



pitágoras

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

AULA 1

Professor Rogério silva

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Esta disciplina é parte da área de estruturas, dentro da engenharia civil. Ela colabora para que nossos edifícios, casas, pontes, e todas as outras estruturas que conhecemos saiam do papel e se tornem reais.

A disciplina busca trazer o conhecimento e a análise de estruturas hiperestáticas, calculando os esforços e os deslocamentos em elementos e as reações de apoio. Na primeira fase, será definido qual o grau de hiperestaticidade da estrutura. Depois, aplicaremos o método das forças ou dos deslocamentos para determinação das reações e forças internas nas estruturas. Em seguida, avaliaremos a força cortante, o momento fletor e representaremos a linha de influência. Ao final, aplicaremos o Método da Rigidez na análise matricial de estruturas ou o Processo de Cross.

Na primeira unidade, veremos como classificar a estrutura quanto ao grau hiperestático. A definição destes graus irá direcionar o modelo que usaremos para resolver a estrutura, encontrando como resultado as reações de apoio, a força cortante e o momento fletor.

Estruturas

As estruturas são sistemas compostos por um ou mais elementos, ligados entre si de forma a se tornarem estáveis. Isto significa que as estruturas devem ser capazes de receber os esforços externos, absorvê-los internamente e direcioná-los aos apoios.

Todavia, o cálculo de alguns tipos de estruturas não é tão simples de se resolver. Até o início do século passado, as estruturas estaticamente indeterminadas eram complexas demais e evitadas pelos engenheiros, pois não havia métodos tão precisos de análise como temos hoje.

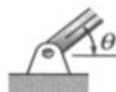
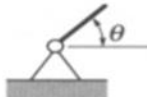
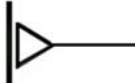
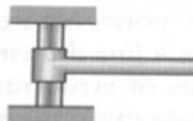
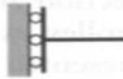
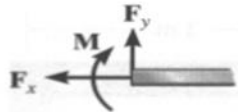
TIPOS DE ESTRUTURAS

- Estruturas hipostáticas
- Estruturas isostáticas
- Estruturas hiperestáticas

RELEMBRANDO:

ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS

são aquelas em que o número de reações de apoio é igual ao número de equações de equilíbrio disponíveis, ou seja o sistema é determinado

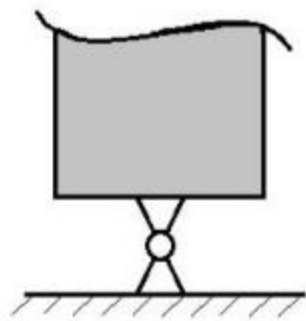
Tipo de Vínculo	Símbolo	Reações	
Articulação			
Apoio deslizante			
Luva rígida			
Apoio rígido (engaste)			

Apoio articulado (Articulação)

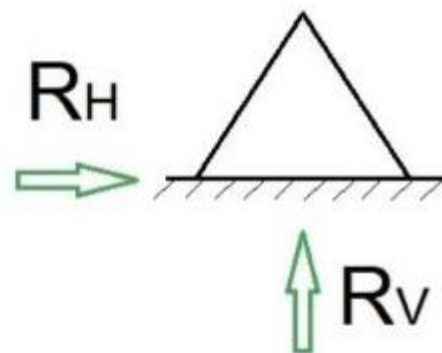
Estão impedidos os movimentos verticais e horizontais e a rotação é liberada



a)



b)



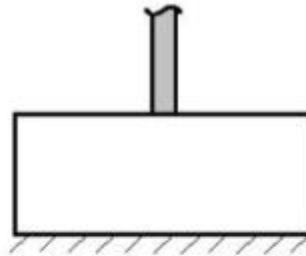
c)

Apoio rígido (Engasgamento)

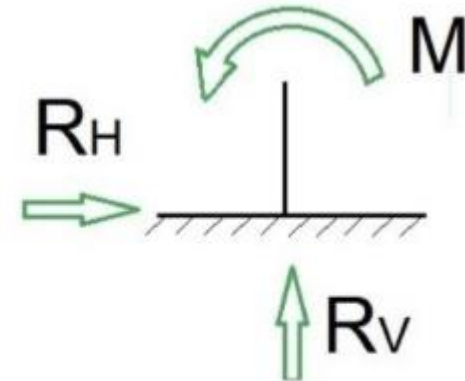
Estão impedidos todos os movimentos : verticais , horizontais e a rotação.



a)



b)



c)

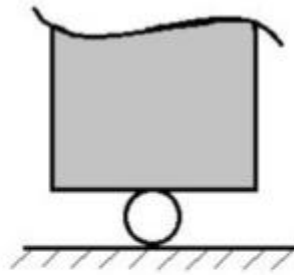
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Apoio móvel

Estão impedidos todos os movimentos : verticais , horizontais e a rotação.



a)



b)



c)

O que é uma estrutura estaticamente indeterminada?

Quando a estrutura a ser analisada tem mais reações externas e/ ou mais forças internas a serem determinadas do que as incógnitas resolvidas pelas equações de equilíbrio da estática, ela é considerada uma estrutura estaticamente indeterminada.

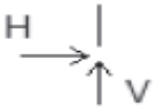
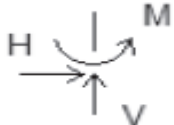
As equações de equilíbrio da estática consideram que a somatória das forças verticais, horizontais e do momento devem ser nulas.

$$\begin{aligned}\sum F_H &= 0 \\ \sum F_V &= 0 \\ \sum F_M &= 0\end{aligned}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

- Para isso, consider-se que as vinculações estão em um sistema plano, isto é, só podem se movimentar nas direções contidas neste plano. Isto não ocorre na estrutura real, mas esta consideração não interfere nas estruturas usuais analisadas.
- Já o tipo de vinculação a ser considerado no cálculo interferirá na análise da estrutura. O Quadro 1.1 apresenta os principais vínculos utilizados e suas características. O número de graus de mobilidade retirado pelo vínculo é fator determinante para a classificação da estrutura em hiperestática, isostática ou hipostática.

Quadro 1.1 | Vinculações e características

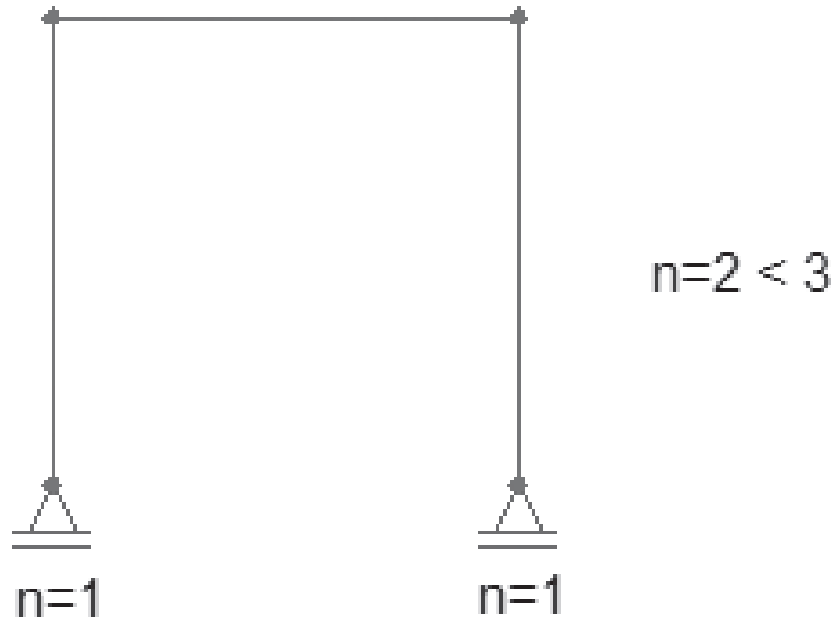
Nome do vínculo	Símbolo	Reações de apoio provocadas pelos vínculos	Números de graus de mobilidade retirados pelo vínculo (n)
Apoio móvel			1
Apoio fixo			2
Engaste			3

Fonte: elaborado pelo autor.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

As estruturas hipostáticas (Figura abaixo) são móveis em seu conjunto e apresentam grau de hiperestaticidade negativo, ou a estrutura possui uma parte móvel, o que a torna inaceitável para edificações.

Por causa do número inferior de reações de apoio que possam trazer estabilidade à estrutura, o conjunto da estrutura não é impedido de se deslocar.



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

As estruturas hipostáticas têm um número inferior de graus de mobilidade permitido pelos apoios necessários para impedir que a estrutura se movimente (Figura 1.2), mas também podem ser hipostáticas quando não tiverem restrição em ambas as direções do plano (Figura 1.3). Assim, estas estruturas têm movimento infinito e não podem ser usadas para projetos, pois seu equilíbrio é instável.

Figura 1.2 | Estrutura hipostática com graus de mobilidade permitidos pelos apoios inferiores às equações de equilíbrio



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 1.3 | Estrutura hipostática com graus de mobilidade permitidos pelos apoios superiores às equações de equilíbrio



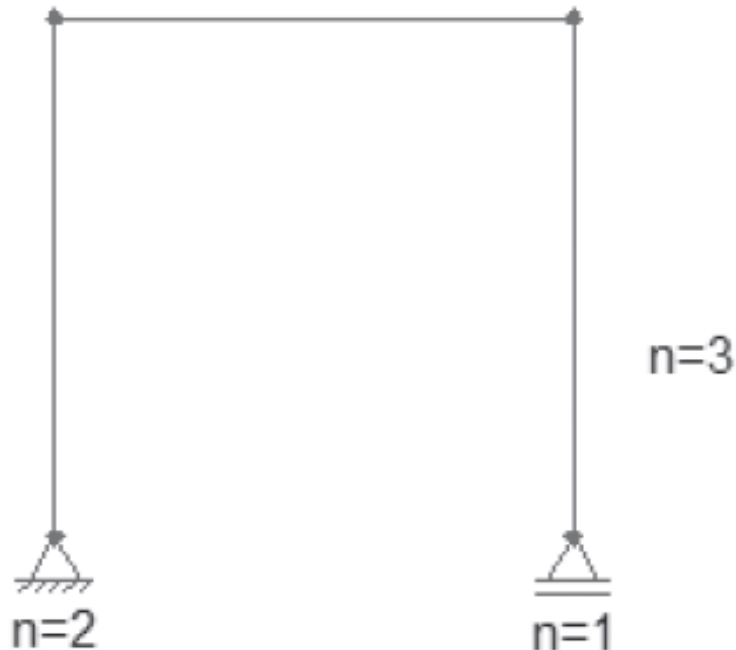
Fonte: elaborada pelo autor.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

As estruturas isostáticas (Figura 1.4) são aquelas que apresentam número de reações igual ao número de incógnitas das equações de equilíbrio e, conseqüentemente, o grau de hiperestaticidade é igual a zero.

As estruturas isostáticas apresentam um número de apoios suficiente para impedir que a estrutura se movimente (Figura 1.5) e, portanto, seu equilíbrio é estável, Exemplificando:

Figura 1.4 | Estrutura isostática

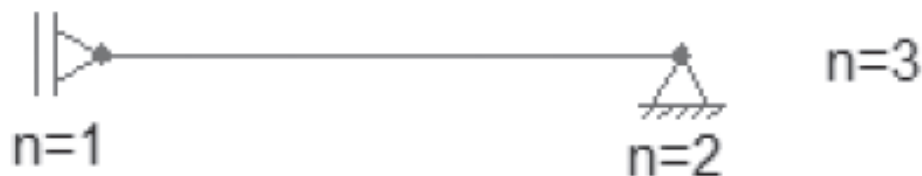


Fonte: elaborada pelo autor.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

As estruturas isostáticas apresentam um numero de apoios suficiente para impedir que a estrutura se movimente (Figura 1.5) e, portanto, seu equilíbrio e estável.

Figura 1.5 | Estrutura isostática

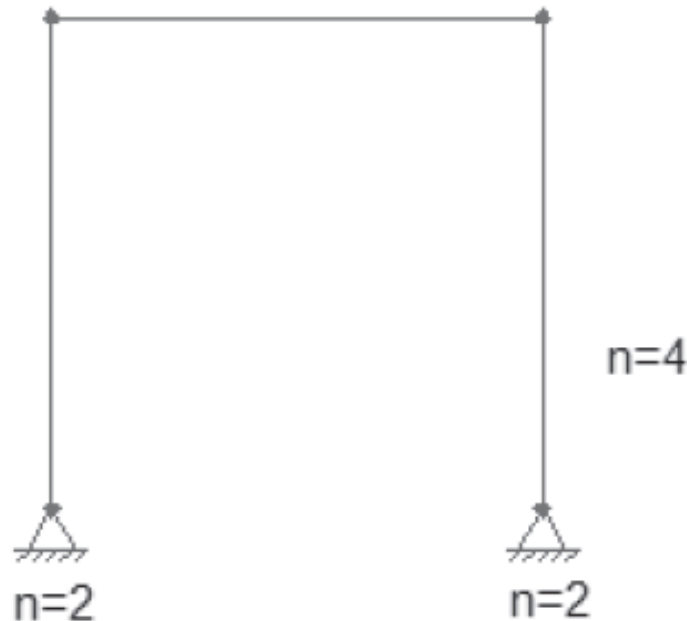


Fonte: elaborada pelo autor.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

As estruturas hiperestáticas (Figura 1.6) são aquelas em que o número de reações é maior que o número de equações da estática ou se as equações da estática não são suficientes para determinar os esforços internos, consequentemente, o grau de consequentemente é de um ou mais. Assim, não é possível determinar suas reações de apoio apenas com estas equações

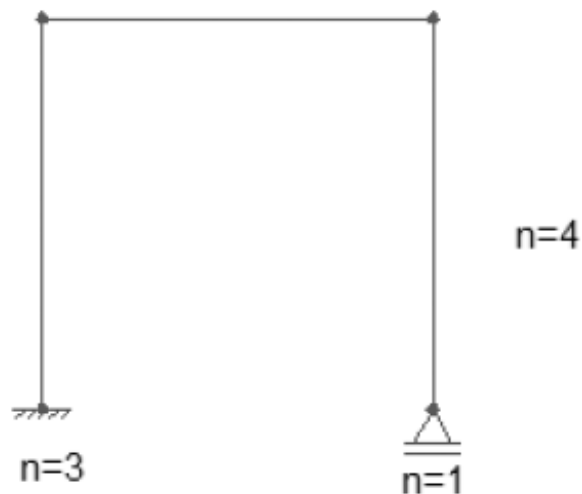
Figura 1.6 | Estrutura hiperestática



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

As estruturas hiperestáticas apresentam um numero de apoios superior ao necessário para impedir que a estrutura se movimente (Figura 1.7) e, portanto, seu equilíbrio e estável. Apesar de a análise da estrutura hiperestática ser complexa, a maioria das estruturas são hiperestáticas

Figura 1.7 | Estrutura hiperestática

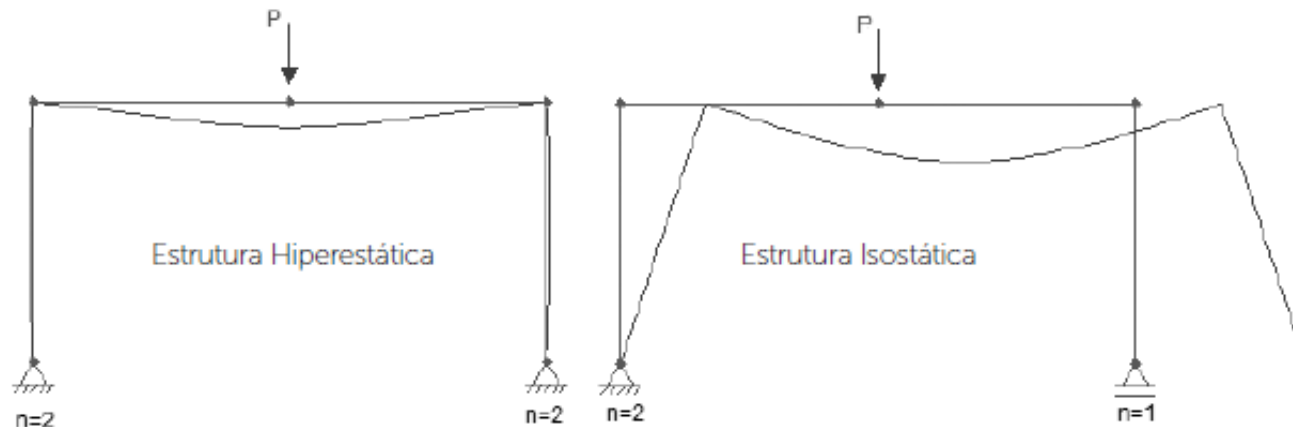


Fonte: elaborada pelo autor.

VANTAGENS DAS ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

1. Estruturas mais seguras: há uma redistribuição maior das tensões devido à rigidez da estrutura. Quando um elemento da estrutura está sendo muito solicitado, ele redistribuirá a tensão para os elementos ao seu redor, pois haverá uma redistribuição dos momentos.
2. Menor deslocamento transversal com maior rigidez: devido à maior rigidez da estrutura por causa do menor grau de liberdade, ocorrerá uma melhor distribuição dos esforços, assim como tensões menores (Figura 1.8).

Figura 1.8 | Comparação de deformação da estrutura hiperestática e isostática



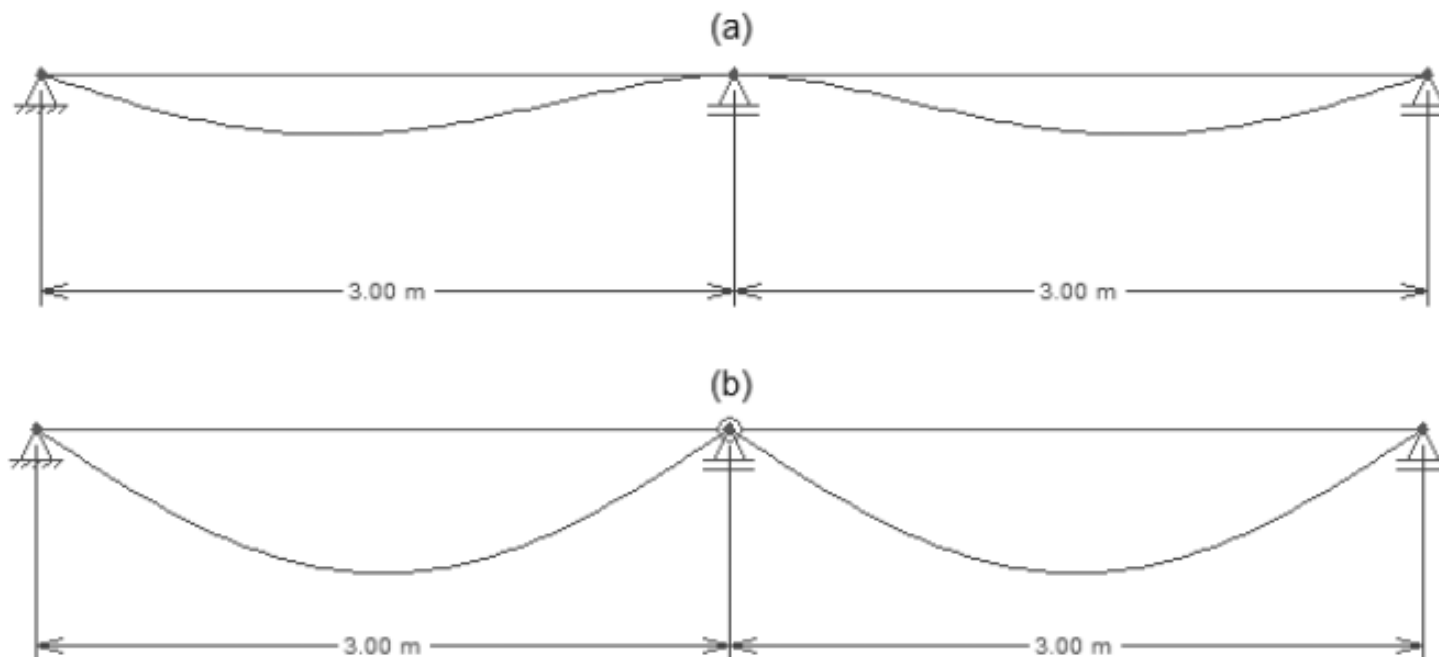
Fonte: elaborada pelo autor.

