telefone ___________________ e e-mail ______________________________, abaixo assinado, declaro estar suficientemente informado a respeito das informações que li anteriormente, a respeito do projeto **"A LEI DOS COSSENOS NO AMBIENTE *GEOGEBRA*: Proposta de um experimento de ensino envolvendo os registros de representações semióticas"** e dou meu consentimento livre e esclarecido para ____ participar como voluntário da pesquisa supracitada, sob a responsabilidade de Monica Karrer, professora do curso de Mestrado em Educação Matemática da UNIBAN ANHANGUERA e de Lidiane Ferreira Nunes, mestranda do mesmo curso.

Assinando este Termo de Consentimento, estou ciente de que:

a) O objetivo principal dessa pesquisa é investigar a aprendizagem da lei dos cossenos com alunos do 1º ano do Ensino Médio, por meio de um experimento de ensino.
b) a realização desta pesquisa é fundamental para o progresso na Educação Matemática no Brasil, para que ações possam ser implementadas para a melhoria do ensino desta disciplina.
c) a minha participação no estudo limita-se ao experimento de ensino sobre a lei dos cossenos no ambiente *Geogebra*.
d) assim que a pesquisa terminar poderei ter acesso aos resultados globais do estudo.
e) poderei entrar em contato com os pesquisadores responsáveis Lidiane Ferreira Nunes, pelo e-mail lidimatematica@hotmail.com e Profa. Dra. Monica Karrer, pelo e-mail mkarrer@uol.com.br ou ainda, pelo telefone 2967-9119 sempre que julgar necessário.
f) obtive todas as informações necessárias para poder decidir conscientemente sobre a participação do menor sob minha responsabilidade na referida pesquisa.
g) este Termo de Consentimento é feito em duas vias, de maneira que uma permanecerá em meu poder e a outra com a pesquisadora responsável.

______________________, _____ de ____________________ de 2013.

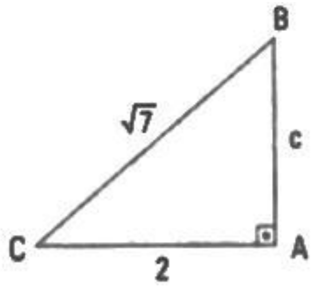
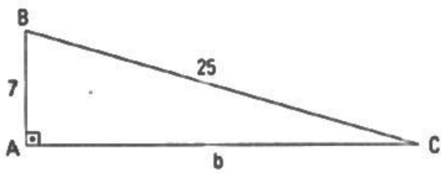
Assinatura do sujeito de pesquisa / Representante Legal	Profa. Lidiane Ferreira Nunes	Profa. Dra. Monica Karrer

APÊNDICE B – Atividade exploratória individual

ATIVIDADE EXPLORATÓRIA INDIVIDUAL

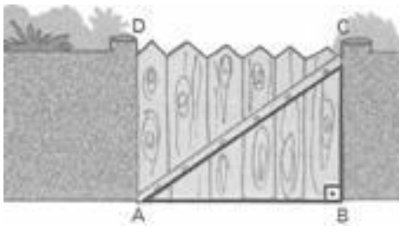
Nome: ____

1 – Determine x:

<table>
<tr>
<td>a)

</td>
<td>b)

</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

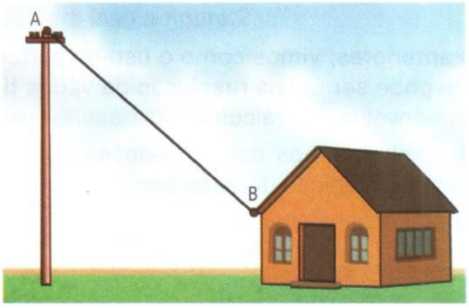
Fonte: Giovanni, José Ruy. Aprendendo Matemática. – Ed. Renovada. – São Paulo: FTD, 2007. – (Coleção aprendendo matemática)

2 – Ao lado, o portão de entrada de uma casa tem 4m de comprimento e 3m de altura. Que comprimento teria uma trave de madeira que se estendesse do ponto A até o C?



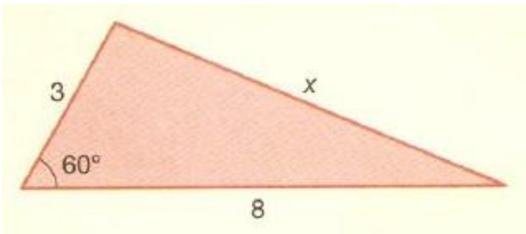
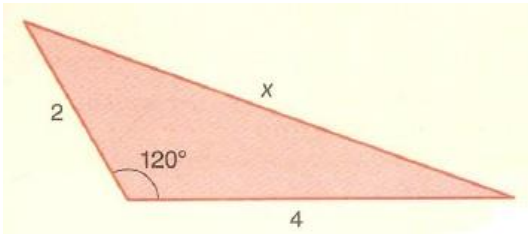
Disponível em: http://eugenialima.blogspot.com.br/2012/08/001-calcule-o-valor-do-cateto-no.html
Acesso: 19/02/2013 às: 21:38

3 – Quantos metros de fio serão necessários para ligar o ponto *A*, que fica na ponta de um poste de 9 m de altura (figura abaixo), com o ponto *B*, situado a 3 m de altura em uma caixa de luz que dista 8 m do poste?



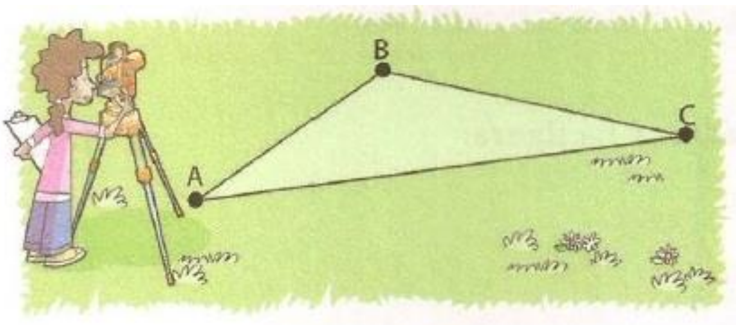
Fonte: Giovanni, José Ruy. Aprendendo Matemática. – Ed. Renovada. – São Paulo: FTD, 2007. – (Coleção aprendendo matemática)

4 – Determine o valor de x nas figuras abaixo:

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Fonte: PAIVA, Manoel. Matemática volume 2. 1ª ed. – São Paulo: Moderna, 2009.

5 – No mapeamento de uma região, uma topógrafa posicionou-se em um ponto A e visou um ponto B, a 4 km de A; a seguir visou um ponto C, a 8 km de A, tal que m $(C\hat{A}B) = 60^{o}$. Calcule a distância entre os pontos B e C.



Fonte: PAIVA, Manoel. Matemática volume 2. 1ª ed. – São Paulo: Moderna, 2009.

APÊNDICE C – Atividades com o instrumento de ensino

ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

<u>Atividades com o *Software GeoGebra*</u>

ATIVIDADE 1

Tarefa 1 – Abra o arquivo "Triângulo". Neste arquivo há um triângulo em que é possível alterar os lados e o ângulo.
Experimente realizar algumas alterações.

ATIVIDADE 2

Tarefa 1. Abra o arquivo "Triângulo1". Manipulando o *software*, varie o ângulo α de forma a obter o valor 90^0, valores menores que 90^0 e valores maiores que 90^0.

α	a^2	b^2	c^2

Tarefa 2. Tente observar alguma relação entre a^2, b^2 e c^2 e descreva o que concluiu com essa experimentação.

____
____
____
____

APÊNDICE D – Atividades com o instrumento de ensino

ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

Atividades com o *Software GeoGebra*

Redesign da Atividade 2

Tarefa 3. Abra o arquivo “Triângulo 1_2” e altere as medidas dos lados, mantendo um ângulo reto.

α	**a^2**	**c^2**	**b^2**
90º			
90º			
90º			

Que relação é possível observar?

____

____

____

APÊNDICE E – Atividades com o instrumento de ensino

ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

Atividades com o *Software GeoGebra*

Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 3)

Tarefa 4. Preencha a tabela considerando os valores obtidos na Tarefa 3.

α	$a^2 + c^2$	b^2

Que relação é possível observar?

____

____

____

APÊNDICE F – Atividades com o instrumento de ensino

ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

<u>Atividades com o *Software GeoGebra*</u>

Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 4)

Tarefa 5. Abra o arquivo "Triângulo 1_1". Varie o ângulo α de forma a obter valores menores do que 90º e valores maiores do que 90º.

α	a^2	c^2	b^2

Tente observar uma relação para o caso em que α < 90º e para o caso em que α > 90º.

____

____

____

____

____

____

APÊNDICE G – Atividades com o instrumento de ensino

ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

<u>Atividades com o *Software GeoGebra*</u>

Redesign da Atividade 2 – (Tarefa 5)

Tarefa 6a. Preencha a tabela com os casos em que $\alpha < 90^o$

α	**$a^2 + c^2$**	**b^2**

O que você observa?

____

____

____

____

Tarefa 6b. Preencha a tabela com os casos em que $\alpha > 90^o$

α	**$a^2 + c^2$**	**b^2**

O que você observa?

____

____

____

____

APÊNDICE H – Atividades com o instrumento de ensino

ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

Atividades com o *Software GeoGebra*

Redesign da Atividade 2

Na atividade anterior, vocês perceberam que (a^2 + c^2) é diferente de b^2 nos casos em que o ângulo não é igual a 90°.

Agora, analisando os dados que vocês apresentaram na ficha, façam uma comparação entre os resultados de (a^2 + c^2) e de b^2 para o caso em que $\alpha < 90^o$ e para o caso em que $\alpha > 90^o$. O que vocês podem dizer sobre cada caso?

____

____

____

____

____

____

____

____

APÊNDICE I – Atividades com o instrumento de ensino

ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

<u>Atividades com o *Software GeoGebra*</u>

ATIVIDADE 3

Tarefa 1. Abra o arquivo Triângulo 3. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo.

Tarefa 2. Partindo de suas observações, pede-se:

a) O que representa o valor de a^2? ________________________________

b) O que representa o valor de b^2? ________________________________

c) O que representa o valor de c^2? ________________________________

Tarefa 3. Abra o arquivo “Triângulo 4” e altere as medidas dos lados, conservando um dos ângulos como 90^0. O que você observa?

____

____

Tarefa 4. Abra o arquivo “Triângulo 5”. Manipulando o ângulo, pede-se:

d) Em que situações a área do quadrado de lado b é igual à soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

____

____

e) Em que situações a área do quadrado de lado b é menor que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

____

____

f) Em que situações a área do quadrado de lado b é maior que a soma das áreas dos quadrados de lados a e c?

____

____

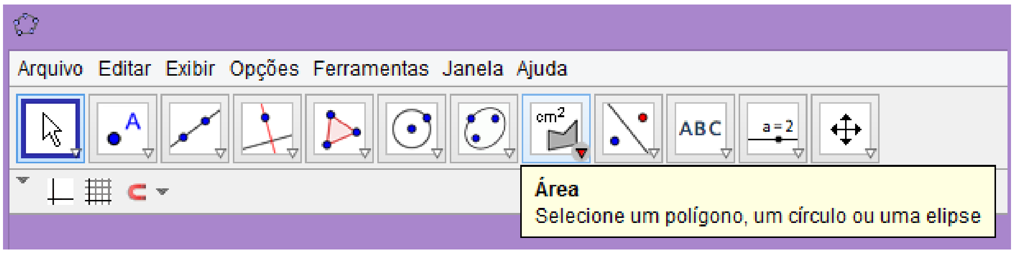
APÊNDICE J – Atividades com o instrumento de ensino