Quando as colunas são muito mais rígidas do que a viga que se apoia nelas, a rotação em suas extremidades é pequena, ficando próxima a uma viga bi engastada.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

3. Economia de material: as vigas contínuas (caso (a) da Figura 1.9), apesar de apresentarem momentos negativos maiores nos apoios, tem momentos positivos menores no meio do vão e, conseqüentemente, isso gera uma economia de material. Já as vigas simplesmente apoiadas (caso (b) da Figura 1.9) apresentam momentos fletores maiores no meio do vão e maior gasto com material, o que significa vigas de seções maiores e maior peso sendo descarregado na fundação.

Figura 1.9 | Deformada: (a) viga contínua; (b) viga rotulada no apoio central



DESVANTAGENS DAS ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

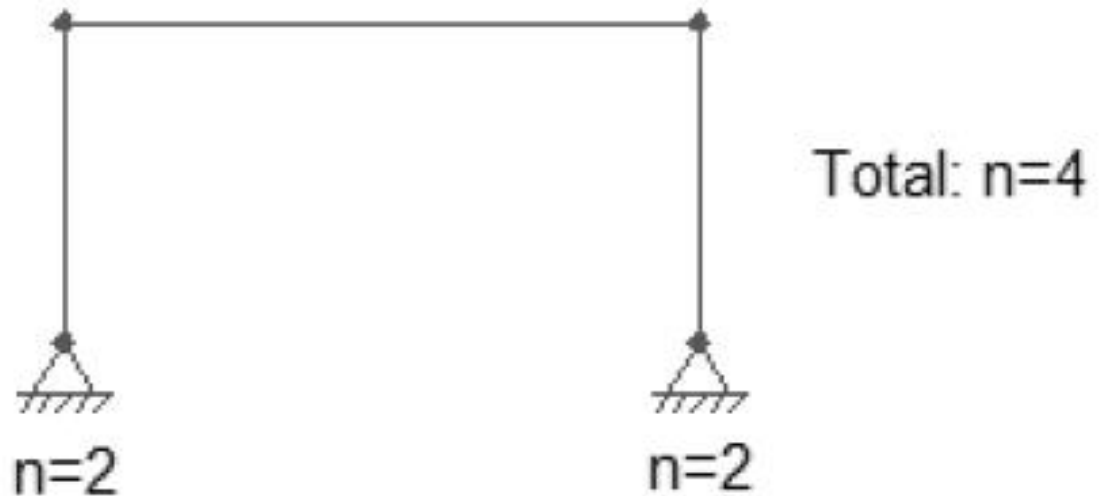
1. Modelos de calculo mais complexos: devido a complexidade dos modelos de calculo, pode-se gerar algumas dificuldades na analise estrutural e em projeto.
2. Devido a recalques dos apoios podem surgir problemas significativos: caso ocorra algum tipo de recalque nos apoios, devido a maior rigidez da estrutura, isso pode acarretar mudanças nos valores de momento fletor e torcer, no esforço cortante, nas forcas de reação e nos esforços normais dos elementos estruturais.
3. Tensões não consideradas podem gerar variações significativas: tensões geradas devido a má execução do material ou a variações de temperatura não consideradas, podem gerar uma modificação da posição relativa do elemento, o que gerara variações nos esforços atuantes ao longo da estrutura.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

ESTRUTURAS EXTERNAMENTE HIPERESTÁTICA

As estruturas externamente hiperestáticas são aquelas em que o número de reações é maior do que as equações de equilíbrio da estática (Figura 1.10).

Figura 1.10 | Exemplo de estrutura externamente hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.

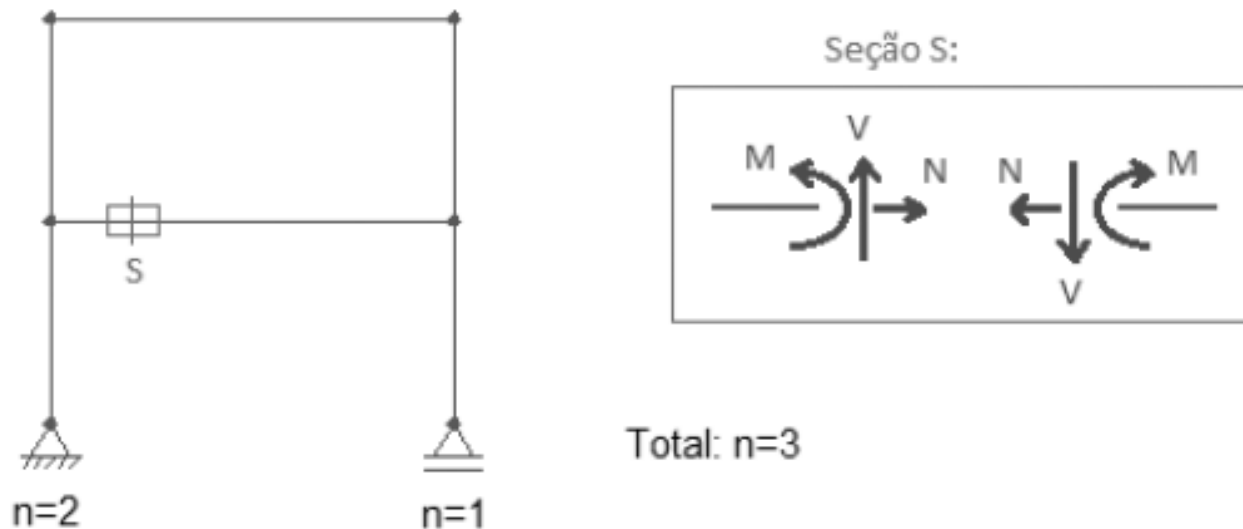
As estruturas externamente hiperestáticas são aquelas que apresentam o número de reações de apoio superior a três

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

ESTRUTURAS INTERNAMENTE HIPERESTÁTICA

Apesar de a estrutura ser isostática externamente, caso não seja possível determinar os esforços das seções ao longo da estrutura, utilizando as equações de equilíbrio da estática, esta estrutura é considerada internamente hiperestática (Figura 1.11).

Figura 1.11 | Exemplo de estrutura internamente hiperestática



Total: $n=3$

Fonte: elaborada pelo autor.

As estruturas internamente hiperestáticas são aquelas que apresentam todas as reações de apoio conhecidas, entretanto, devido a geometria de sua estrutura, um conjunto de barras não articulado entre si, formam uma poligonal fechada.

GRAU HIPERESTÁTICO

O grau hiperestático da estrutura é determinado somando-se o grau hiperestático interno e externo.

Ao se retirar determinadas reações, seguindo certos critérios, as estruturas hiperestáticas continuam a não apresentar quaisquer movimentos, portanto, estáveis. Assim, o grau de estáveis é igual ao número de reações que pode ser suprido, até que a estrutura se torne isostática.

Dessa forma, para a estrutura isostática, que tem grau de isostática nulo, podem ser utilizadas as equações de equilíbrio da estática.

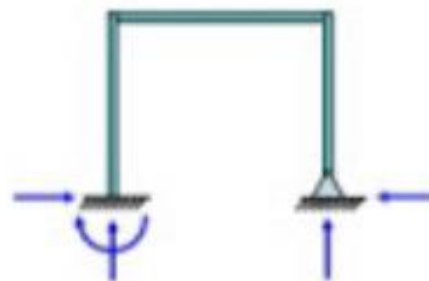
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

As estruturas cujo nº de reações é superior ao necessário para manter o equilíbrio. Para a resolução de problemas deste tipo, é feita escolha criteriosa para a retirada dos apoios de maneira que a estrutura permaneça em equilíbrio, tornando-se assim uma estrutura estável.

O grau de Hiperestaticidade é igual ao nº de reações que devem ser retiradas para se tornar um problema isostático, assim facilitando a solução.



Estrutura hiperestática – grau de hiperestaticidade = 1.



Estrutura hiperestática – grau de hiperestaticidade = 2.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

As vigas com um grau hiperestático são definidas em função de suas reações de apoio e suas rotulas.

A formula dada para encontrar o grau hiperestático (g) de uma viga e dada por

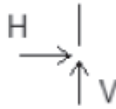
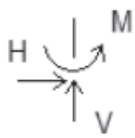
$$g = R - (E + r)$$

As rotulas geram equações extras e são somadas as equações de equilíbrio da estática.

R: reações de apoio

E: equações de equilíbrio da estática (=3)

r: número de rótulas

Nome do vínculo	Símbolo	Reações de apoio provocadas pelos vínculos	Números de graus de mobilidade retirados pelo vínculo (n)
Apoio móvel			1
Apoio fixo			2
Engaste			3

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

$$g = R - (E + r)$$

As vigas são estruturas fundamentais nas construções. Como vigas com um grau hiperestático (Figura 1.16 e 1.17), podemos ter:

Figura 1.16 | Exemplo 1 – viga com um grau hiperestático



Fonte: elaborada pela autora.

$$R = 2 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$E = 3$$

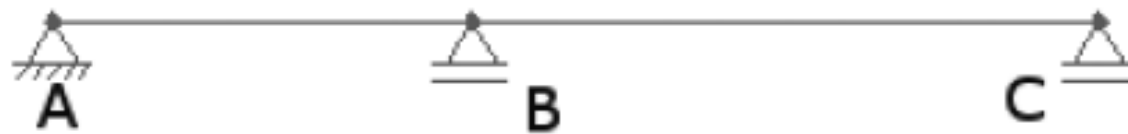
$$r = 1$$

$$g = 5 - (3 + 1) = 1$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

$$g = R - (E + r)$$

Figura 1.17 | Exemplo 2 – viga com um grau hiperestático



Fonte: elaborada pela autora.

$$R = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$E = 3$$

$$r = 0$$

$$g = 4 - (3 + 0) = 1$$

PÓRTICOS COM UM GRAU HIPERESTÁTICO

Pórticos são estruturas formadas por barras horizontais, verticais e/ou inclinadas, que formam quadros entre si. Os pórticos são amplamente utilizados nas construções civis, principalmente em edifícios. A maioria dos arranjos estruturais utilizados são hiperestáticos. Para os pórticos, de modo geral, o grau de hipergeometria é dado pela fórmula:

$$g = R - (E + r)$$

Onde:

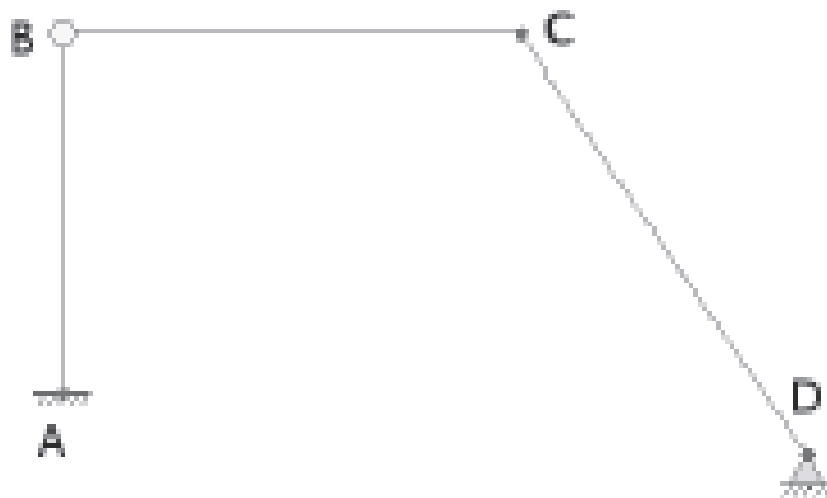
R: reações de apoio.

E: equações de equilíbrio.

r: número de equações referentes a rótula, dado pela fórmula:

$$r = (\text{barras conectadas a rótula}) - 1$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



R : reações de apoio.

E: equações de equilíbrio.

r: numero de equações referentes a rotula,
dado pela formula:

$$r = (\text{barras conectadas a rótula}) - 1$$

Fonte: elaborada pela autora.

$$R = 3 + 2 = 5$$

$$E = 3$$

$$r = 1 \rightarrow (2 - 1)$$

$$g = 5 - (3 + 1) = 1$$

$$g = R - (E + r)$$

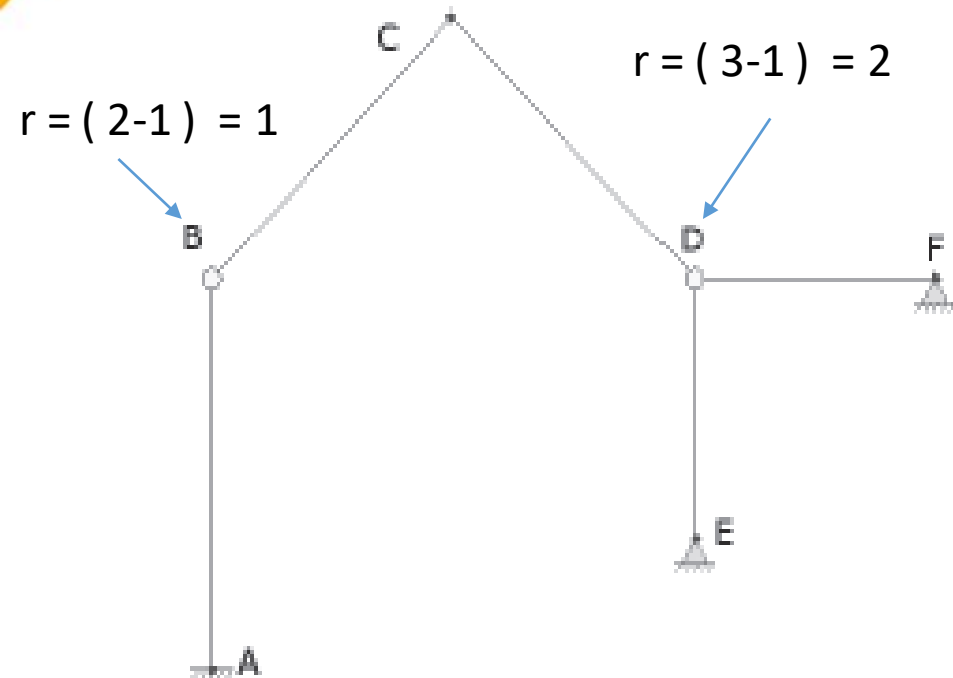
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

R : reações de apoio.

E: equações de equilíbrio.

r: numero de equações referentes a rotula, dado pela formula:

$$r = (\text{barras conectadas a rótula}) - 1$$



$$(2-1)$$

$$g = R - (E + r)$$

$$R = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$E = 3$$

$$r = 1 + 2 = 3$$

$$g = 7 - (3 + 3) = 1$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



AULA 2

Método dos deslocamentos
Método das forças

Professor Rogério silva

TRELIÇAS COM UM GRAU HIPERESTÁTICO

As treliças são amplamente utilizadas em coberturas, pontes etc. Para determinação do grau hiperestático, as incógnitas a serem resolvidas nas treliças são:

- Número de barras (b).
- As reações nos apoios em função do tipo de vínculo (R), dadas

Para uma estrutura isostática, a soma destas incógnitas deve ser igual a duas vezes o número de nós:

Sendo que n é o número de nós.

Isso significa que para cada nó da estrutura teremos duas equações.

$$R + b = 2 * n$$

O grau de hiperestaticidade é dado por:

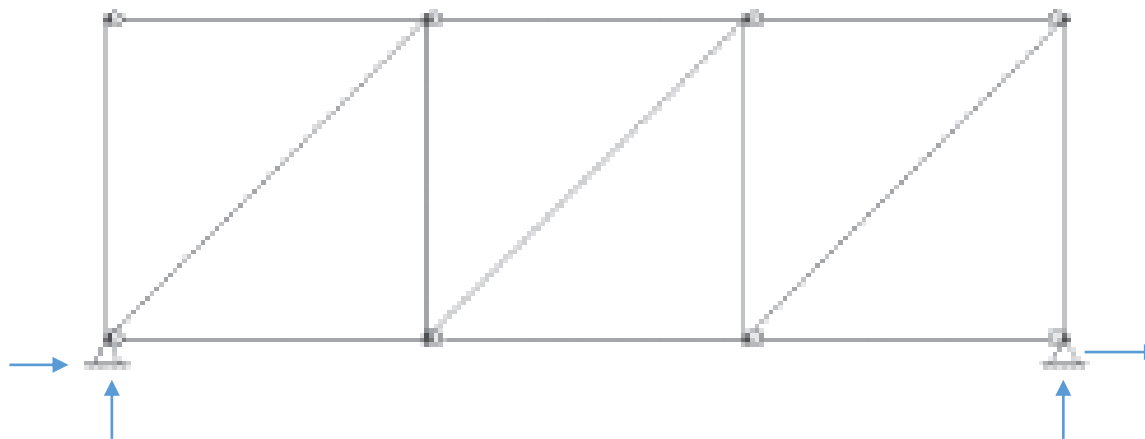
$$g = (R + b) - (2 * n)$$

Quando $g = 1$, a estrutura será uma vez hiperestática.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

As treliças podem ser externamente hiperestáticas (Figura 1.21)

Figura 1.21 | Treliça externamente hiperestática



Fonte: elaborada pela autora.

Seguindo a formula dada, podemos verificar as diferenças dos tipos de treliça com um grau de hiperstaticidade:

$$g = (R + b) - (2 * n)$$

$$R = 2 + 2 = 4$$

$$b = 13$$

$$n = 8 \rightarrow 2n = 16$$

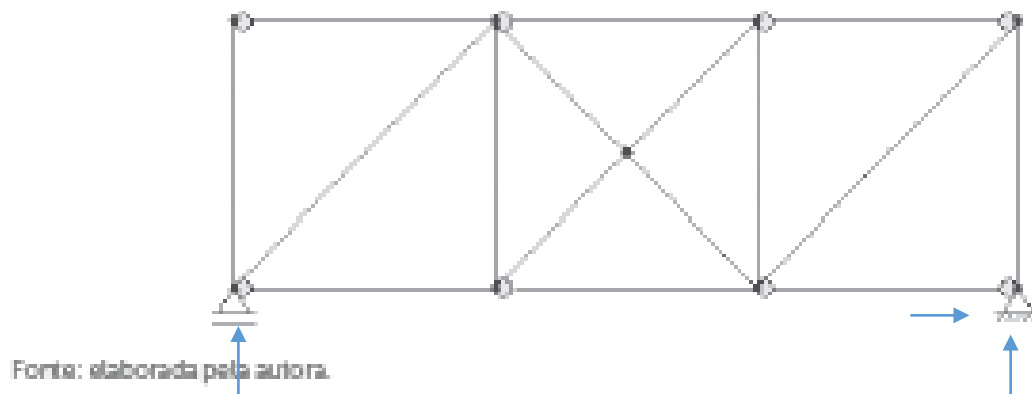
$$g = (4 + 13) - (2 * 8) = 1$$

A incógnita para este caso é a reação de apoio, portanto, a estrutura é externamente hiperestática.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

As treliças podem ser internamente hiperestáticas

Figura 1.22 | Treliza internamente hiperestática



Neste caso específico, as barras que se cruzam em “x” apenas se cruzam, mas não estão ligadas entre si, sendo barras independentes.

$$g = (R + b) - (2 * n)$$

$$R = 1 + 2 = 3$$

$$b = 14$$

$$n = 8 \rightarrow 2n = 16$$

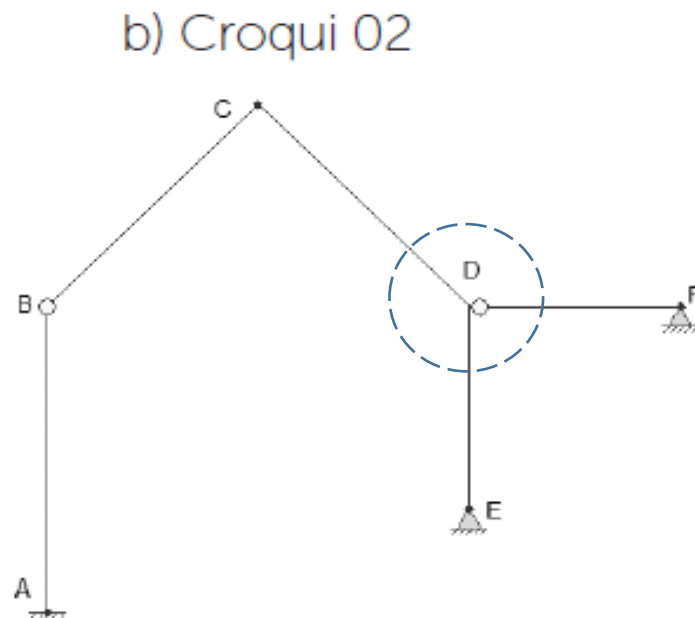
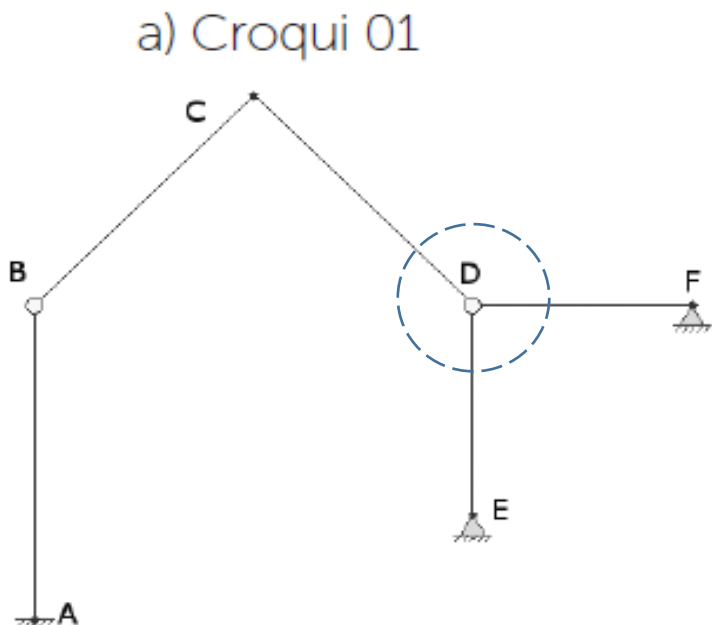
$$g = (3 + 14) - (2 * 8) = 1$$

A incógnita para este caso são os esforços nas barras, portanto, a estrutura é internamente hiperestática

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Graus de hiperatividade diferentes em função das possíveis nós de um pórtico
Qual é a principal diferença entre as estruturas apresentadas? O que isso acarreta?

Figura 1.24 | Croquis de estruturas

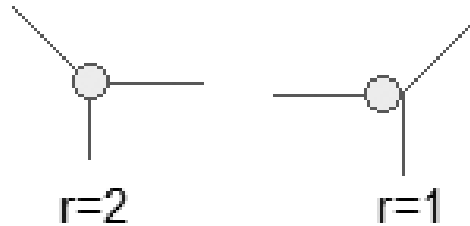


Fonte: elaborada pela autora.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

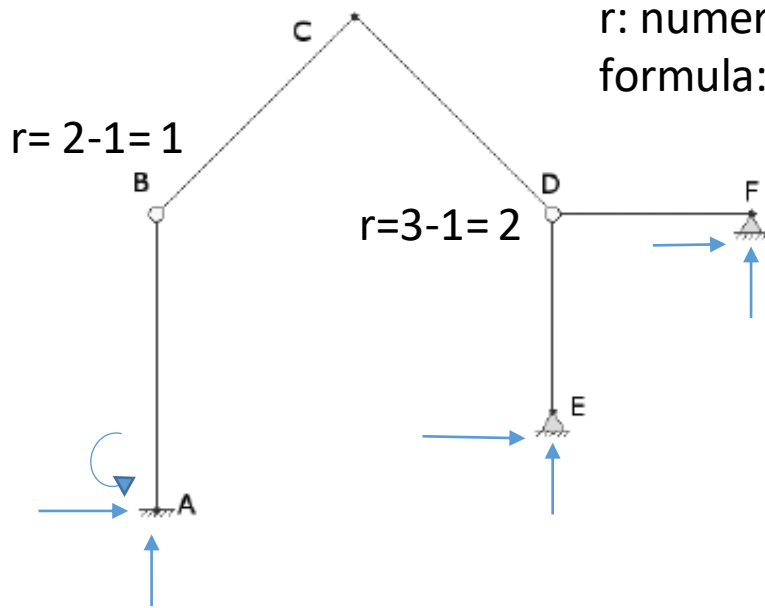
Resolução da situação-problema

A forma que as rotulas são colocadas na barra e fundamental para a determinação do grau hiperestático



No primeiro croqui, o calculo hiperestático e dado por:

a) Croqui 01



r : numero de equações referentes a rotula, dado pela formula: $r = (\text{barras conectadas a rótula}) - 1$

$$g = R - (E + r)$$

$$R = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$E = 3$$

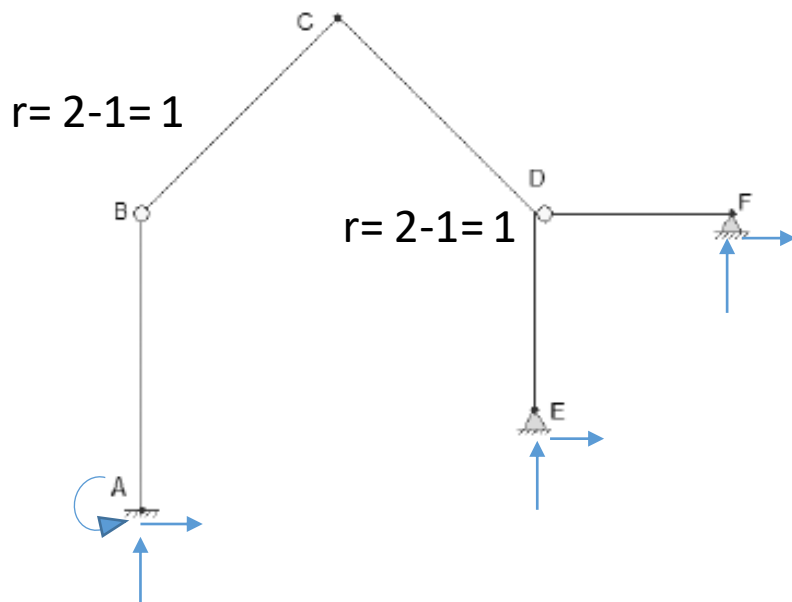
$$r = 1 + 2 = 3$$

$$g = 7 - (3 + 3) = 1$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

No segundo croqui, o calculo hiperestático e dado por:

b) Croqui 02



$$R = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$E = 3$$

$$r = 1 + 1 = 2$$

$$g = 7 - (3 + 2) = 2$$

$$g = R - (E + r)$$

Conclui-se que no primeiro croqui a estrutura e uma vez hiperestática e no segundo croqui, duas vezes hiperestática. Isso indica que o segundo modelo estrutural apresentara deformações menores para um mesmo carregamento.

Ou seja quanto menor o grau de hiperatividade menos deformações a estrutura apresentará

DEFINIÇÃO DE ESTRUTURAS COM MÚLTIPLOS GRAUS HIPERESTÁTICOS

Uma estrutura é considerada com múltiplos graus de hiperestaticidade quando o número de reações desconhecidas excede o número das equações de equilíbrio da estática, e esta diferença é superior a 1. e se, uma vez conhecida as reações, for impossível determinar os esforços das seções ao longo da estrutura utilizando as equações de equilíbrio, então, a estrutura é hiperestática internamente e pode ter este grau igual ou superior a 1.

Vigas com múltiplos graus hiperestáticos

As vigas com múltiplos graus hiperestáticos são definidas em função de suas reações de apoio e suas rotulas. As rotulas geram equações e são somadas nas equações de equilíbrio da estática.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

A formula dada para encontrar o grau hiperestático (g) de uma viga e dada por: $g = R - (E + r)$

R: reações de apoio.

E: equações de equilíbrio da Estática (=3).

r: numero de rotulas.

As vigas são estruturas fundamentais nas construções. Como vigas com múltiplos graus hiperestáticos (Figura 1.27 e 1.28), podemos ter:

Figura 1.27 | Exemplo 1 – viga com quatro graus hiperestáticos



Fonte: elaborada pelo autor.

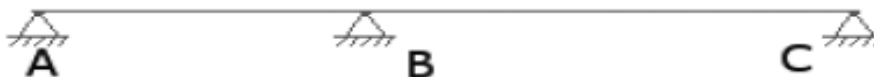
$$R = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$E = 3$$

$$r = 1$$

$$g = 8 - (3 + 1) = 4$$

Figura 1.28 | Exemplo 2 – viga com três graus hiperestáticos



Fonte: elaborada pelo autor.

$$R = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$E = 3$$

$$r = 0$$

$$g = 6 - (3 + 0) = 3$$

PÓRTICOS COM MÚLTIPLOS GRAUS HIPERESTÁTICOS

Pórticos são estruturas formadas pela combinação de barras horizontais, verticais e/ou inclinadas entre si. Os pórticos, como o da Figura abaixo, são amplamente utilizados nas construções civis, principalmente em edifícios.



A maioria dos arranjos estruturais utilizados é hiperestática. Para os pórticos, de um modo geral, o grau de hipergeometria é dado pela fórmula:

$$g = R - (E + r)$$

Onde:

R: reações de apoio.

E: equações de equilíbrio.

r: número de equações referentes a rótula, dado pela fórmula:

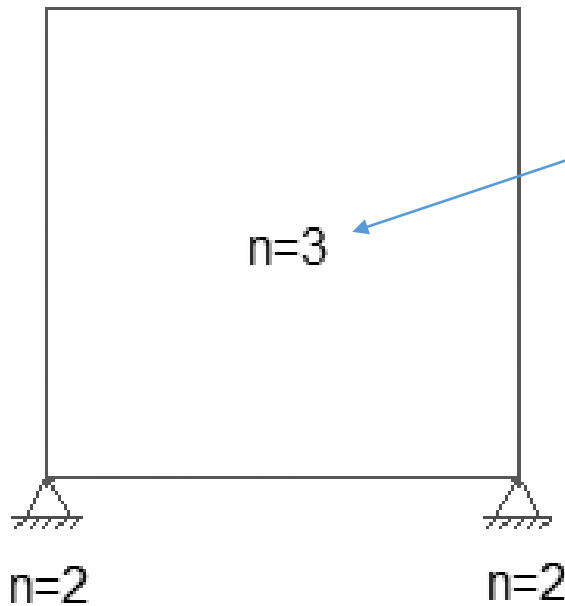
$$r = \text{barras conectadas a rótula} - 1$$

Pórtico de entrada – *Brandemburgo Gate*

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Os pórticos podem ter múltiplos graus de hiperestaticidade), mas com diferentes arranjos estruturais.

Quando o arranjo estrutural apresenta um anel fechado, este acrescenta mais três incógnitas ao numero de apoios, exceto no caso de treliças.



$$g = R - (E + r)$$

$$R = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$E = 3$$

$$r = 0$$

$$g = 7 - 3 = 4$$

r : numero de equações referentes a rotula, dado pela formula: $r = (\text{barras conectadas a rótula}) - 1$

TRELIÇAS COM MÚLTIPLOS GRAUS HIPERESTÁTICOS

As treliças são amplamente utilizadas em coberturas, pontes, edificações etc. (Figura 1.32).



Para determinação do grau hiperestático, as incógnitas a serem resolvidas nas treliças são:

- Numero de barras (b).
- As reações nos apoios em função do tipo de vínculo R .
- Para uma estrutura isostática, a soma destas incógnitas deve ser igual a duas vezes o numero de nos: $R + b = 2 * n$

Sendo: n e o numero de nos.

Isso significa que para cada no da estrutura teremos duas equações.

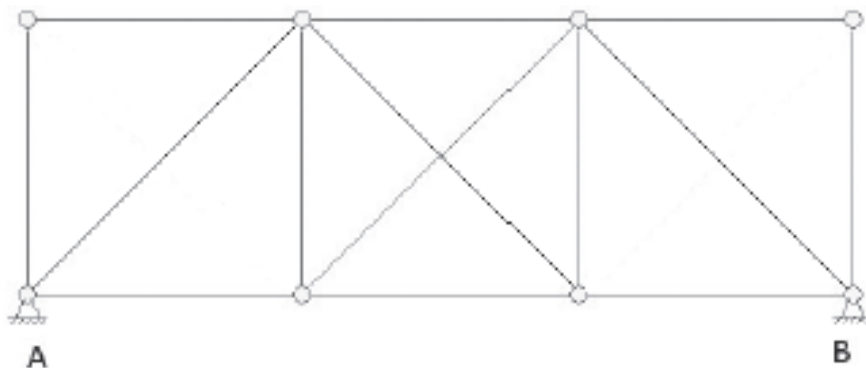
O grau de hiperestaticidade e dado por: $g = (R + b) - (2 * n)$

Quando $g = 1$, a estrutura será uma vez hiperestática.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Seguindo a formula dada, podemos verificar as diferenças dos tipos de treliça com dois graus de hiperestaticidade:

$$g = (R + b) - (2 * n)$$



$$R = 2 + 2 = 4$$

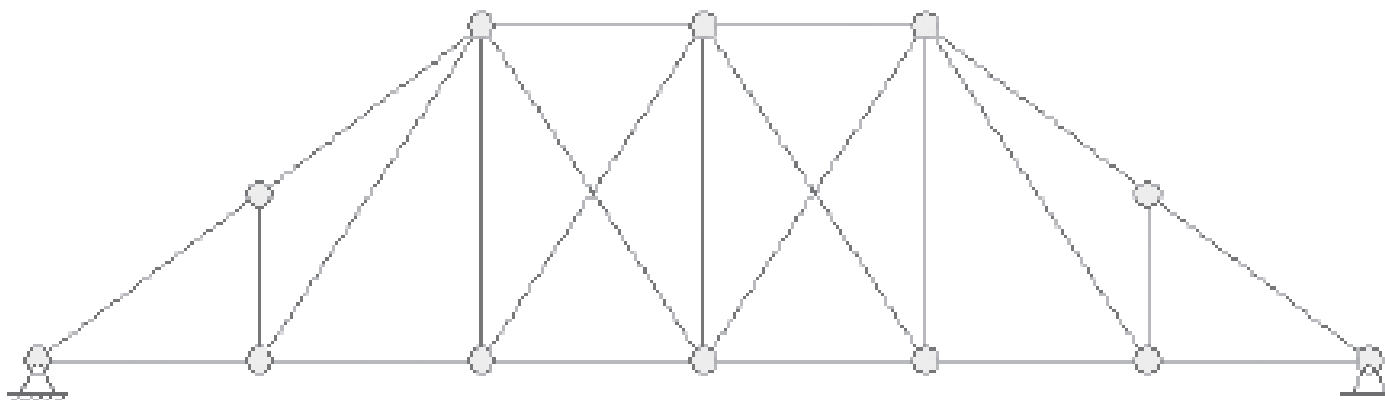
$$b = 14$$

$$n = 8 \rightarrow 2n = 16$$

$$g = (4 + 14) - (2 * 8) = 2$$

A incógnita para este caso é a reação de apoio e uma das barras centrais, portanto, a estrutura, é duas vezes externamente hiperestática

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



Neste caso específico, as barras que se cruzam em “x” apenas se cruzam, mas não estão ligadas entre si, sendo barras independentes.

$$g = (R + b) - (2 * n)$$

$$R = 1 + 2 = 3$$

$$b = 23$$

$$n = 12 \rightarrow 2n = 24$$

$$g = (3 + 23) - (2 * 12) = 2$$

A incógnita para este caso são os esforços nas barras, portanto, a estrutura é duas vezes internamente hiperestática.

MÉTODO DAS FORÇAS E DO DESLOCAMENTO

PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL (PTV)

Quando um ponto material submetido a uma força F apresenta um deslocamento d na mesma direção da força F , essa força realiza um trabalho dado por: **$U = F \cdot d$**

Assim, ao aplicarmos forças externas em um determinado corpo, ele se deformará, apresentando deslocamentos nos pontos de aplicação das forças externas. Dessa forma, essas forças externas irão realizar um trabalho externo (U_e), que, pelo Princípio da Conservação de Energia, será convertido em energia de deformação, a qual é armazenada na estrutura quando esta se deforma. Essa energia de deformação, que também pode ser chamada de trabalho interno (U_i), é liberada com a retirada das forças externas atuantes no corpo, fazendo com que o corpo retorne a sua configuração indeformada, caso não seja excedido o limite elástico do material. O Princípio da Conservação de Energia é a base do Princípio do Trabalho Virtual, e pode ser expresso matematicamente por: **$U_e = U_i$**

O Princípio do Trabalho Virtual pode ser utilizado para determinar um deslocamento ou uma inclinação em um ponto de uma estrutura qualquer. Para compreender melhor esse princípio, tomemos um corpo submetido a um conjunto de forças externas, conforme a Figura 2.2a. As forças externas P_1 , P_2 e P_3 irão provocar esforços internos f_i nos vários pontos internos ao longo do corpo, que em uma estrutura convencional, como uma treliça, uma viga ou um pórtico, são os esforços normal, cortante, momento fletor e momento torcer. Consequentemente, o corpo irá se deformar, apresentando deslocamentos externos D_n nos pontos de aplicação das forças externas e deslocamentos internos d nos diversos pontos internos ao longo do corpo.



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

As deformações reais d , além de serem provocadas por esforços reais, também podem ser provocadas por variações de temperatura (expansão térmica ou dilatação térmica) e defeitos de fabricação (barras fabricadas com comprimentos diferentes dos previstos em projeto). Caso esses efeitos reais ocorram, os seus trabalhos virtuais internos devem ser somados aos demais trabalhos virtuais internos no lado direito da equação do PTV. As deformações reais provocadas por esses efeitos e seus respectivos trabalhos virtuais internos.