GUIA PARA ATIVIDADE 4

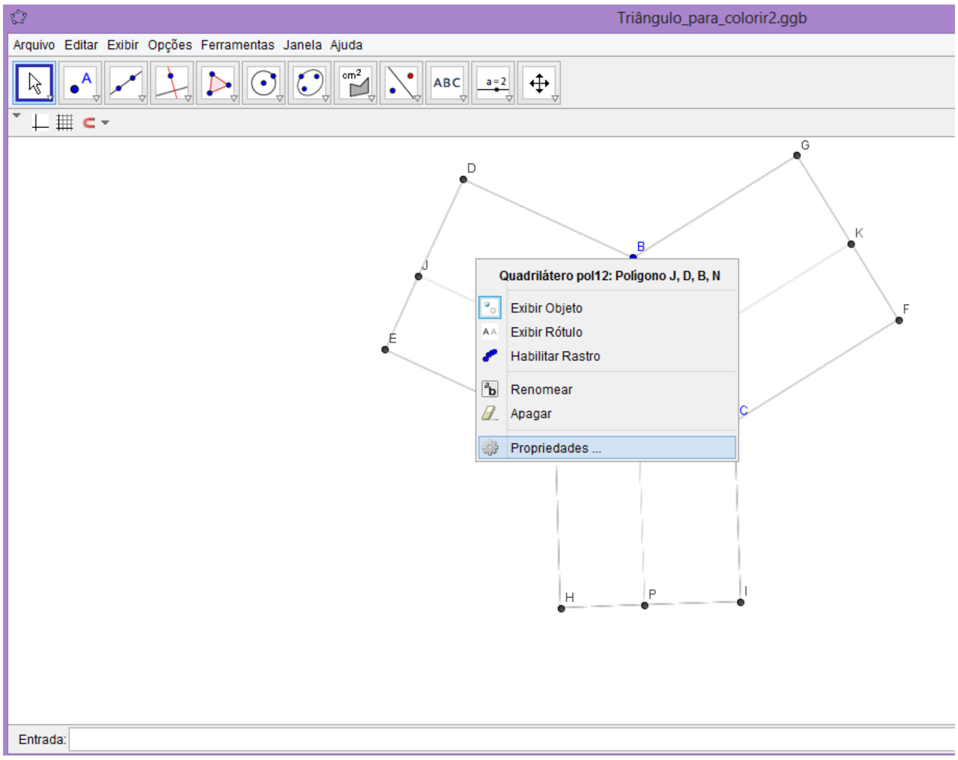
As seguintes ferramentas/modos de construção podem ser ativadas clicando nos botões da Barra de Ferramentas. Pode clicar na pequena flecha situada no canto inferior direito de um ícone para abrir um menu ('Caixa de Ferramentas') que contém ferramentas do mesmo tipo.

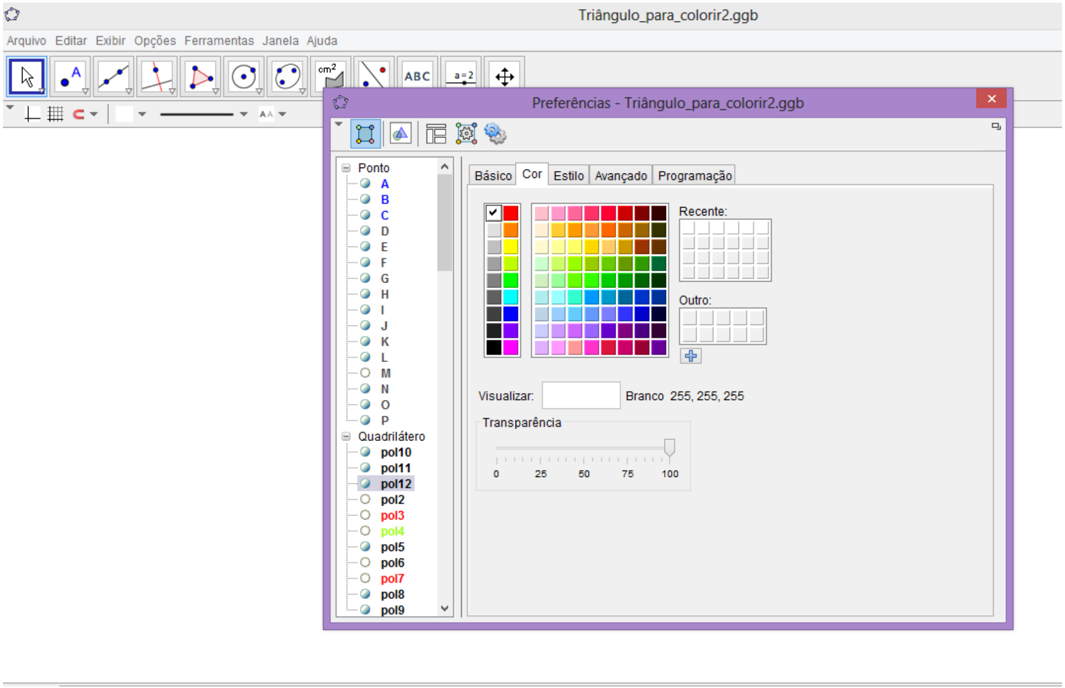
Para calcular a área de cada retângulo:

Clique na ferramenta indicada abaixo:



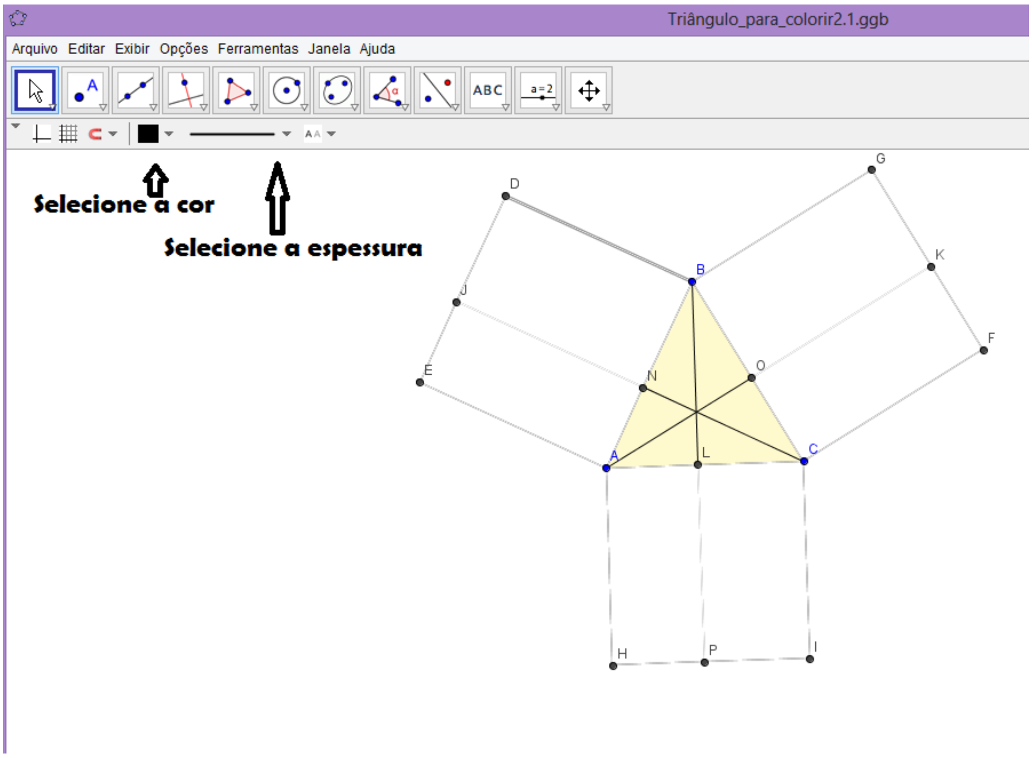
Para mudar a cor, clique com o botão direito do mouse sobre o retângulo que deseja alterar a cor, em seguida propriedade e cor. Basta escolher a cor que deseja.