Teorema de Castigliano

Tendo como base o Princípio da Conservação de Energia e os conceitos de energia de deformação, o segundo teorema de Castigliano pode ser usado para determinar o deslocamento (linear ou angular) de um ponto de uma estrutura. Segundo esse teorema, o deslocamento em um ponto de uma estrutura é igual a primeira derivada parcial da energia de deformação em relação a uma ação (força ou momento) que atua no ponto e na direção do deslocamento. Assim, para determinar o deslocamento no ponto e na direção de uma força P aplicada em uma estrutura empregando esse teorema, temos:

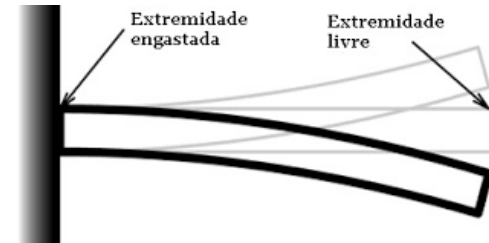
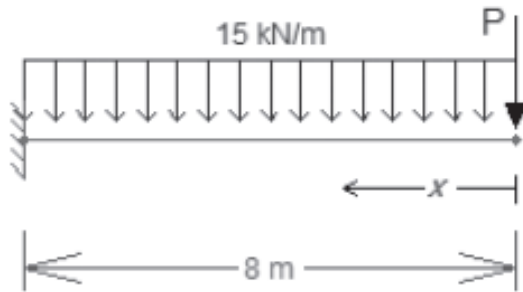
$$\Delta = \int_0^L M' \cdot \frac{M \cdot dx}{E \cdot I}$$

$$\Delta = \frac{\partial U_i}{\partial P}$$

APLICAÇÃO DO TEOREMA DE CASTIGLIANO EM UMA VIGA

Como exemplo, iremos determinar o deslocamento vertical na extremidade livre da viga da Figura 2.3a, que já foi determinado pela aplicação do PTV. Para tanto, devemos aplicar uma força vertical P na extremidade livre, conforme a Figura 2.5:

Figura 2.5 | Viga com carregamento real e força P



Fonte: elaborada pelo autor.

Primeiramente, determina-se a equação do momento fletor na viga em relação a coordenada x , para o carregamento da Figura 2.5. Em seguida, encontra-se a derivada parcial desse momento fletor com relação a força P (força que atua no ponto e na direção do deslocamento). Admitindo que tração no lado de baixo da viga é positiva:

$$M = -P \cdot x - 15 \cdot x \cdot \frac{x}{2} \Rightarrow M = -P \cdot x - 7,5 \cdot x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Primeiramente vamos considerar o estado inicial onde ainda não foi aplicada a força P . Então, substituindo o valor da força P por seu valor real, que neste caso é $P = 0$, uma vez que no carregamento original essa força não existe:

Modulo de elasticidade longitudinal do material: $E = 2 \times 10^8$

Momento de inercia da seção em relação ao eixo de flexão: $I = 5 \times 10^{-4}$

$$M = \cancel{P} \cdot x - 7,5 \cdot x^2 \quad P=0$$

$$M = -7,5 \cdot x^2 \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Aplicando a equação do teorema de Castigliano, temos:

$$\Delta = \int_0^L M \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \cdot \frac{dx}{E \cdot I} = \int_0^8 (-7,5 \cdot x^2) \cdot (-x) \cdot \frac{dx}{2 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}$$

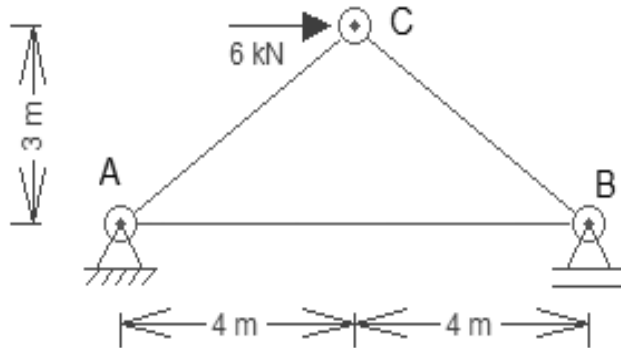
$$\Delta = \frac{1}{10^5} \cdot \int_0^8 7,5 \cdot x^3 \cdot dx = \frac{1}{10^5} \cdot \frac{7,5 \cdot 8^4}{4} \Rightarrow \Delta = 0,0768m = 76,8mm$$

Esse é o mesmo valor de deslocamento encontrado através do PTV.

Como o deslocamento resultou em um valor positivo, isso significa que ele tem o mesmo sentido da força unitária, ou seja, para baixo.

APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS EM TRELIÇAS

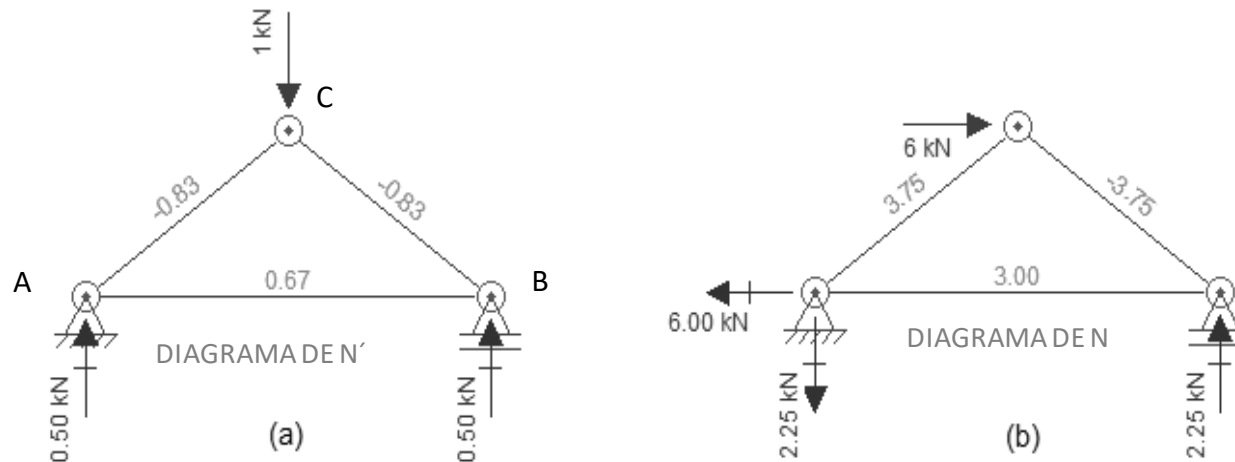
Seu chefe solicitou que você determine o deslocamento vertical que ocorre no nó C da treliça da Figura 2.7, que será utilizada na construção da cobertura de uma residência. Os dados fornecidos pela sua equipe são: a área da seção transversal de cada barra da treliça e $A = 400\text{mm}^2 = 4 \times 10^{-4}\text{m}^2$ e o módulo de elasticidade do material empregado na treliça e $E = 20000\text{kN/cm}^2 = 2 \times 10^8\text{kN/m}^2$.



Como se deseja determinar o deslocamento vertical no nó C da treliça, deve-se aplicar uma força virtual de 1 kN na direção vertical do nó C. Em seguida, pelas três equações de equilíbrio, determinam-se as reações de apoio, e pelo método dos nós, encontram-se os esforços normais que atuam em cada barra, conforme a Figura 2.8a. De maneira semelhante, as reações e os esforços nas barras da treliça são determinados para a treliça com o seu carregamento real,

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Como se deseja determinar o deslocamento vertical no nó C da treliça, deve-se aplicar uma força virtual de 1 kN na direção vertical do nó C. Em seguida, pelas três equações de equilíbrio, determinam-se as reações de apoio, e pelo método dos nós, encontram-se os esforços normais que atuam em cada barra, conforme a Figura 2.8a. De maneira semelhante, as reações e os esforços nas barras da treliça são determinados para a treliça com o seu carregamento real,



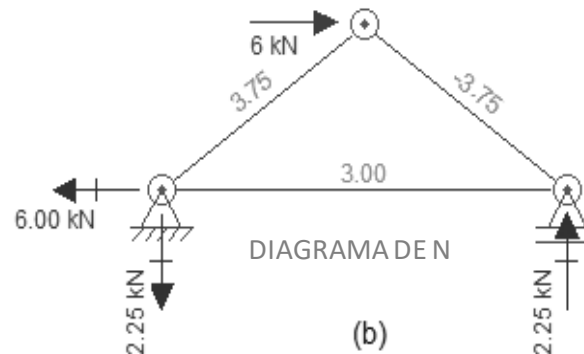
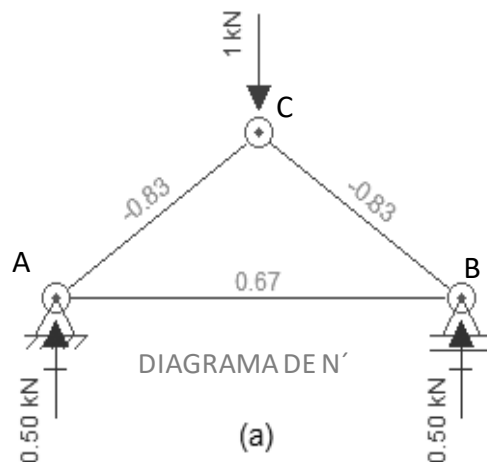
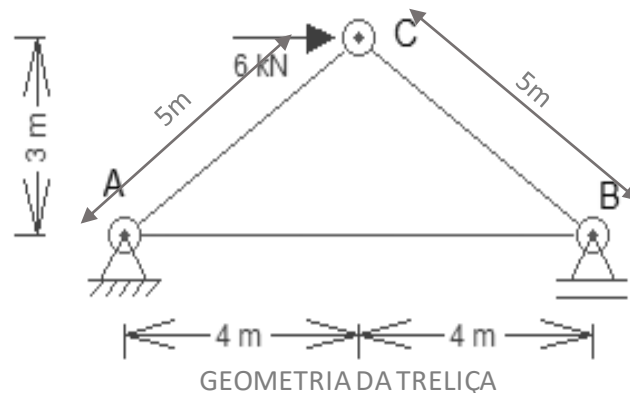
Como trata-se de uma treliça, consideraremos apenas a parcela referente aos esforços normais na equação do PTV:

$$\Delta_C = \int_L N' \cdot \frac{N \cdot dx}{E \cdot A}$$

Como N' e N são constantes ao longo do comprimento de cada barra, a integral resulta na seguinte expressão, para cada barra de comprimento L :

$$\Delta_C = \frac{1}{E \cdot A} \cdot (N'_{AC} \cdot N_{AC} \cdot L_{AC} + N'_{BC} \cdot N_{BC} \cdot L_{BC} + N'_{AB} \cdot N_{AB} \cdot L_{AB})$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



$$\Delta_C = \frac{1}{E \cdot A} \cdot (N'_{AC} \cdot N_{AC} \cdot L_{AC} + N'_{BC} \cdot N_{BC} \cdot L_{BC} + N'_{AB} \cdot N_{AB} \cdot L_{AB})$$

$$\Delta_C = \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} \cdot [(-0,83) \cdot 3,75 \cdot 5 + (-0,83) \cdot (-3,75) \cdot 5 + 0,67 \cdot 3 \cdot 8] = 2,01 \cdot 10^{-4} m = 0,201 mm$$

Como o deslocamento vertical no nó C calculado é positivo, isso indica que ele tem o mesmo sentido da força unitária, ou seja, para baixo.

MÉTODO DAS FORÇAS

Definição do método das forças

O método das forças é um procedimento empregado para analisar estruturas hiperestáticas, permitindo encontrar as suas reações de apoio e traçar os seus diagramas de esforços solicitantes.

Os métodos de resolução de estruturas hiperestáticas devem sempre respeitar as seguintes condições:

- Condições de equilíbrio.
- Condições de compatibilidade.
- Condições que regem o comportamento dos materiais empregados (leis constitutivas dos materiais).

As condições de equilíbrio são satisfeitas quando a estrutura se

mantém em repouso, ou seja, quando as reações de apoio e as forças atuantes na estrutura estão em equilíbrio. Para respeitar essas condições no método das forças, iremos aplicar as equações de equilíbrio estático, já conhecidas e empregadas na resolução das estruturas isostáticas.

O comportamento do material e a resposta que ele apresenta quando submetido aos esforços que ocorrem na estrutura. Para que o método das forças respeite o comportamento dos materiais empregados, iremos considerar que os materiais possuem comportamento elástico linear e que as deformações estejam dentro do limite da região elástica.

Já uma estrutura que respeita as condições de compatibilidade e aquela que não apresenta rompimentos de seus vários segmentos e cuja forma defletida seja coerente com as restrições de deslocamentos impostas pelas vinculações de apoio.

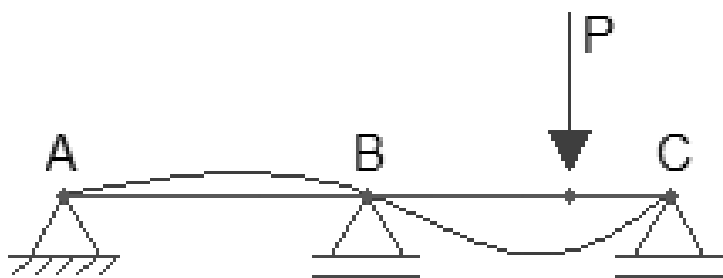
Para respeitar essas condições no método das forças, iremos escrever uma ou mais equações de compatibilidade que garantam o não rompimento da estrutura ou que garantam que as deflexões da estrutura respeitem as condições de vinculação.

O conceito básico do método das forças consiste em substituir a estrutura hiperestática por uma estrutura isostática fundamental, obtida pela remoção de certas restrições, como a remoção de reações de apoio. Como essa estrutura fundamental é isostática, a sua análise pode ser feita facilmente pelos métodos já conhecidos de análise de estruturas isostáticas.

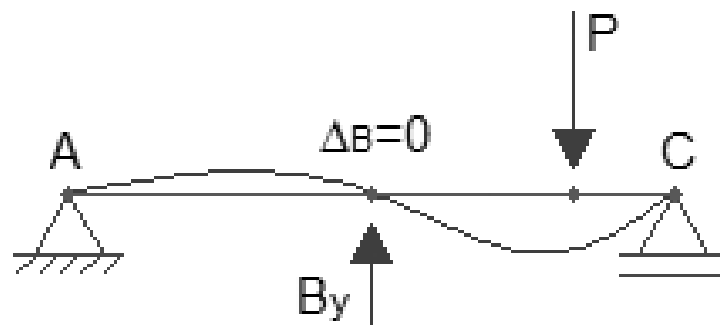


ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Para exemplificar, consideremos a viga apresentada na figura abaixo .
Conforme já estudado na Unidade 1, essa viga é uma vez hiperestática, já que possui quatro reações de apoio (força vertical e força horizontal no apoio fixo em A, força vertical no apoio móvel em B e força vertical no apoio móvel em C) e apenas três equações de equilíbrio. Dessa forma, para resolver essa estrutura, precisamos definir mais uma equação, resultando em um sistema de quatro equações e quatro incógnitas, ou seja, um sistema com uma única solução.



(a)



(b)

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Para encontrar essa equação adicional, iremos substituir a estrutura hiperestatica por uma estrutura isostatica fundamental equivalente, através da retirada de uma das vinculações de apoio e da aplicação da reação de apoio correspondente ao vínculo retirado, conforme a Figura b. Para que essa estrutura fundamental seja realmente equivalente a estrutura hiperestatica, além de aplicar uma força vertical em B, correspondente a reação de apoio, também devemos respeitar a condição de compatibilidade imposta por esse apoio movel em B, ou seja, a condição de que o deslocamento vertical no ponto B deve ser nulo. Esse requisito geometrico nos permite escrever uma equação de compatibilidade adicional, que ira se juntar as tres equacoes de equilibrio, permitindo encontrar as quatro reações de apoio e resolver a estrutura hiperestatica:



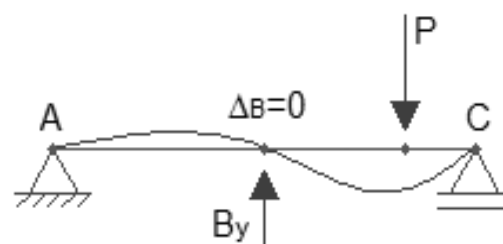
(a)

Equações de equilíbrio

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$



(b)

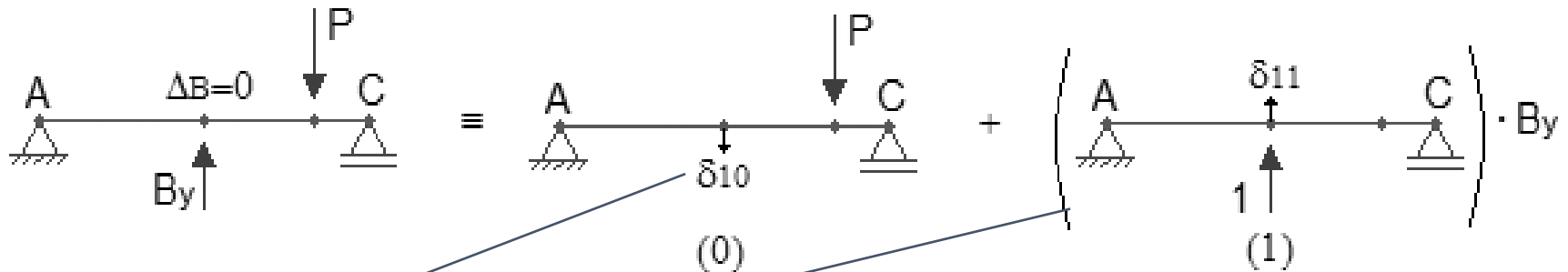
Equação de compatibilidade

$$\Delta_B = 0$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Método das forças: vigas

Já vimos que, para aplicar o método das forças, devemos montar uma ou mais equações de compatibilidade. Como iremos utilizar essas equações para resolver os problemas de estruturas hiperestáticas? A resposta desse questionamento passa pelo princípio da superposição, que é válido para materiais de comportamento elástico linear. Para solucionar o problema, iremos desmembrar a estrutura isostática fundamental em duas ou mais estruturas isostáticas, que ao serem somadas, resultam na estrutura isostática fundamental. Para esclarecer esse procedimento, iremos considerar a viga já apresentada na Figura anterior, uma vez hiperestática. A sua estrutura isostática fundamental, apresentada na Figura abaixo, pode ser desmembrada nos casos (0) e (1), conforme a Figura abaixo, que ao serem somados, resultam na estrutura isostática fundamental.



Como o deslocamento vertical em B deve ser nulo, a equação de compatibilidade fica:

$$\Delta_B = \delta_{10} + \delta_{11} \cdot B_y$$

e

$$\Delta_B = 0$$

Equação de compatibilidade

$$0 = \delta_{10} + \delta_{11} \cdot B_y$$

Vamos guardar estas duas equações para utilizar nos nossos problemas

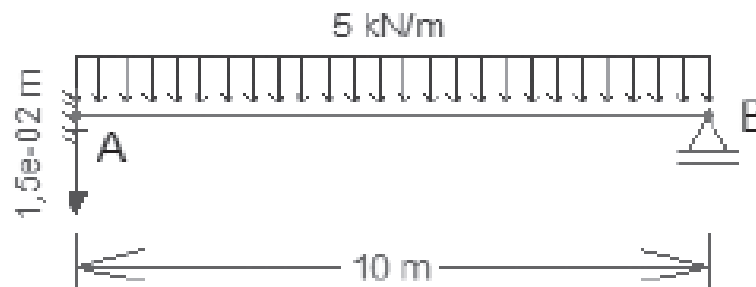


pitágoras

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Determinar as reações de apoio para a viga da Figura 2.12, que possui $E \cdot I$ constante.

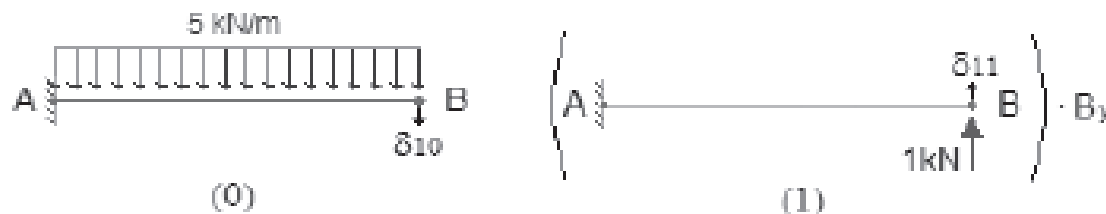
Figura 2.12 | Viga com carregamento uniformemente distribuído



Fonte: elaborada pelo autor.

Essa viga é uma vez hiperestática. Para montar a sua estrutura isostática fundamental, podemos retirar a vinculação correspondente ao deslocamento vertical no apoio B, obtendo, assim, os casos (0) e (1) da Figura 2.13.

Figura 2.13 | Casos (0) e (1)



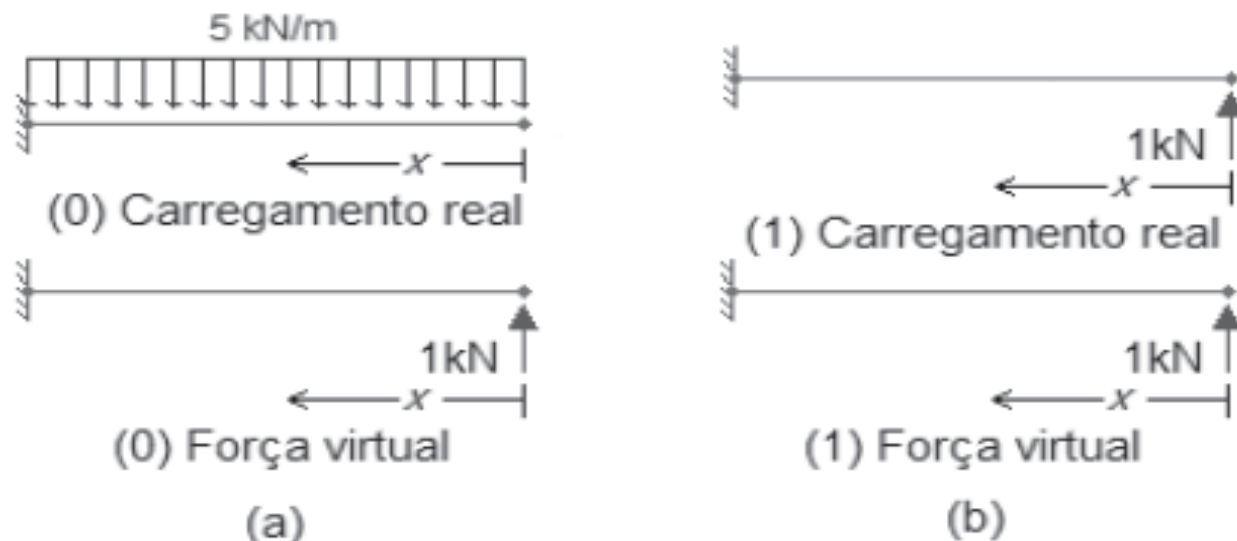
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Desta forma, temos a seguinte equação de compatibilidade:

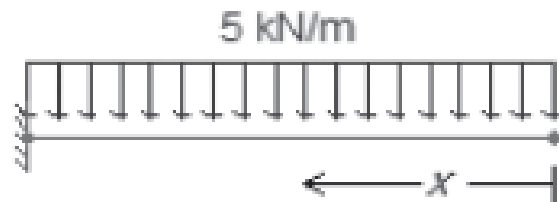
$$0 = \delta_{10} + \delta_{11} \cdot B_y \Rightarrow B_y = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

A determinação dos deslocamentos será feita aplicando o PTV duas vezes, considerando os carregamentos reais dos casos (0) e (1) apresentados na Figura 2.13, e admitindo que o momento que traciona a fibra de baixo da viga é positivo. A Figura 2.14a representa o PTV do caso (0), com o carregamento real e a força unitária virtual aplicada em B na direção do deslocamento δ_{10} (vertical).

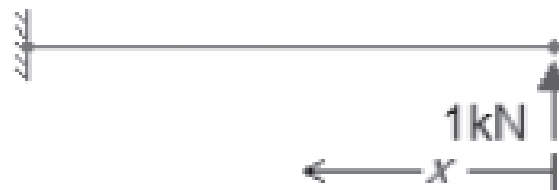
Figura 2.14 | (a) Carregamento real e força virtual do caso (0); (b) Carregamento real e força virtual do caso (1)



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

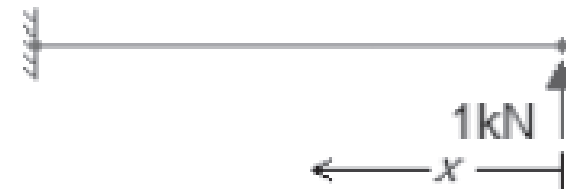


(0) Carregamento real

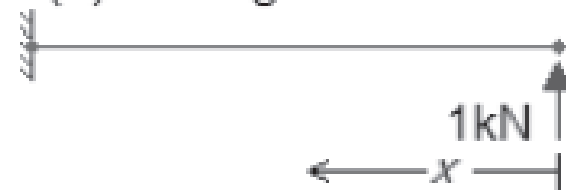


(0) Força virtual

(a)



(1) Carregamento real



(1) Força virtual

(b)

a) Determinação de δ_{10}

$$M = -5 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -2,5 \cdot x^2 \qquad M' = x$$

$$1 \cdot \delta_{10} = \int_0^L M' \cdot \frac{M \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^{10} x \cdot \frac{(-2,5 \cdot x^2) \cdot dx}{E \cdot I} = -\frac{2,5}{E \cdot I} \int_0^{10} x^3 \cdot dx = -\frac{2,5 \cdot 10^4}{4 \cdot E \cdot I}$$

$$\delta_{10} = -\frac{6250}{E \cdot I} \quad \text{para baixo [m]}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

b) Determinação de δ_{11}

Já a Figura 2.14b representa o PTV do caso (1), com o carregamento real deste caso e a força unitária virtual aplicada em B na direção do deslocamento δ_{11} (vertical).

$$M = M' = x$$

$$1 \cdot \delta_{11} = \int_0^L M' \cdot \frac{M \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^{10} x \cdot \frac{x \cdot dx}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \int_0^{10} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_{11} = \frac{10^3}{3 \cdot E \cdot I} \text{ para cima [m/kN]}$$

Assim, determinamos as quatro reações de apoio, adotando giro anti-horário positivo:

$$B_y = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\left(\frac{-6250}{E \cdot I}\right)}{\frac{10^3}{3 \cdot E \cdot I}} = \frac{6250}{E \cdot I} \cdot \frac{3 \cdot E \cdot I}{10^3} = 18,75 \text{ kN para cima}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - 5 \cdot 10 \cdot \frac{10}{2} + 18,75 \cdot 10 = 0 \Rightarrow M_A = 62,5 \text{ kN.m anti-horário}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 5 \cdot 10 + 18,75 = 0 \Rightarrow A_y = 31,25 \text{ kN para cima}$$



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



pitágoras

AULA 3

Método das forças
Método dos deslocamentos

Professor Rogério silva

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

MÉTODO DAS FORÇAS:

O método das forças também pode ser empregado para resolver pórticos hiperestáticos, como o apresentado na Figura 2.15a. Note que, por se tratar de um pórtico duas vezes hiperestático, foram retiradas duas vinculações (momento em A e reação horizontal em B) para encontrar a sua estrutura isostática fundamental, representada na Figura 2.15b. Essas duas vinculações retiradas são duas incógnitas do nosso problema, e são denominadas de hiperestáticos. Utilizaremos a nomenclatura X_i para indicar os hiperestáticos ($X_1 = M_A$, e $X_2 = B_X$).

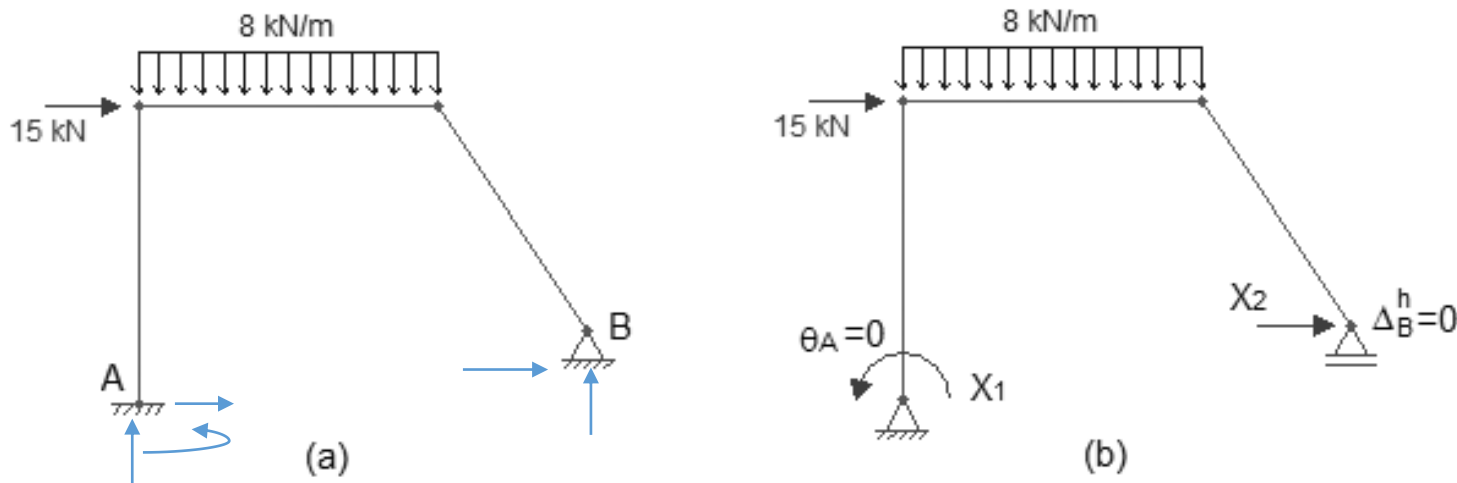


Figura 2.15 | (a) Pórtico hiperestático; (b) Estrutura isostática fundamental

O método das forças funciona muito bem quando desejamos resolver estruturas hiperestáticas com grau de hiperestaticidade pequeno.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Como foram retiradas duas vinculações, a estrutura isostática fundamental será obtida pela superposição de três casos básicos:

- Caso (0), correspondente ao carregamento original;
- Caso (1), correspondente ao momento unitário aplicado no ponto do hiperestático X_1 ;
- Caso (2), correspondente a força unitária aplicada no ponto do hiperestático X_2 .

Esses três casos são apresentados na Figura 2.16.

O numero de casos básicos sempre será igual ao grau de hiperestaticidade mais um.

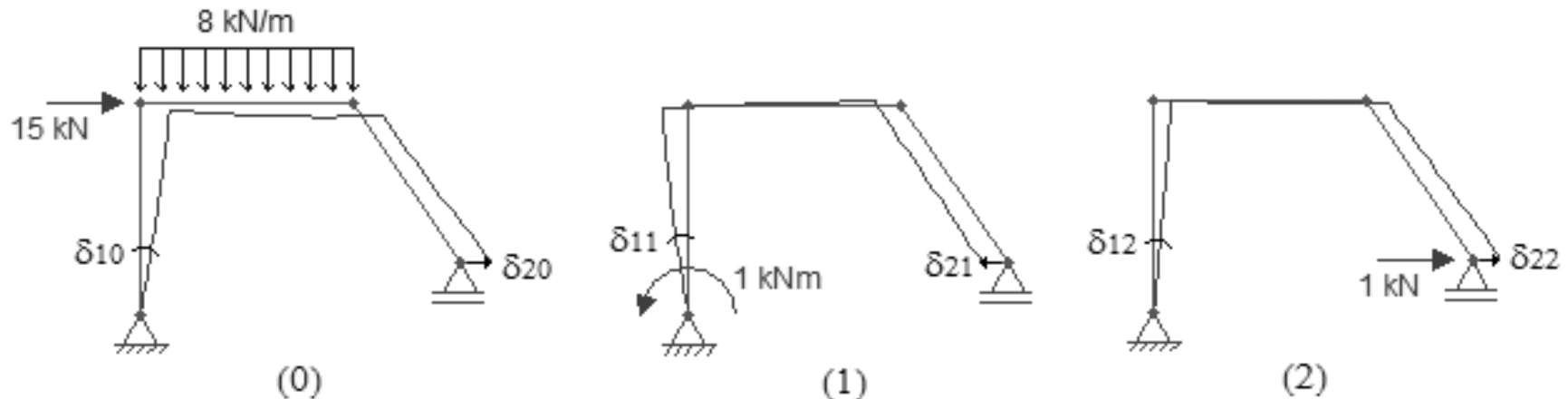


Figura 2.16 | Casos (0), (1) e (2)

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Assim, teremos duas equações de compatibilidade, resultando em um sistema de duas equações e duas incógnitas (X_1 e X_2):

$$\theta_A = 0 \Rightarrow 0 = \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2$$

$$\Delta_B^h = 0 \Rightarrow 0 = \delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2$$

A rotação δ_{10} e o deslocamento δ_{20} são denominados termos de carga. Podemos definir um termo de carga como:

δ_{i0} : deslocamento ou rotação na direção do vínculo associado ao hiperestático X_i , para o carregamento do caso (0), que corresponde ao carregamento original.

Já as rotações δ_{11} e δ_{12} e os deslocamentos δ_{21} e δ_{22} são denominados coeficientes de flexibilidade, e são definidos como:

δ_{ij} : deslocamento ou rotação na direção do vínculo associado ao hiperestático X_i , para o carregamento do caso (j).

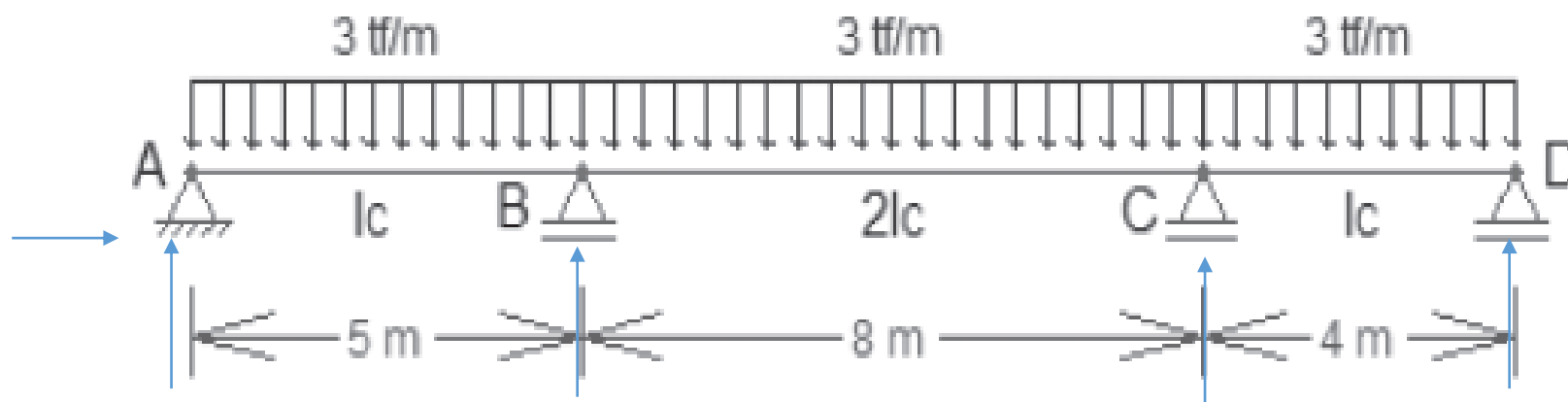
Para determinar cada um dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade, devemos aplicar o PTV uma vez, o que, neste caso, resulta em aplicar o PTV seis vezes:

- δ_{10} : aplicar um momento unitário na direção de X_1 , para o carregamento do caso (0);
- δ_{20} : aplicar uma força unitária na direção de X_2 , para o carregamento do caso (0);

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Obtenha o diagrama de momentos fletores para a viga da Figura abaixo

Figura 2.9 | Viga hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.

$$g = R - (E + r)$$

$$R = 2 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$E = 3$$

$$r = 0$$

$$\text{Portanto: } g = 5 - (3 + 0) = 2$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Como trata-se de uma viga duas vezes hiperestática, devemos retirar dois vínculos para obter a estrutura isostática fundamental, conforme a Figura 2.18.

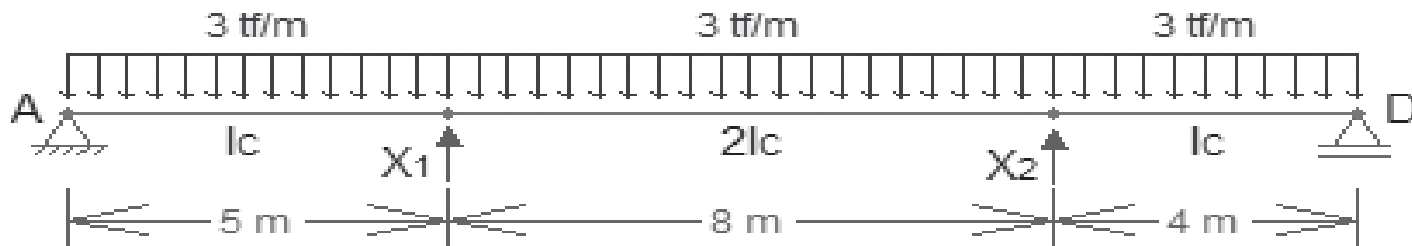
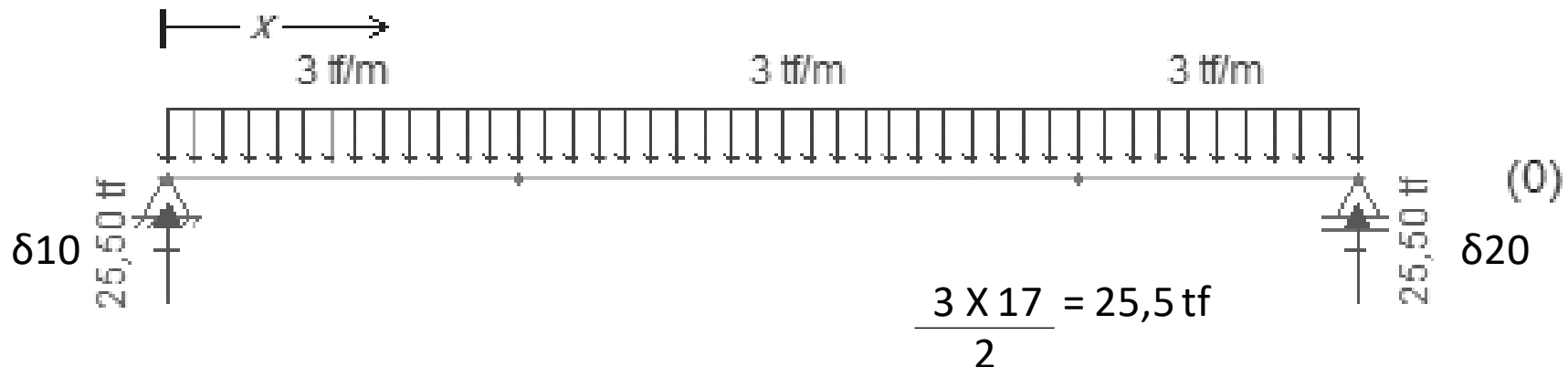