Para mudar a cor do contorno:

Selecione o segmento e siga as instruções da figura abaixo:



APÊNDICE K – Atividades com o instrumento de ensino

ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

Atividades com o *Software GeoGebra*

ATIVIDADE 4

TAREFA 1 – Abra o arquivo “Colorir”. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo. Observe que cada quadrado foi dividido em dois retângulos. Utilizando o comando do *software*, determine a área de cada retângulo e pinte da mesma cor os retângulos que tiverem a mesma área.

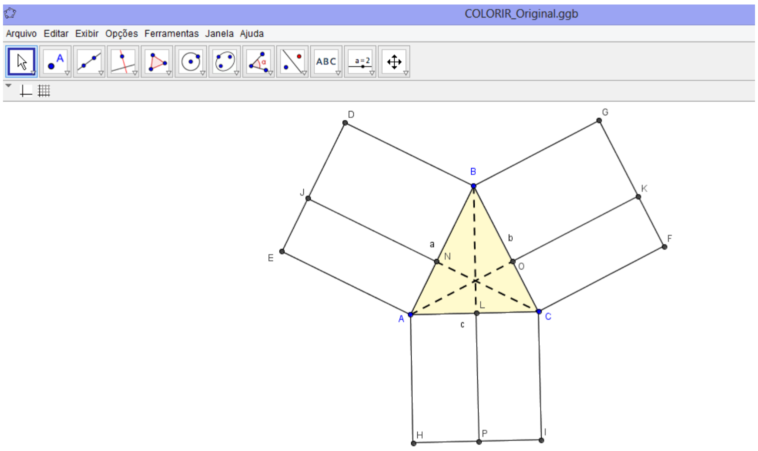


Figura 17: Colorir no ambiente*GeoGebra*. Elaborado pela autora da pesquisa.

TAREFA 2 – Manipule qualquer vértice do triângulo e verifique se os retângulos de mesma cor continuam com a mesma área.

____

____

____

____

TAREFA 3 – Pinte, com cores diferentes, os contornos dos quadrados ABDE, BCGF e ACHI.

TAREFA 4 – Complete:

Temos que:

= ( ) + ( )

Escrevendo de outra forma e , temos:

=

=

=

Determinando as áreas dos quadrados, temos que:

é o quadrado de lado _____, então a sua área é igual a __________

é o quadrado de lado _____, então a sua área é igual a __________ é o quadrado de lado _____, então a sua área é igual a __________

Neste caso, temos que:

= ____

Então:

b^2 = ____

Agora precisamos achar a área do retângulo. Para isso, faremos primeiramente uma revisão de trigonometria.

APÊNDICE L – Atividades com o instrumento de ensino

ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

Atividades com o *Software GeoGebra*

REDESIGN – ATIVIDADE 4

Tarefa 1 – Abra o arquivo “Colorir”. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo. Observe que cada quadrado foi dividido em dois retângulos. Utilizando o comando do *software*, determine a área de cada retângulo e pinte da mesma cor os retângulos que tiverem a mesma área.

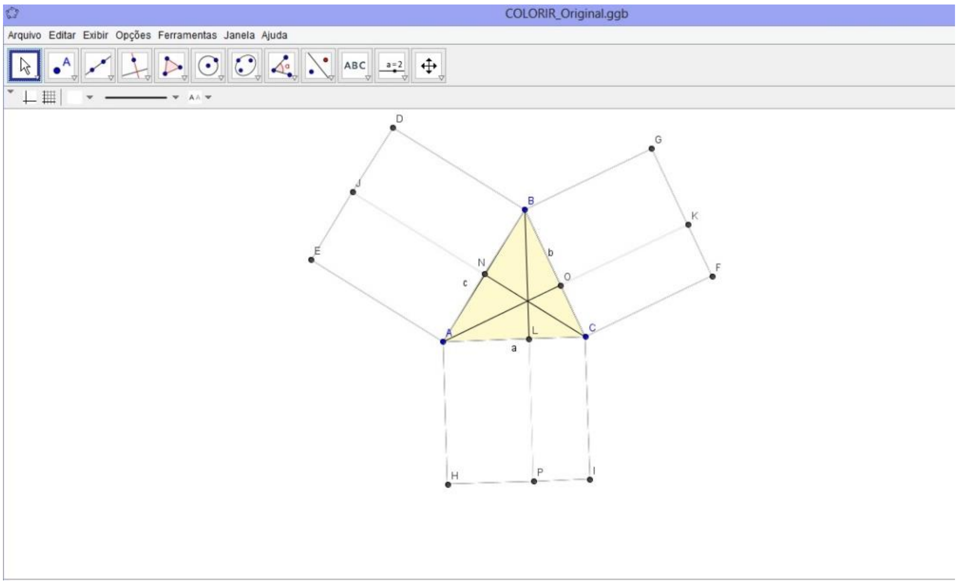


Figura 17: Colorir no ambiente *GeoGebra*. Elaborado pela autora da pesquisa.

TAREFA 2 – Manipule qualquer vértice do triângulo e verifique se os retângulos de mesma cor continuam com a mesma área.