Figura 2.18 |
Estrutura
isostática
fundamental

$$g = R - (E + r)$$

CASO 0 correspondente ao carregamento original

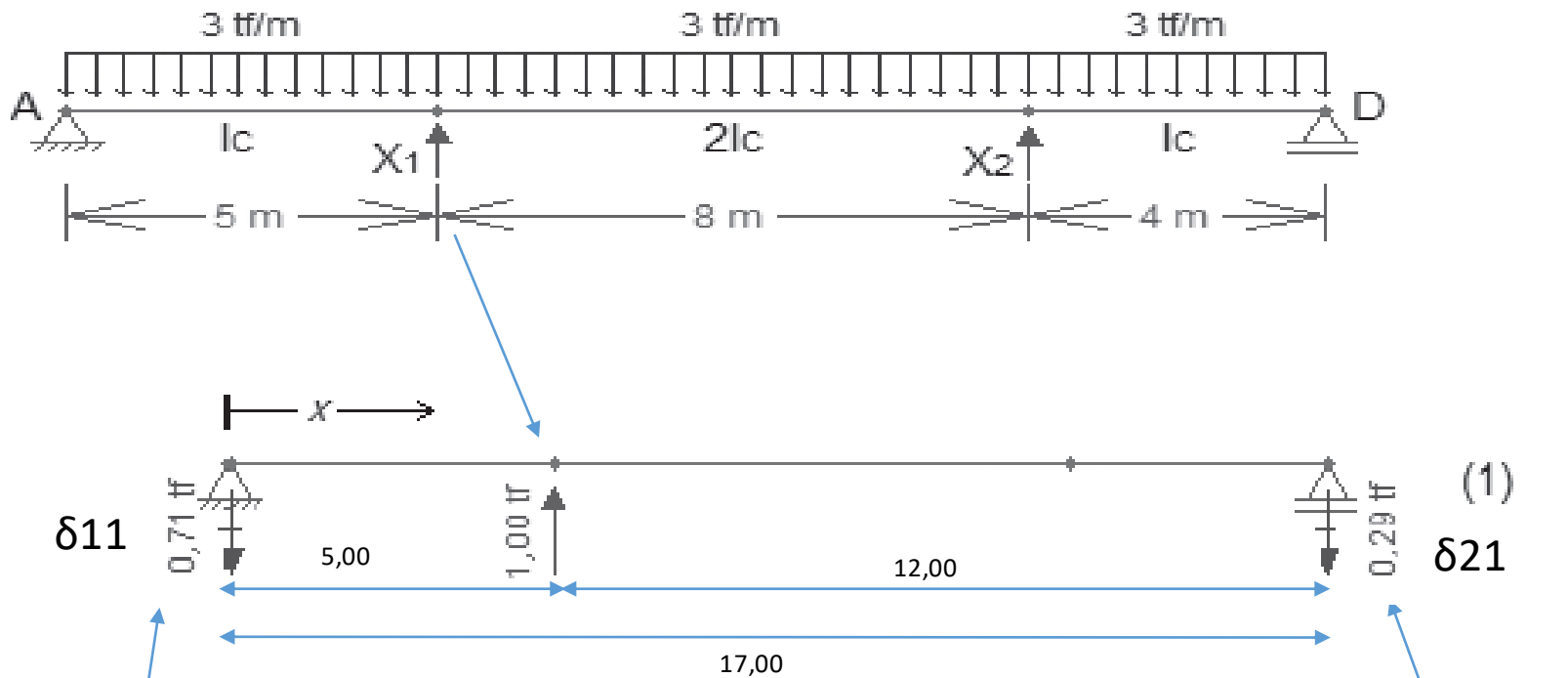


Para o caso (0):

- para $0 \leq x \leq 17$: $M_0 = -25,5 \cdot x + 3 \cdot \frac{x^2}{2} = 1,5 \cdot x^2 - 25,5 \cdot x$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

CASO 1 correspondente ao momento unitário aplicado no ponto do hiperestático X_1



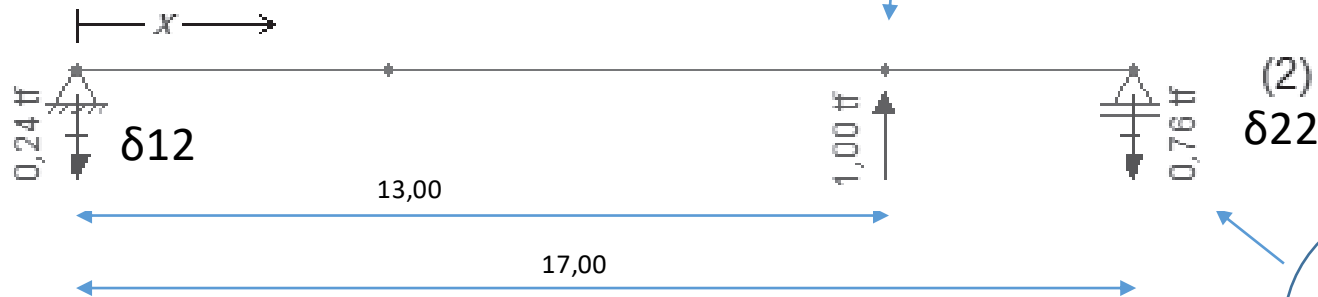
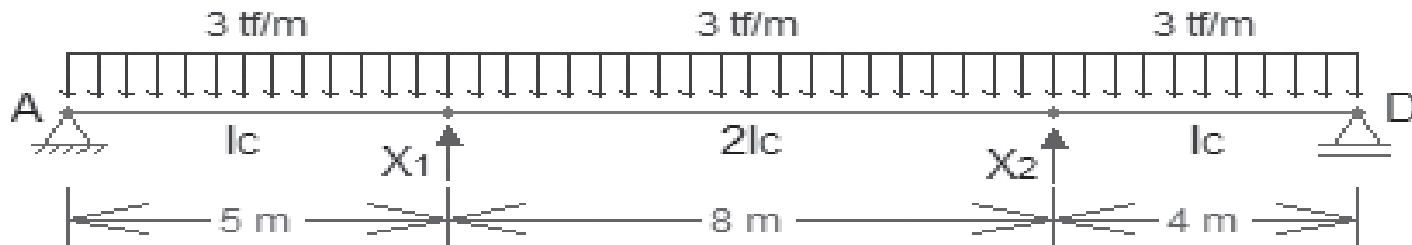
$$\begin{aligned} 17 &\leftarrow 1 \\ 12 &\leftarrow X \\ X &= \frac{(12 \times 1)}{17} = 0,71 \end{aligned}$$

Para o caso (1):

- para $0 \leq x \leq 5$: $M_1 = 0,71 \cdot x$

- para $5 \leq x \leq 17$: $M_1 = 0,71 \cdot x - 1 \cdot (x - 5) = 5 - 0,29 \cdot x$

CASO 2 correspondente a força unitária aplicada no ponto do hiperestático X_2



$$1 - 0,76 = 0,24$$

Para o caso (2):

- para $0 \leq x \leq 13$: $M_2 = 0,24 \cdot x$

- para $13 \leq x \leq 17$: $M_2 = 0,24 \cdot x - 1 \cdot (x - 13) = 13 - 0,76 \cdot x$

$$\begin{aligned} 17 &\cdots 1 \\ 13 &\cdots X \\ X &= (13 \times 1) / 17 = 0,76 \end{aligned}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Aplicando o PTV para determinar os termos de carga e coeficientes de flexibilidade:

$$\delta_{10} = \int_0^L M_1 \cdot \frac{M_0 \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^5 0,71 \cdot x \cdot \frac{(1,5 \cdot x^2 - 25,5 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot I_c} + \int_5^{13} (5 - 0,29 \cdot x) \cdot \frac{(1,5 \cdot x^2 - 25,5 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot 2 \cdot I_c} +$$
$$+ \int_{13}^{17} (5 - 0,29 \cdot x) \cdot \frac{(1,5 \cdot x^2 - 25,5 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot I_c} = \frac{-1695,21}{E \cdot I_c} [m]$$

$$\delta_{20} = \int_0^L M_2 \cdot \frac{M_0 \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^5 0,24 \cdot x \cdot \frac{(1,5 \cdot x^2 - 25,5 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot I_c} + \int_5^{13} 0,24 \cdot x \cdot \frac{(1,5 \cdot x^2 - 25,5 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot 2 \cdot I_c} +$$
$$+ \int_{13}^{17} (13 - 0,76 \cdot x) \cdot \frac{(1,5 \cdot x^2 - 25,5 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot I_c} = \frac{-1409,31}{E \cdot I_c} [m]$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

$$\delta_{11} = \int_0^L M_1 \cdot \frac{M_1 \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^5 0,71 \cdot x \cdot \frac{0,71 \cdot x \cdot dx}{E \cdot I_c} + \int_5^{13} (5 - 0,29 \cdot x) \cdot \frac{(5 - 0,29 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot 2 \cdot I_c} +$$
$$+ \int_{13}^{17} (5 - 0,29 \cdot x) \cdot \frac{(5 - 0,29 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot I_c} = \boxed{\frac{47,79}{E \cdot I_c} [m/tf]}$$

$$\delta_{12} = \int_0^L M_1 \cdot \frac{M_2 \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^5 0,24 \cdot x \cdot \frac{0,71 \cdot x \cdot dx}{E \cdot I_c} + \int_5^{13} 0,24 \cdot x \cdot \frac{(5 - 0,29 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot 2 \cdot I_c} +$$
$$+ \int_{13}^{17} (13 - 0,76 \cdot x) \cdot \frac{(5 - 0,29 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot I_c} = \boxed{\frac{31,61}{E \cdot I_c} [m/tf]}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

$$\delta_{21} = \int_0^L M_2 \cdot \frac{M_1 \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^L M_1 \cdot \frac{M_2 \cdot dx}{E \cdot I} = \delta_{12} = \frac{31,61}{E \cdot I_c} [m/tf]$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \int_0^L M_2 \cdot \frac{M_2 \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^5 0,24 \cdot x \cdot \frac{0,24 \cdot x \cdot dx}{E \cdot I_c} + \int_5^{13} 0,24 \cdot x \cdot \frac{0,24 \cdot x \cdot dx}{E \cdot 2 \cdot I_c} + \\ &+ \int_{13}^{17} (13 - 0,76 \cdot x) \cdot \frac{(13 - 0,76 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot I_c} = \frac{35,61}{E \cdot I_c} [m/tf] \end{aligned}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

As duas equações de compatibilidade e o sistema de duas equações e duas incógnitas são:

$$\Delta_B^v = 0 \Rightarrow 0 = \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2$$

$$\Delta_C^v = 0 \Rightarrow 0 = \delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2$$

Resolvendo o sistema de duas equações e duas incógnitas, o termo $E I_{ce} \times$ é cancelado, e encontram-se os valores dos dois hiperestáticos. Posteriormente, através das equações de equilíbrio, determinam-se as três reações de apoio restantes. O ultimo passo consiste em traçar os diagramas dos esforços solicitantes.

CÁLCULO DE x_1 E x_2

EQUAÇÃO 1

$$0 = S_{10} + (S_{11} \cdot x_1) + (S_{12} \cdot x_2)$$

$$0 = -1695,21 + (47,79 \cdot x_1) + (31,61 \cdot x_2)$$

$$x_1 = \frac{[1695,21 - (31,61 \cdot x_2)]}{47,79}$$

EQUAÇÃO 2

$$0 = S_{20} + (S_{21} \cdot x_1) + (S_{22} \cdot x_2)$$

→ Jogando x_1 na EQUAÇÃO ② → (TEMOS):

$$0 = -1409,31 + 31,61 \left[\frac{1695,21 - (31,61 \cdot x_2)}{47,79} \right] + (35,61 \cdot x_2)$$

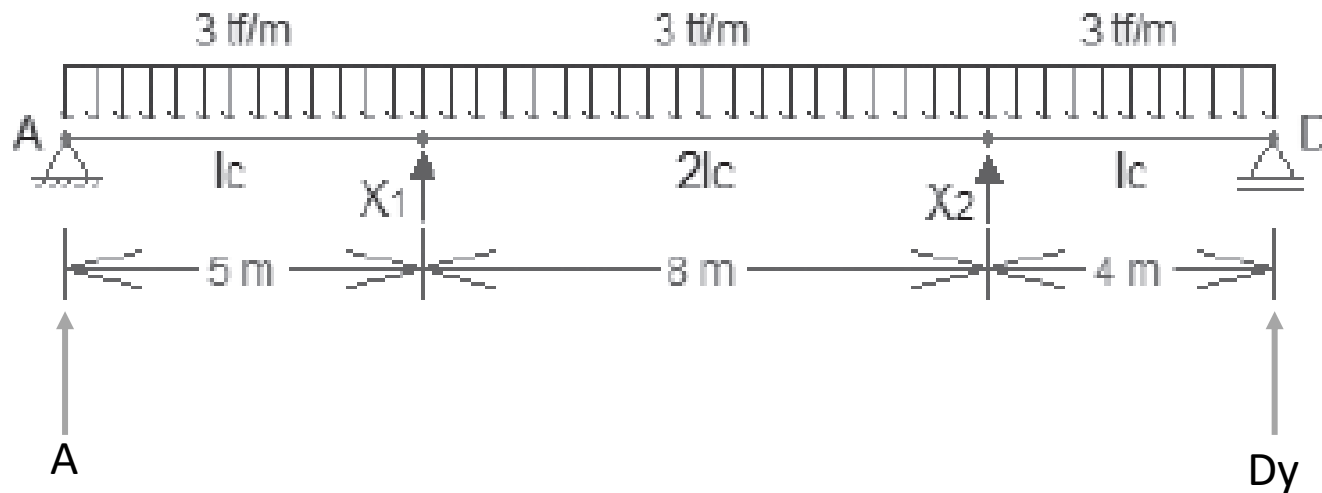
$$0 = -1409,31 + 1124,27198 - (20,907945 \cdot x_2) + (35,61 \cdot x_2)$$

$$0 = -288,03802 + 14,702055 \cdot x_2$$

$$x_2 = \frac{288,03802}{14,702055} \rightarrow x_2 = 19,59 \text{ tf}$$

Logo: $x_1 = \frac{[1695,21 - (31,61 \cdot 19,59)]}{47,79} \Rightarrow x_1 = 22,51 \text{ tf}$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



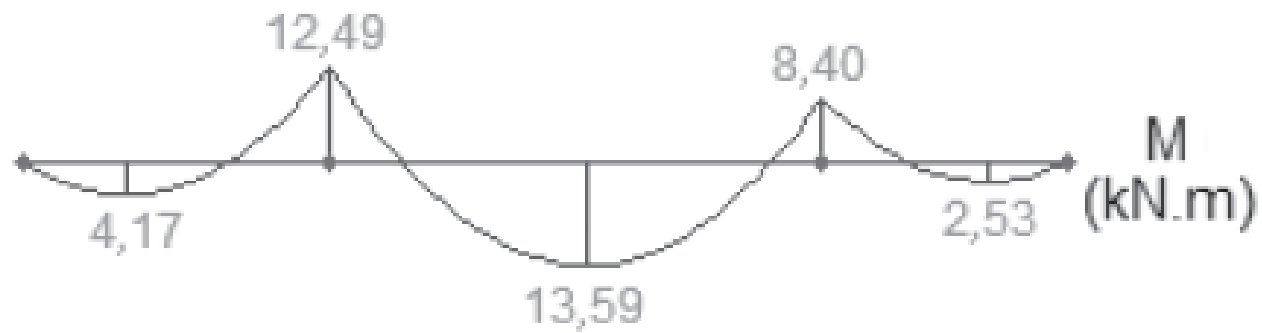
$$X_1 = B_y = 22,51tf \quad X_2 = C_y = 19,59tf$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -3 \cdot 17^2 / 2 + 22,51 \cdot 5 + 19,59 \cdot 13 + D_y \cdot 17 = 0 \Rightarrow D_y = 3,90tf$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -3 \cdot 17 + A_y + 22,51 + 19,69 + 3,9 = 0 \Rightarrow A_y = 5tf$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

O método das forças funciona muito bem quando desejamos resolver estruturas hiperestáticas com grau de hiperestaticidade pequeno.

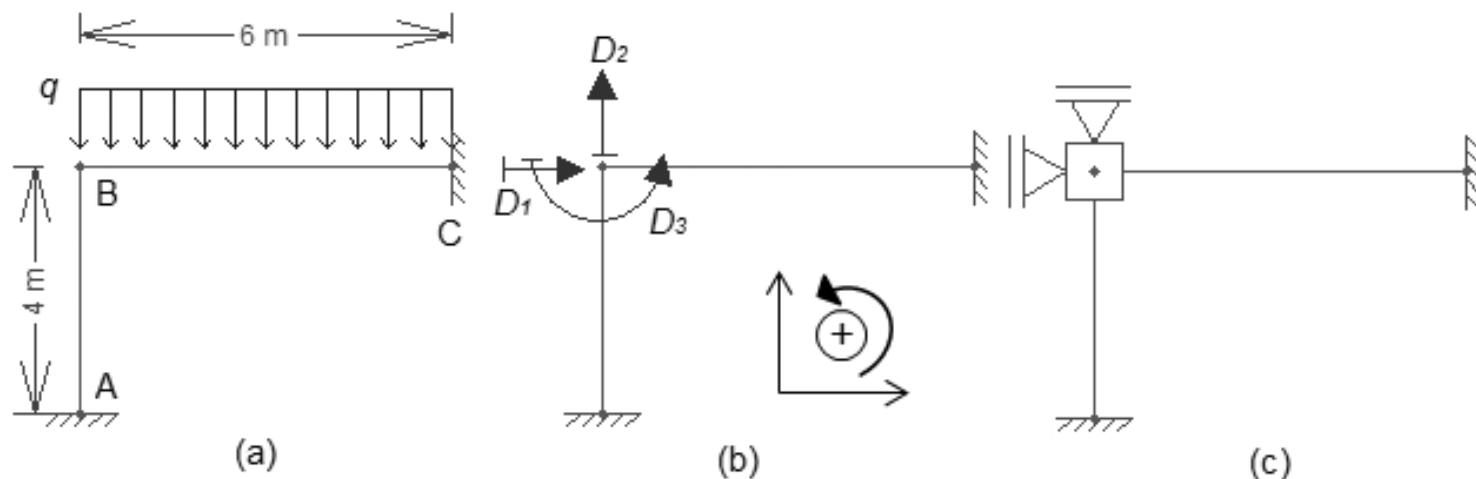
Quando estamos trabalhando com estruturas com grau de hiperestaticidade maior, esse método fica muito trabalhoso. São nessas situações que o método dos deslocamentos passa a ser mais vantajoso, principalmente quando desejamos implementar esse método em um programa de computador para resolver a estrutura mais rapidamente. Essa vantagem se dá pelo fato de o método dos deslocamentos trabalhar com soluções fundamentais já conhecidas, como iremos ver nesta seção, facilitando a programação computacional desse método. Por esse motivo, o método dos deslocamentos é a base de muitos programas computacionais que realizam a análise de diversos tipos de estruturas.

No método dos deslocamentos, também utilizaremos a superposição de casos básicos, que ao serem somados, resultam na estrutura original. No método das forças, e feita a superposição de uma série de casos básicos que satisfazem as condições de equilíbrio, e as condições de compatibilidade são respeitadas escrevendo-se uma série de equações de compatibilidade. Já no método dos deslocamentos, e feita a superposição de uma série de casos básicos que respeitam as condições de compatibilidade, e as condições de equilíbrio são respeitadas escrevendo-se uma série de equações de equilíbrio.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

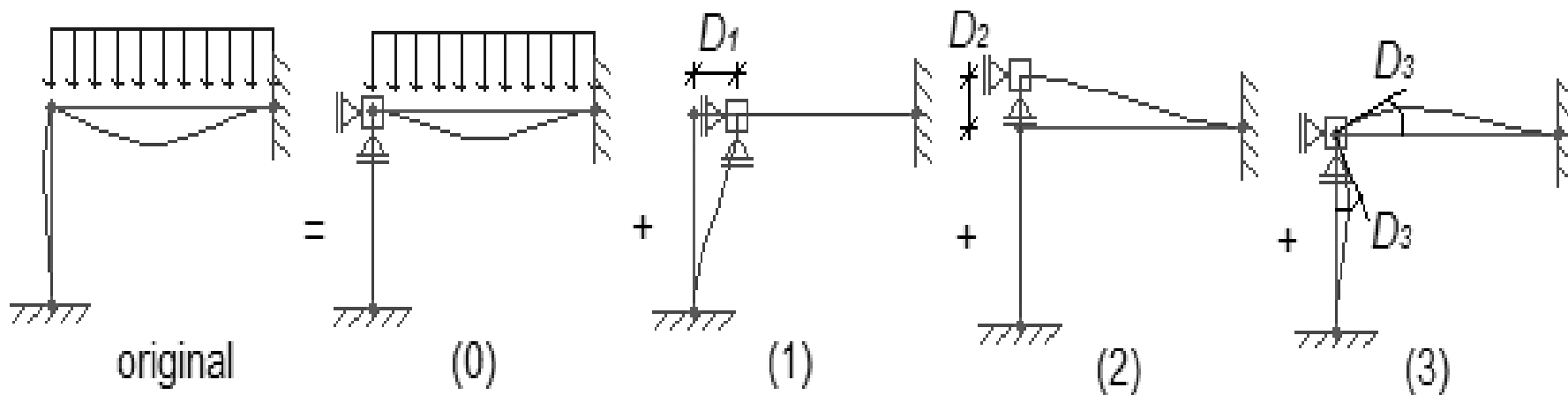
A primeira etapa do método dos deslocamentos consiste em identificar quais são os deslocamentos desconhecidos em cada nó da estrutura. No caso da Figura 2.24a, como os nós A e C são engastes (rotação e deslocamentos vertical e horizontal impedidos), os únicos deslocamentos desconhecidos são os deslocamentos vertical, horizontal e a rotação no nó B. Esses deslocamentos desconhecidos, que chamaremos de dissociabilidades, são incógnitas do nosso problema, e estão desenhados na Figura 2.24b, segundo a convenção de sinais positiva indicada. Essa será a convenção de sinais que adotaremos em todo o método dos deslocamentos.

Figura 2.24 | (a) Pórtico hiperestático; (b) Dissociabilidades; (c) Sistema hipergeométrico



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

A seguir, devemos fazer a superposição de casos básicos, em que cada um desses casos são soluções cinematicamente determinadas, ou seja, são configurações deformadas conhecidas. Assim, cada um dos casos básicos isola o efeito que o carregamento e que cada uma das dissociabilidades provoca na estrutura. O ponto de partida para a determinação dos casos básicos e a definição do sistema hipergeométrico, representado na Figura 2.24c, que nada mais é do que a estrutura original com todos os deslocamentos nodais impedidos através da adição de apoios fictícios. A superposição dos casos básicos está representada na Figura 2.25, na qual é possível notar que a soma da configuração deformada de cada caso resulta na configuração deformada da estrutura original.



É possível notar que o caso (0) isola o efeito do carregamento em cada barra da estrutura, considerando a atuação desse carregamento no sistema hipergeométrico. Já os casos (1), (2) e (3) isolam o efeito de cada uma das dissociabilidades, liberando apenas um dos deslocamentos desconhecidos e mantendo todos os demais impedidos.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

A seguir, deve-se resolver cada um dos casos básicos. A resolução do caso (0) consiste em determinar as reações nos apoios fictícios (β_{i0}) provocadas pelos carregamentos, representadas na Figura 2.26a. A resolução dos demais casos consiste em determinar as forças ou os momentos que devem ser aplicados nos apoios fictícios (K_{ij}) para manter a configuração deformada quando se aplica um deslocamento unitário na direção e no sentido da dissociabilidade liberada. Como estamos trabalhando com materiais elástico-lineares, podemos multiplicar cada valor de K_{ij} pela dissociabilidade correspondente ao caso analisado, e assim encontrar essas forças ou momentos nos apoios fictícios, quando essa dissociabilidade é aplicada, de maneira análoga, ao procedimento adotado no método das forças. Na Figura 2.26b, estão representadas as forças K_{ij} do caso (1).

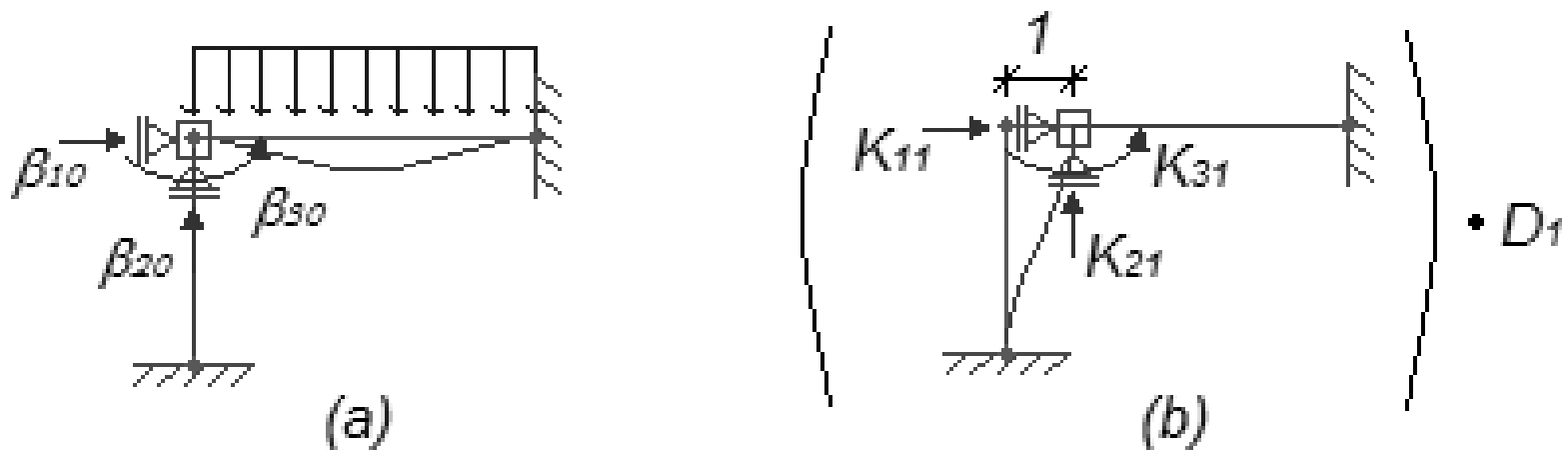


Figura 2.26 | (a) Reações nos apoios fictícios para o caso (0); (b) Forças nos apoios fictícios para o caso (1)

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

A seguir, deve-se restabelecer as condições de equilíbrio. Como o no que possui as dissociabilidades deve estar em equilíbrio, a resultante de forças e de momentos nesse no deve ser nula. Assim, resolvendo o sistema de três equações e três incógnitas a seguir, determinam-se os valores das dissociabilidades D_1 , D_2 e D_3 .

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \beta_{10} + K_{11} \cdot D_1 + K_{12} \cdot D_2 + K_{13} \cdot D_3 = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \beta_{30} + K_{31} \cdot D_1 + K_{32} \cdot D_2 + K_{33} \cdot D_3 = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \beta_{30} + K_{31} \cdot D_1 + K_{32} \cdot D_2 + K_{33} \cdot D_3 = 0$$

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS: VIGAS

Agora que já sabemos quais são as etapas do método dos deslocamentos, vamos analisar com mais detalhes o seu emprego no caso de vigas hiperestáticas. Porém, para a utilização desse método, temos que determinar os valores das reações de apoio fictícias (b_{i0} e K_{ij}) para diversas situações. As reações nos apoios fictícios do caso (0) são chamadas de termos de carga b_{i0} , e são definidas como: b_{i0} : reação de apoio fictícia associada a dissociabilidade D_i , quando o carregamento original atua isoladamente no sistema hipergeométrico.

Essas reações de apoio de cada barra podem ser calculadas utilizando-se, por exemplo, o método das forças, supondo que o carregamento atua em uma barra engastada em ambas as extremidades, ou seja, essas são as reações de apoio das situações de engastamento perfeito, e seus valores são tabelados para cada tipo de carregamento, ou seja, são soluções já conhecidas. A Figura 2.27 apresenta esses valores para alguns tipos de carregamentos.

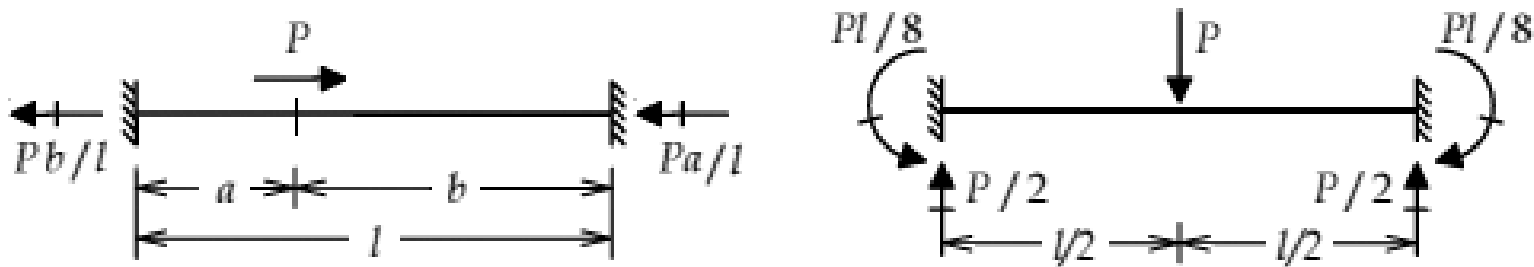


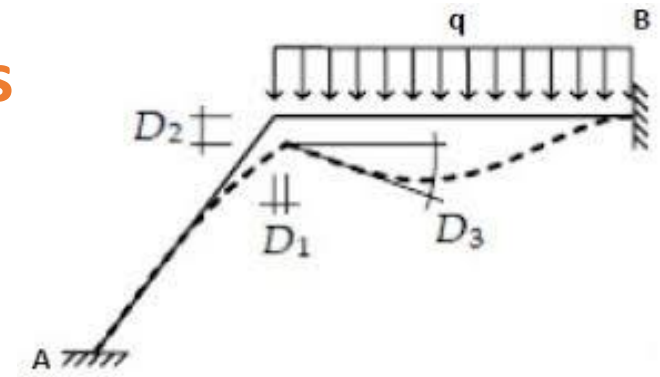
Figura 2.27 Reações de engastamento perfeito para algumas situações de carregamentos

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



AULA 4

Método dos deslocamentos



Professor Rogério silva

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

O método das forças funciona muito bem quando desejamos resolver estruturas hiperestáticas com grau de hiperestaticidade pequeno.

Quando estamos trabalhando com estruturas com grau de hiperestaticidade maior, esse método fica muito trabalhoso. São nessas situações que o método dos deslocamentos passa a ser mais vantajoso, principalmente quando desejamos implementar esse método em um programa de computador para resolver a estrutura mais rapidamente. Essa vantagem se dá pelo fato de o método dos deslocamentos trabalhar com soluções fundamentais já conhecidas, como iremos ver nesta seção, facilitando a programação computacional desse método. Por esse motivo, o método dos deslocamentos é a base de muitos programas computacionais que realizam a análise de diversos tipos de estruturas.

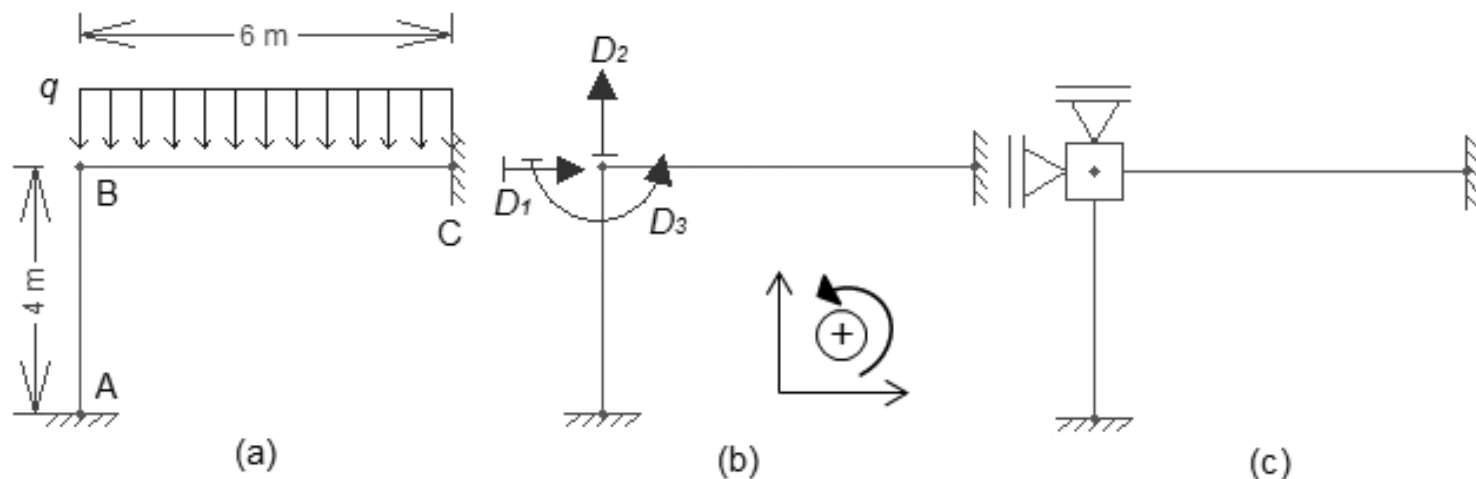
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

No método dos deslocamentos, também utilizaremos a superposição de casos básicos, que ao serem somados, resultam na estrutura original. No método das forças, e feita a superposição de uma série de casos básicos que satisfazem as condições de equilíbrio, e as condições de compatibilidade são respeitadas escrevendo-se uma série de equações de compatibilidade. Já no método dos deslocamentos, e feita a superposição de uma série de casos básicos que respeitam as condições de compatibilidade, e as condições de equilíbrio são respeitadas escrevendo-se uma série de equações de equilíbrio.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

A primeira etapa do método dos deslocamentos consiste em identificar quais são os deslocamentos desconhecidos em cada nó da estrutura. No caso da Figura 2.24a, como os nós A e C são engastes (rotação e deslocamentos vertical e horizontal impedidos), os únicos deslocamentos desconhecidos são os deslocamentos vertical, horizontal e a rotação no nó B. Esses deslocamentos desconhecidos, que chamaremos de dissociabilidades, são incógnitas do nosso problema, e estão desenhados na Figura 2.24b, segundo a convenção de sinais positiva indicada. Essa será a convenção de sinais que adotaremos em todo o método dos deslocamentos.

Figura 2.24 | (a) Pórtico hiperestático; (b) Dissociabilidades; (c) Sistema hipergeométrico



A seguir, devemos fazer a superposição de casos básicos, em que cada um desses casos são soluções cinematicamente determinadas, ou seja, são configurações deformadas conhecidas. Assim, cada um dos casos básicos isola o efeito que o carregamento e que cada uma das dissociabilidades provoca na estrutura. O ponto de partida para a determinação dos casos básicos é a definição do sistema hipergeométrico, representado na figura 2.24a, que nada mais é do que a estrutura original com todos os deslocamentos nodais impedidos através da adição de apoios fictícios. A superposição dos casos básicos está representada na Figura 2.25, na qual é possível notar que a soma da configuração deformada de cada caso resulta na configuração deformada da estrutura original.

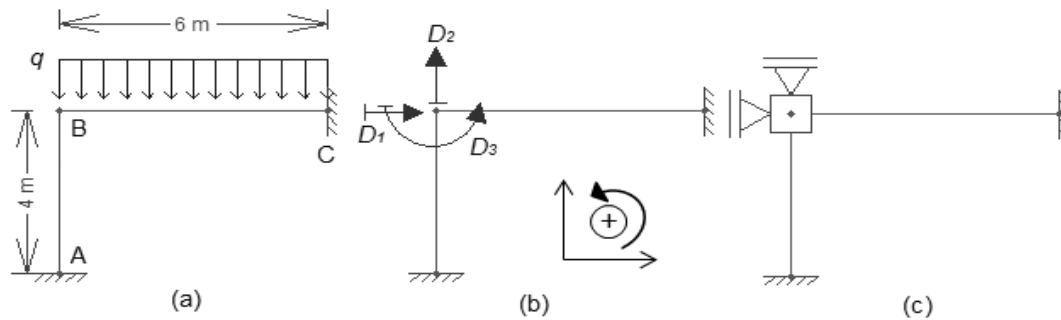


Figura 2.24 | (a) Pórtico hiperestático; (b) Deslocabilidades; (c) Sistema hipergeométrico

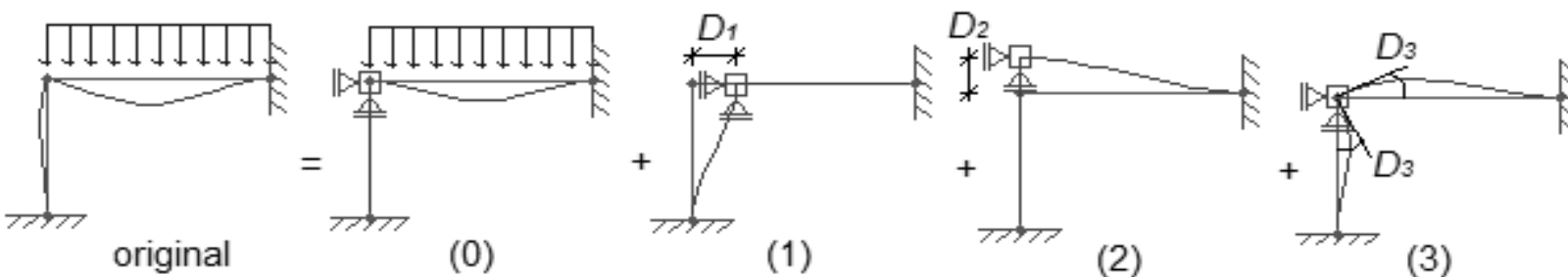


Figura 2.25 | Superposição dos casos básicos

É possível notar que o caso (0) isola o efeito do carregamento em cada barra da estrutura, considerando a atuação desse carregamento no sistema hipergeométrico. Já os casos (1), (2) e (3) isolam o efeito de cada uma das dissociabilidades, liberando apenas um dos deslocamentos desconhecidos e mantendo todos os demais impedidos.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

A seguir, resolvemos cada um dos casos básicos. A resolução do caso (0) consiste em determinar as reações nos apoios fictícios (β_{i0} : β_{10} , β_{20} , β_{30}) provocadas pelos carregamentos, representadas na Figura 2.26a. A resolução dos demais casos consiste em determinar as forças ou os momentos que devem ser aplicados nos apoios fictícios (K_{ij}) para manter a configuração deformada quando se aplica um deslocamento unitário na direção e no sentido da dissociabilidade liberada. Como estamos trabalhando com materiais elástico-lineares, podemos multiplicar cada valor de K_{ij} pela **dissociabilidade** correspondente ao caso analisado, e assim encontrar essas forças ou momentos nos apoios fictícios, quando essa dissociabilidade é aplicada, de maneira análoga, ao procedimento adotado no método das forças. Na Figura 2.26b, estão representadas as forças K_{ij} do caso (1).