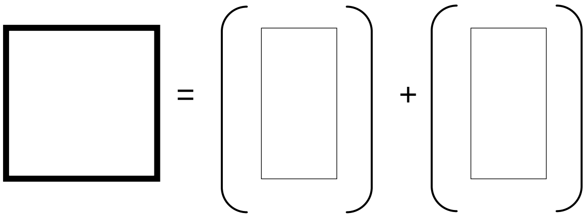
____

____

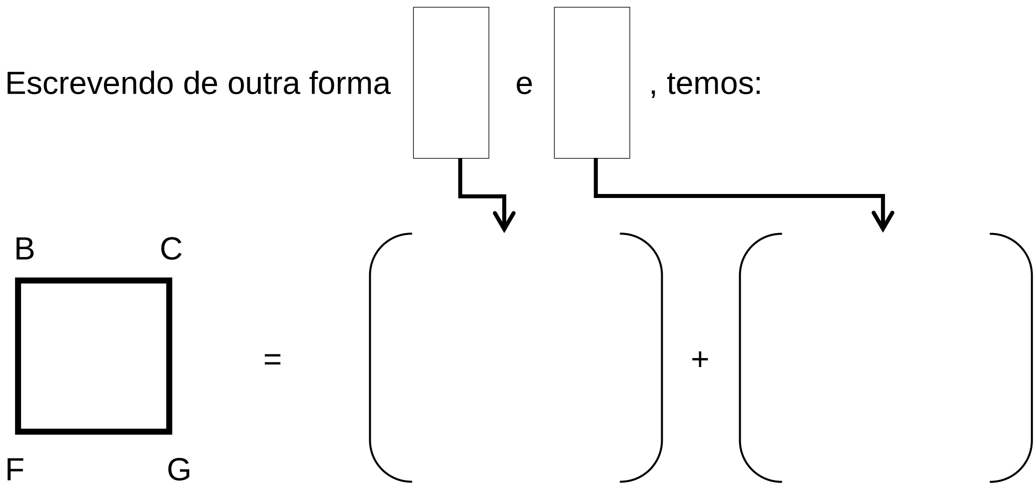
____

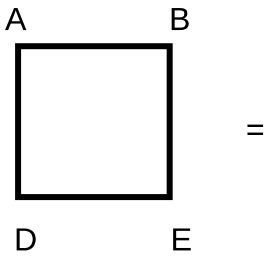
TAREFA 3 – Pinte, com cores diferentes, os contornos dos quadrados ABDE, BCGF e ACHI.

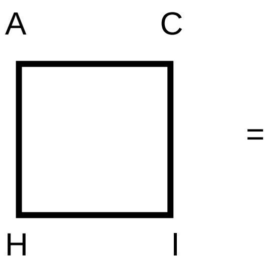
TAREFA 4 – Complete:
Temos que:



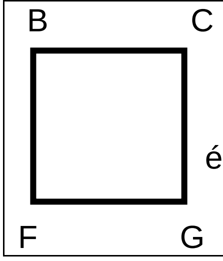
Escrevendo de outra forma e , temos:



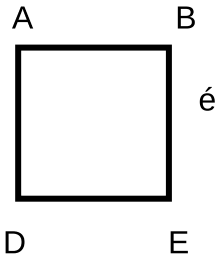




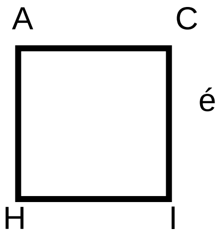
Determinando as áreas dos quadrados, temos que:



é o quadrado de lado ____, então a sua área é igual a ________

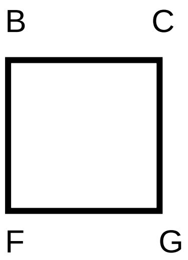


é o quadrado de lado ____, então a sua área é igual a ________



é o quadrado de lado ____, então a sua área é igual a ________

Neste caso, temos que:



= ____

Então:

b^2 = ____

Agora precisamos achar a área do retângulo. Para isso, faremos primeiramente uma revisão de trigonometria.

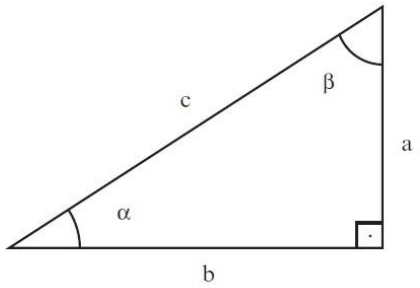
APÊNDICE M – Atividades com o instrumento de ensino

ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

ATIVIDADE 5 – PARTE 1

Tarefa 1 – Considere o triângulo abaixo:

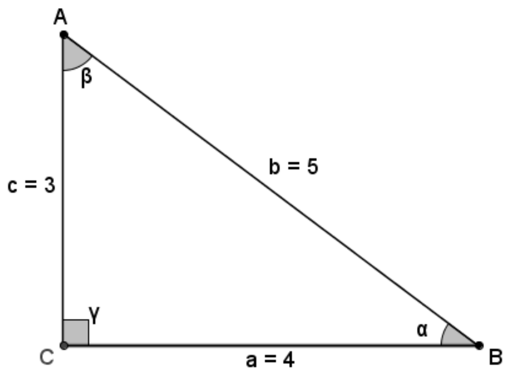


Sendo **a** e **b** os catetos opostos aos ângulos α e β, respectivamente, e **c** a hipotenusa de um triângulo retângulo, sabemos, por exemplo, que:

$c^2 = a^2 + b^2$ (Teorema de Pitágoras)	
sen $\alpha = \frac{a}{c}$, ou seja, a = c. senα; cos $\alpha = \frac{b}{c}$, ou seja, b = c.cosα; tg $\alpha = \frac{a}{b}$, ou seja, a = b.tgα;	sen $\beta = \frac{b}{c}$, ou seja, b = c.senβ; cos β = $\frac{a}{c}$, ou seja, a = c.cosβ; tgβ = $\frac{b}{a}$, ou seja, b = a.tgβ.

ATIVIDADE 5 – PARTE 2

Tarefa 1 – Considere o triângulo da figura abaixo:



a) Esse triângulo é retângulo? Justifique.

____

____

____

____

b) Calcule os cossenos dos ângulos α e β.

c) Calcule os senos dos ângulos α e β.

APÊNDICE N – Atividades com o instrumento de ensino

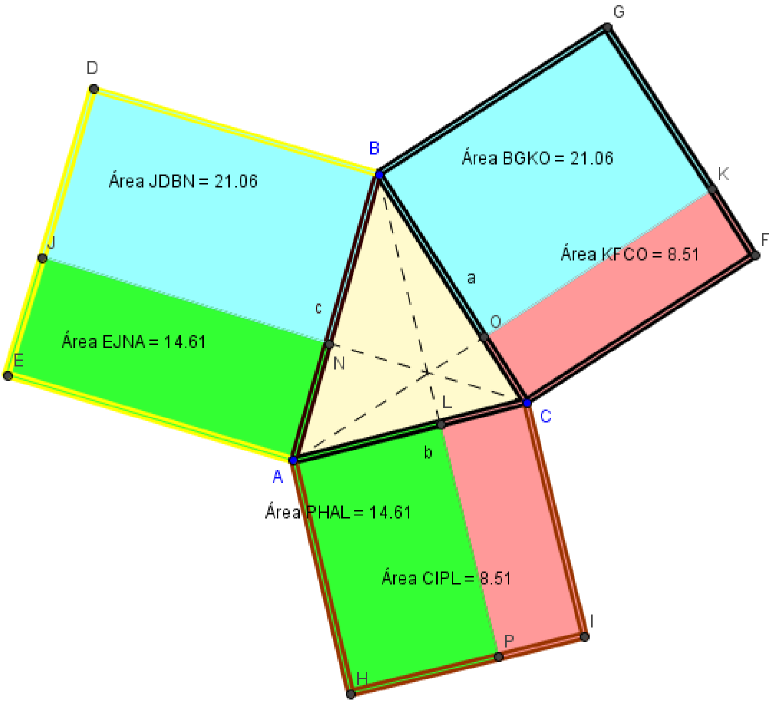
ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

<u>Atividades com o *Software GeoGebra*</u>

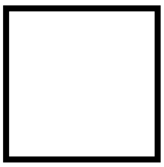
ATIVIDADE 6

Tarefa 1. Abra o arquivo "Colorir_Dupla_A". Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo. Vamos agora procurar uma relação entre os três lados de um triângulo qualquer, de lados **a**, **b** e **c**.



Tarefa 2. Vamos retomar a conclusão da atividade 4. Neste caso, temos que:

A C



= ____

H I

Então:

b^2 = ____

a) Determine a área do retângulo de cor azul claro, com base na revisão realizada na atividade 5.

b) Substitua o resultado obtido na conclusão da atividade 4. A fórmula encontrada permite que se determine a medida do lado de um triângulo qualquer, sendo conhecidas as medidas dos outros dois lados. Essa fórmula é denominada **“Lei dos Cossenos”.**

b^2 = ____

APÊNDICE O – Atividades com o instrumento de ensino

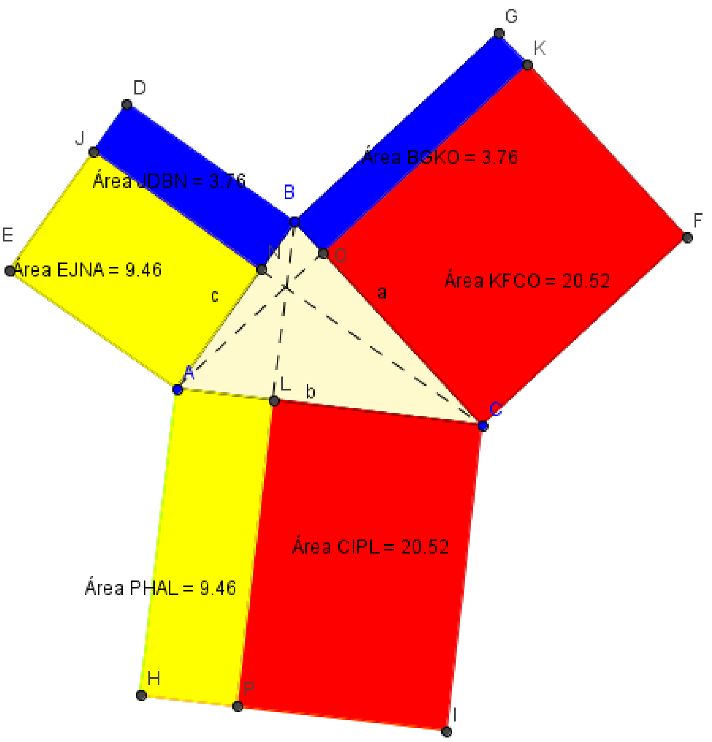
ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

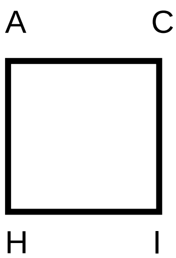
<u>Atividades com o *Software GeoGebra*</u>

ATIVIDADE 6

Tarefa 1. Abra o arquivo “Colorir_Dupla_B”. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo. Vamos agora procurar uma relação entre os três lados de um triângulo qualquer, de lados **a**, **b** e **c**.



Tarefa 2. Vamos retomar a conclusão da atividade 4. Neste caso, temos que:



= ____

Então:

b^2 = ____

a) Determine a área do retângulo de cor azul marinho, com base na revisão realizada na atividade 5.

b) Substitua o resultado obtido na conclusão da atividade 4. A fórmula encontrada permite que se determine a medida do lado de um triângulo qualquer, sendo conhecidas as medidas dos outros dois lados. Essa fórmula é denominada **“Lei dos Cossenos”.**

b^2 = ____

APÊNDICE P – Atividades com o instrumento de ensino

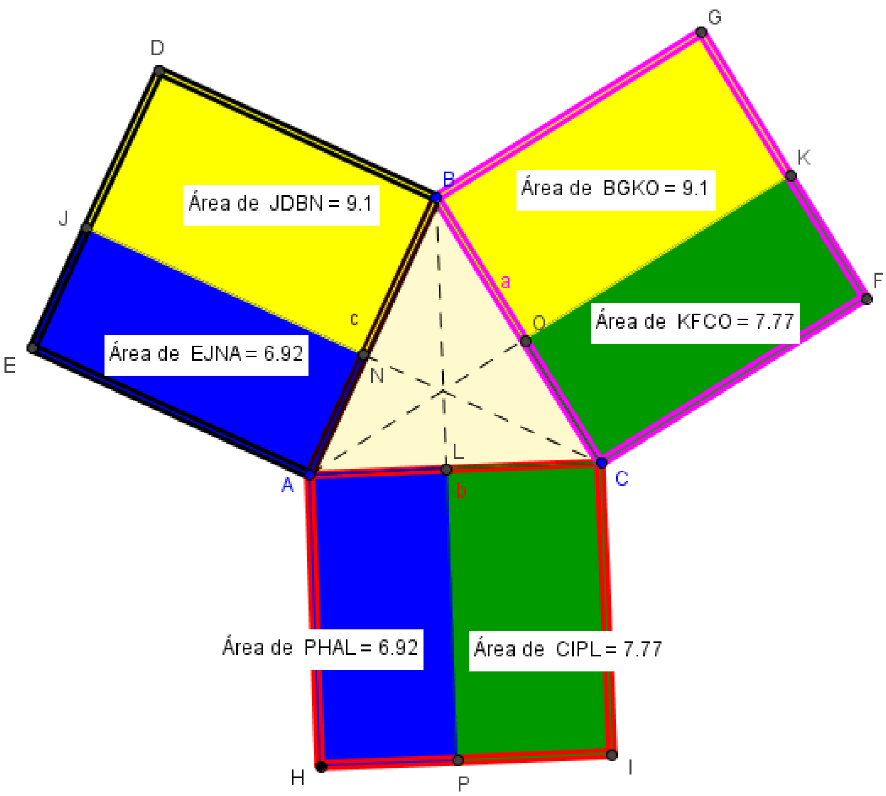
ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

<u>Atividades com o *Software GeoGebra*</u>

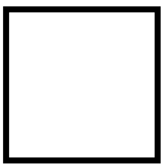
ATIVIDADE 6

Tarefa 1. Abra o arquivo “Colorir_Dupla_C”. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo. Vamos agora procurar uma relação entre os três lados de um triângulo qualquer, de lados **a**, **b** e **c**.



Tarefa 2. Vamos retomar a conclusão da atividade 4. Neste caso, temos que:

A C



= ____

H I

Então:

b^2 = ____

a) Determine a área do retângulo de cor amarela, com base na revisão realizada na atividade 5.

b) Substitua o resultado obtido na conclusão da atividade 4. A fórmula encontrada permite que se determine a medida do lado de um triângulo qualquer, sendo conhecidas as medidas dos outros dois lados. Essa fórmula é denominada **“Lei dos Cossenos”.**

b^2 = ____

APÊNDICE Q – Atividades com o instrumento de ensino

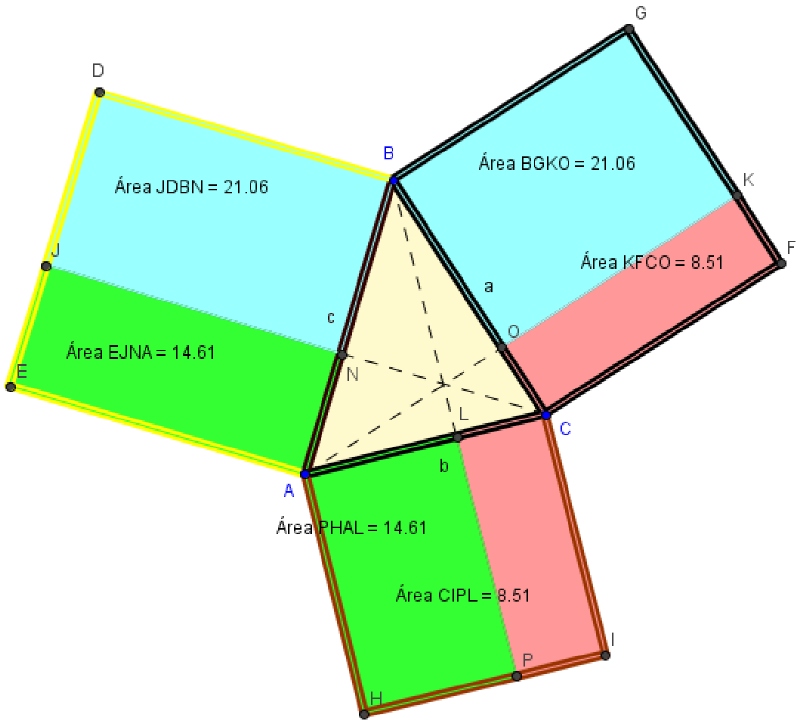
ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

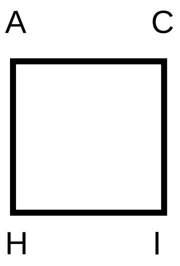
<u>Atividades com o *Software GeoGebra*</u>

***REDESIGN* ATIVIDADE 6**

Tarefa 1. Abra o arquivo “Colorir_Dupla_A”. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo. Vamos agora procurar uma relação entre os três lados de um triângulo qualquer, de lados **a**, **b** e **c**.



Tarefa 2. Vamos retomar a conclusão da atividade 4. Neste caso, temos que:

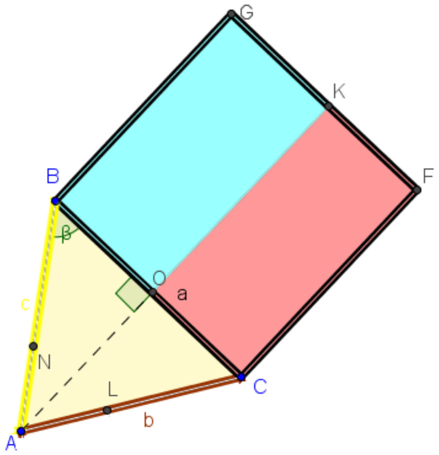


= ____

Então:

b^2 = ____

a) Determine a área do retângulo **BGKO**. Para isso, primeiramente vamos denominar a medida do lado $\overline{BO}$ de**x** e, com base na revisão realizada na atividade 5, encontrar o valor de **x**.



1º Encontrar o valor de x:

2º Determinar a área do retângulo **BGKO**:

b) Substitua o resultado obtido na conclusão da atividade 4. A fórmula encontrada permite que se determine a medida do lado de um triângulo qualquer, sendo conhecidas as medidas dos outros dois lados. Essa fórmula é denominada **"Lei dos Cossenos".**

b^2 = ____

APÊNDICE R – Atividades com o instrumento de ensino

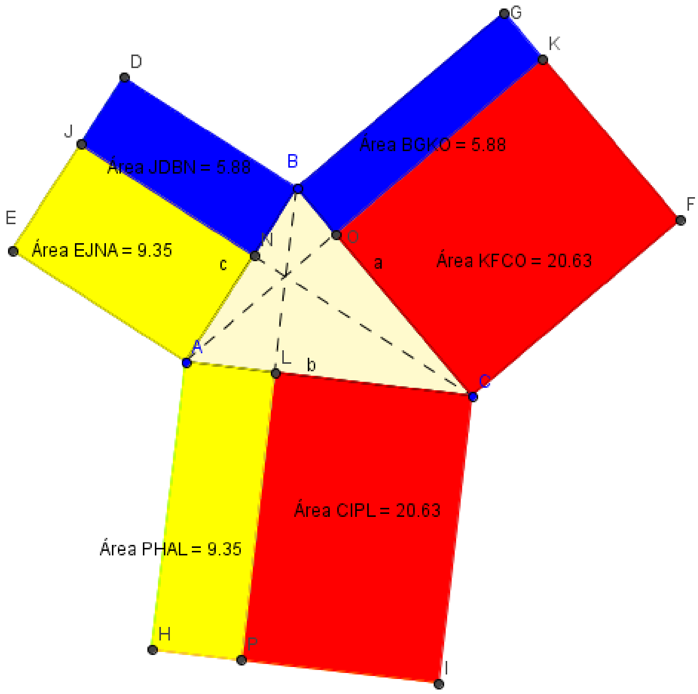
ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

<u>Atividades com o *Software GeoGebra*</u>

***REDESIGN* ATIVIDADE 6**

Tarefa 1. Abra o arquivo “Colorir_Duplas_B_e_C”. Neste arquivo foi construído um quadrado sobre cada lado do triângulo. Vamos agora procurar uma relação entre os três lados de um triângulo qualquer, de lados **a**, **b** e **c**.



Tarefa 2. Vamos retomar a conclusão da atividade 4. Neste caso, temos que:

A C

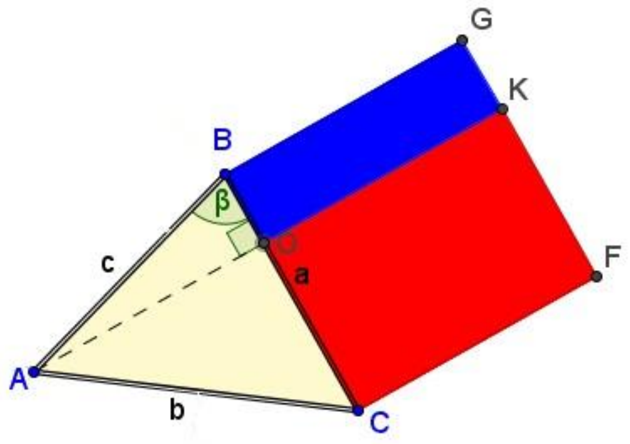
= ____

H I

Então:

b^2 = ____

a) Determine a área do retângulo **BGKO**. Para isso, primeiramente vamos denominar a medida do lado $\overline{BO}$ de **x** e, com base na revisão realizada na atividade 5, encontrar o valor de **x**.



1º Encontrar o valor de x:

2º Determinar a área do retângulo **BGKO**:

b) Substitua o resultado obtido na conclusão da atividade 4. A fórmula encontrada permite que se determine a medida do lado de um triângulo qualquer, sendo conhecidas as medidas dos outros dois lados. Essa fórmula é denominada **“Lei dos Cossenos”.**

b^2 = ____

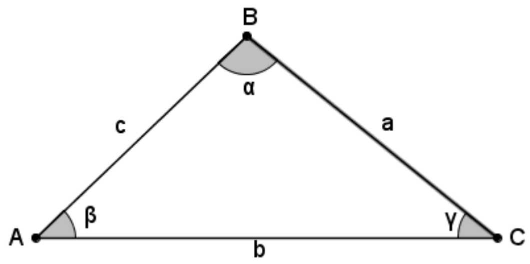
APÊNDICE S – Atividades com o instrumento de ensino

ATIVIDADES COM O INSTRUMENTO DE ENSINO

DUPLA (NOMES): ____

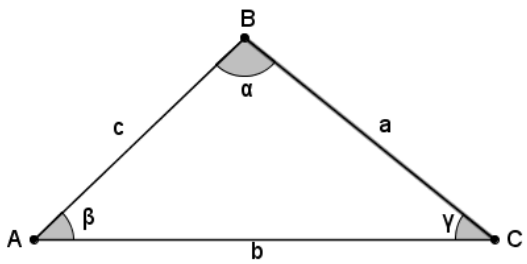
ATIVIDADE 7

Tarefa 1 – Considere o triângulo abaixo. Na atividade anterior, você concluiu que:



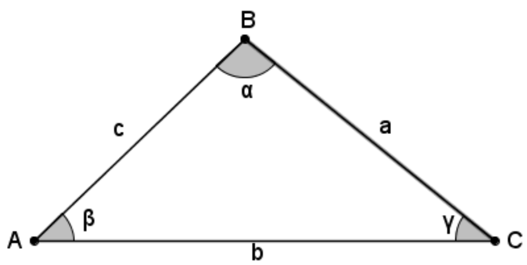
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\alpha$$

Tarefa 2 – Determine a fórmula para a obtenção da medida do lado a.



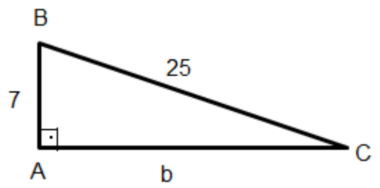
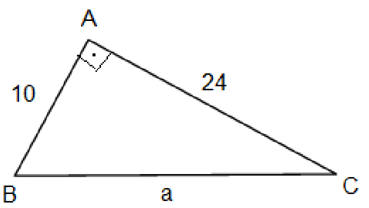
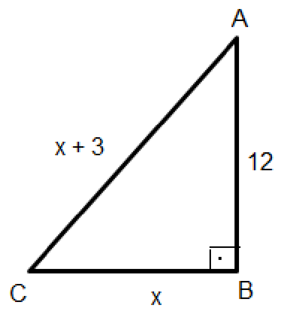
$a^2 =$ ________________________

Tarefa 3 – Determine a fórmula para a obtenção da medida do lado c.

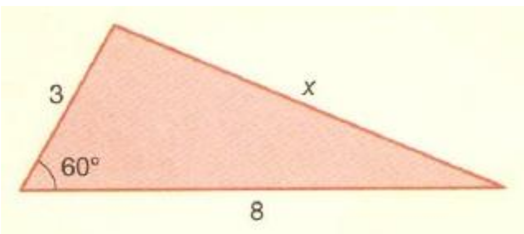
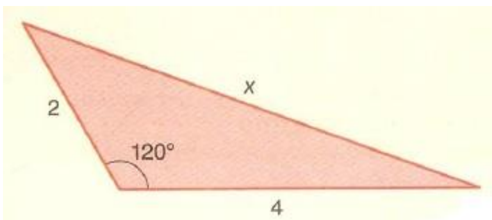


$c^2 =$ ________________________

Tarefa 4 – Determine as medidas desconhecidas, dadas em centímetros, em cada triângulo ABC:

a) 	
b) 	
c) 	

Tarefa 5 – Determine o valor de x nas figuras abaixo:

Tarefa 6 – No mapeamento de uma região, uma topógrafa posicionou-se em um ponto A e visou um ponto B, a 4 km de A; a seguir visou um ponto C, a 8 km de A, tal que m (C$\hat{A}$B) = 60º. Calcule a distância entre os pontos B e C.