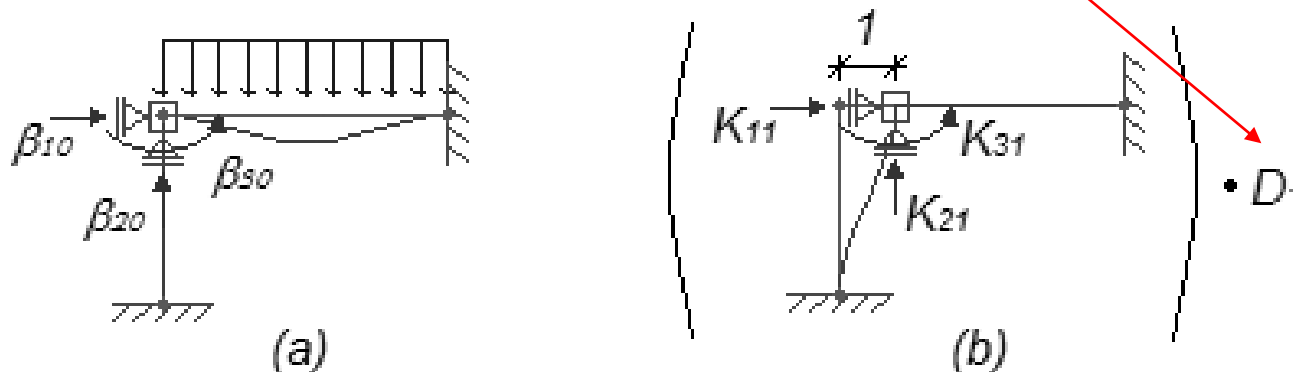


Figura 2.26 | (a) Reações nos apoios fictícios para o caso (0); (b) Forças nos apoios fictícios para o caso (1)

β_{i0} : Reação de apoio fictícia associada a deslocabilidade D_i , quando o carregamento original atua isoladamente no sistema hipergeométrico.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

A seguir, deve-se restabelecer as condições de equilíbrio. Como o nó que possui as dissociabilidades deve estar em equilíbrio, a resultante de forças e de momentos nesse nó deve ser nula. Assim, resolvendo o sistema de três equações e três incógnitas a seguir, determinam-se os valores das dissociabilidades D_1 , D_2 e D_3 .

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \beta_{10} + K_{11} \cdot D_1 + K_{12} \cdot D_2 + K_{13} \cdot D_3 = 0$$

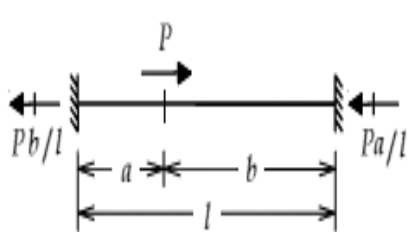
$$\sum M = 0 \Rightarrow \beta_{30} + K_{31} \cdot D_1 + K_{32} \cdot D_2 + K_{33} \cdot D_3 = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \beta_{20} + K_{21} D_1 + K_{22} D_2 + K_{23} D_3 = 0$$

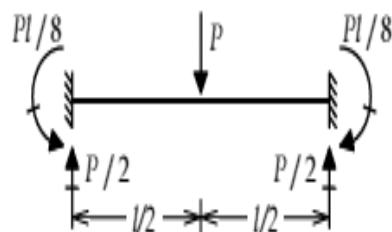
MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS: VIGAS

Agora que já sabemos quais são as etapas do método dos deslocamentos, vamos analisar com mais detalhes o seu emprego no caso de vigas hiperestáticas. Porém, para a utilização desse método, temos que determinar os valores das reações de apoio fictícias ($\beta i0$ e K_{ij}) para diversas situações. As reações nos apoios fictícios do caso (0) são chamadas de termos de carga $\beta i0$, e são definidas como: $\beta i0$: reação de apoio fictícia associada a dissociabilidade D_i , quando o carregamento original atua isoladamente no sistema hipergeométrico.

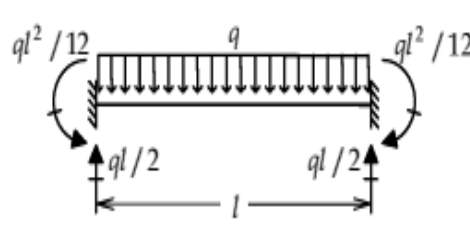
Essas reações de apoio de cada barra podem ser calculadas utilizando-se, por exemplo, o método das forças, supondo que o carregamento atua em uma **barra engastada em ambas as extremidades**, ou seja, essas são as reações de apoio das situações de **engastamento perfeito**, e seus valores são tabelados para cada tipo de carregamento, ou seja, são soluções já conhecidas. A Figura 2.27 apresenta esses valores para alguns tipos de carregamentos.



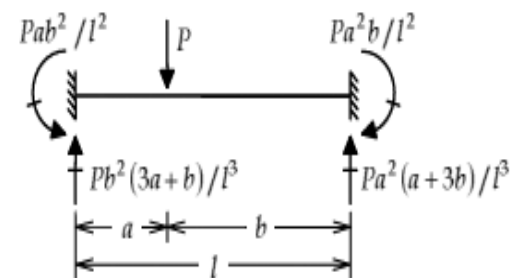
Reações de apoio, devido a carga horizontal deslocada do centro



Reações de apoio devido a carga concentrada no meio do vão



Reações de apoio devido a carga distribuída



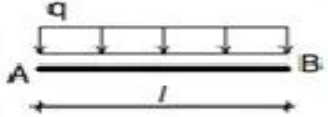
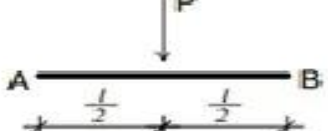
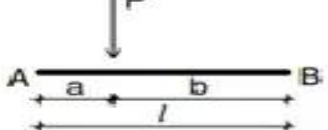
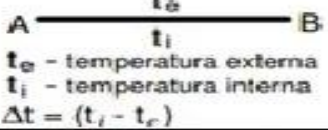
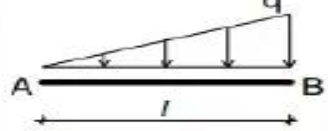
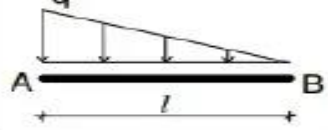
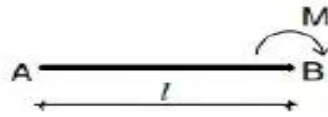
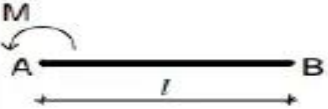
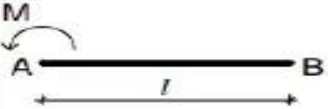
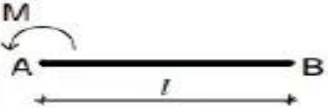
Reações de apoio devido a carga concentrada deslocada do centro

Figura 2.27 Reações de engastamento perfeito para algumas situações de carregamentos

1

2

3

Condições de contorno					
Casos de carregamento					
1		$M_A = +\frac{q \cdot l^2}{12}$ $R_A = \frac{q \cdot l}{2}$	$M_B = -\frac{q \cdot l^2}{12}$ $R_B = \frac{q \cdot l}{2}$	$M_A = +\frac{q \cdot l^2}{8}$ $R_A = \frac{5 \cdot q \cdot l}{8}$	$M_B = 0$ $R_B = \frac{3 \cdot q \cdot l}{8}$
		$M_A = +\frac{P \cdot l}{8}$ $R_A = \frac{P}{2}$	$M_B = -\frac{P \cdot l}{8}$ $R_B = \frac{P}{2}$	$M_A = +\frac{3}{16} P \cdot l$ $R_A = \frac{11 \cdot P}{16}$	$M_B = 0$ $R_B = \frac{5 \cdot P}{16}$
		$M_A = +\frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^3}$	$M_B = -\frac{P \cdot a^2 \cdot b}{l^3}$	$M_A = +\frac{P \cdot a \cdot b}{2l^2} (l + b)$	$M_B = 0$
	 t_e - temperatura externa t_i - temperatura interna $\Delta t = (t_i - t_e)$	$M_A = \frac{EI \cdot \alpha \cdot \Delta t}{h}$	$M_B = -\frac{EI \cdot \alpha \cdot \Delta t}{h}$	$M_A = \frac{3EI \cdot \alpha \cdot \Delta t}{2h}$	$M_B = 0$
		h - Altura da seção transversal		h - Altura da seção transversal	
5		$M_A = +\frac{q \cdot l^2}{30}$	$M_B = -\frac{q \cdot l^2}{20}$	$M_A = +\frac{7q \cdot l^2}{120}$	$M_B = 0$
		$M_A = +\frac{q \cdot l^2}{20}$	$M_B = -\frac{q \cdot l^2}{30}$	$M_A = +\frac{q \cdot l^2}{15}$	$M_B = 0$
7		$M_A = 0$	$M_B = +M$	$M_A = -\frac{M}{2}$	$M_B = -M$
		$M_A = -M$	$M_B = 0$	$M_A = -M$	$M_B = 0$
8		$M_A = -M$	$M_B = 0$	$M_A = -M$	$M_B = 0$
		$M_A = +M$	$M_B = +\frac{M}{2}$	$M_A = +M$	$M_B = +\frac{M}{2}$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Já as forças ou momentos que aparecem nos apoios fictícios dos demais casos são chamadas de coeficientes de rigidez globais K_{ij} , estão definidas como:

K_{ij} : força ou momento na direção da deslocabilidade D_i , que surge quando apenas um deslocamento $D_j = 1$ e aplicado. Os valores dos coeficientes de rigidez globais são obtidos somando-se os coeficientes de rigidez locais das barras adjacentes a um mesmo no. A unidade do coeficiente de rigidez é dada pela unidade da força ou momento, dividida pela unidade da deslocabilidade unitária aplicada. Novamente, os valores dos coeficientes de rigidez locais são soluções já conhecidas, e seus valores são tabelados para cada tipo de deslocamento, conforme apresentado na Figura 2.28 para algumas situações.

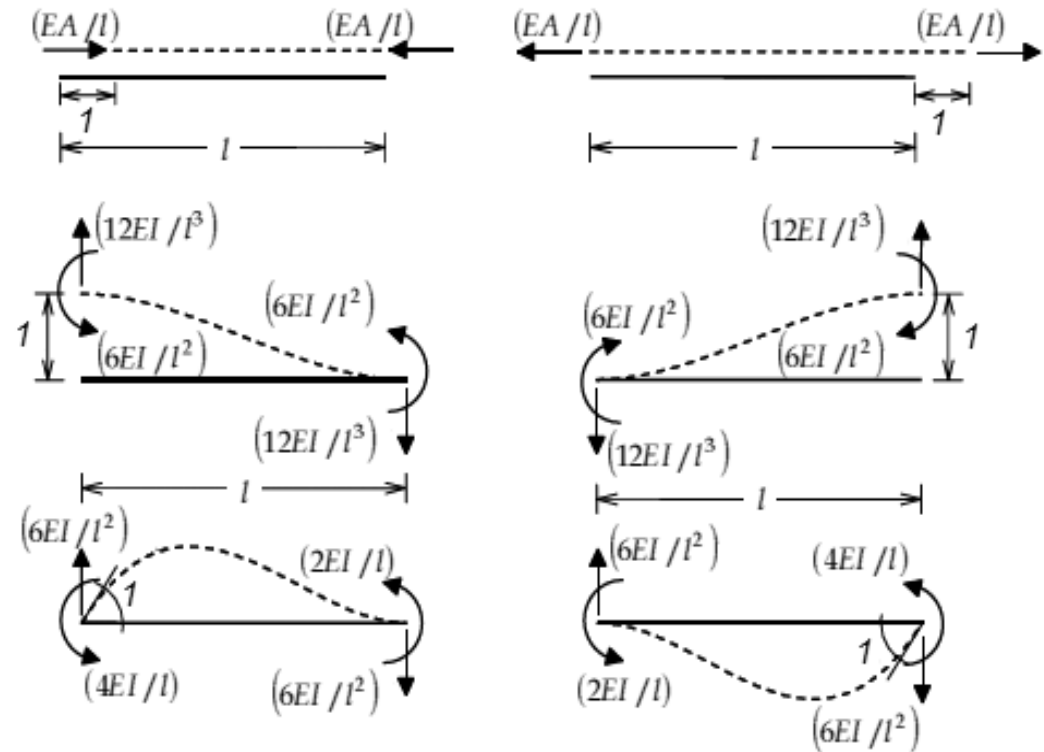


Figura 2.28 | Coeficientes de rigidez locais para algumas situações de deslocamentos

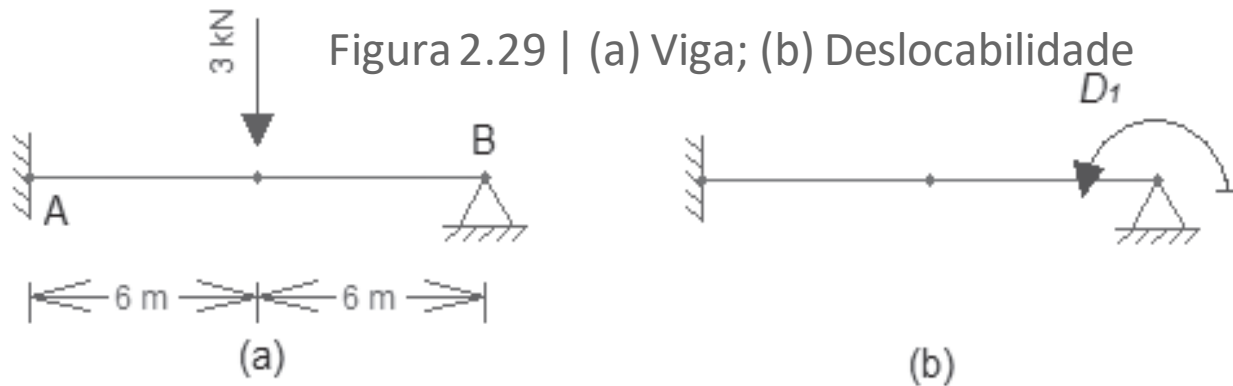
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Os passos para a utilização do método dos deslocamentos são:

- Determinar as deslocabilidades de cada no, no sentido positivo.
- Definir o sistema hipergeometrico, resolver o caso (0) e encontrar cada β_{i0} .
- Resolver os demais casos básicos, aplicando deslocamentos unitários isolados para encontrar cada K_{ij} .
- Montar o sistema de equações de equilíbrio, resolver e determinar cada D_i .
- Determinar os esforços na extremidades das barras e traçar os diagramas.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Determinar a rotação do apoio B da viga da Figura 2.29a, que possui $E.I = 10^5 \text{ kN.m}^2$, trace o diagrama de momento fletor e determine as reações de apoio.



Como o único deslocamento nodal desconhecido é a rotação do apoio B, temos apenas uma deslocabilidade D_1 , conforme a Figura 2.29b. Assim, teremos apenas os casos (0) e (1), representados na Figura 2.30.

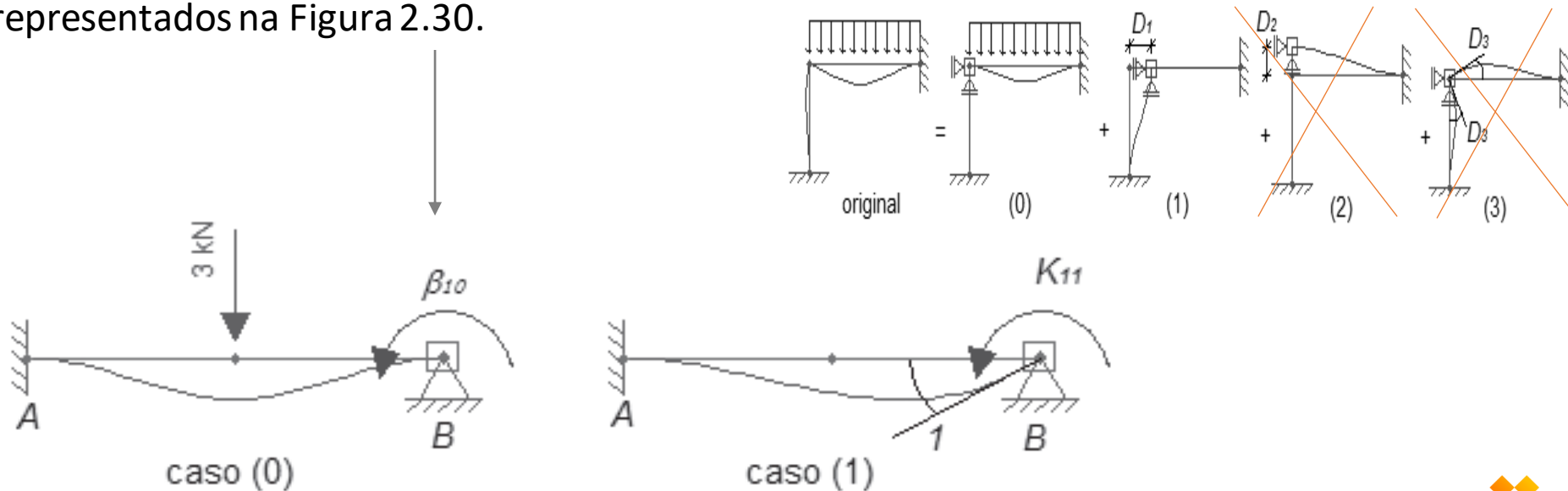


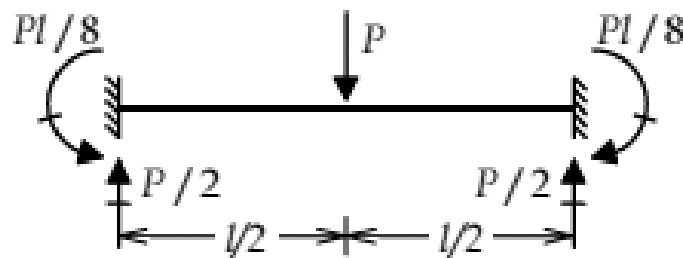
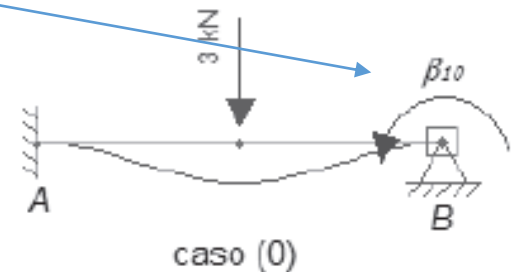
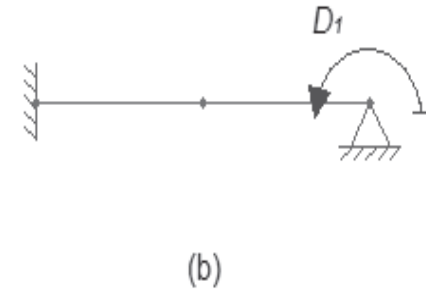
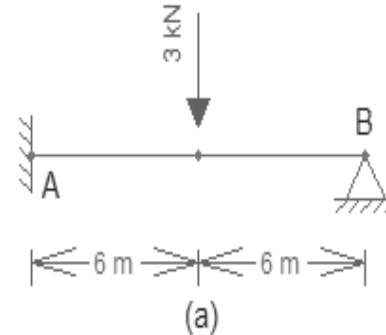
Figura 2.30 | Casos (0) e (1)

CASO 0 : Usamos o carregamento original para definirmos o sistema hipergeométrico e encontrarmos a reação β_{10} no apoio que no caso é o momento fletor.

Pela Figura 2.27 podemos determinar o valor de β_{10} , que é a reação de momento no apoio direito (M_{BA}^0) de uma viga bi-engastada submetida a uma carga concentrada no meio do vão, além do valor da reação e momento no apoio esquerdo (M_{AB}^0):

$$M_{AB}^0 = \frac{P \cdot L}{8} = \frac{3 \cdot 12}{8} = 4,5 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA}^0 = -\frac{P \cdot L}{8} = -4,5 \text{ kN.m} = \beta_{10}$$



A dissociabilidade D1 está no apoio da direita



CASO 1 : Determinamos K₁₁

Pela Figura 2.28 encontramos o valor de K_{11} , que é o momento no apoio direito (M_{BA}^1) de uma viga engastada no lado oposto, submetida a uma rotação unitária, e também encontramos o momento no apoio esquerdo (M_{AB}^1):

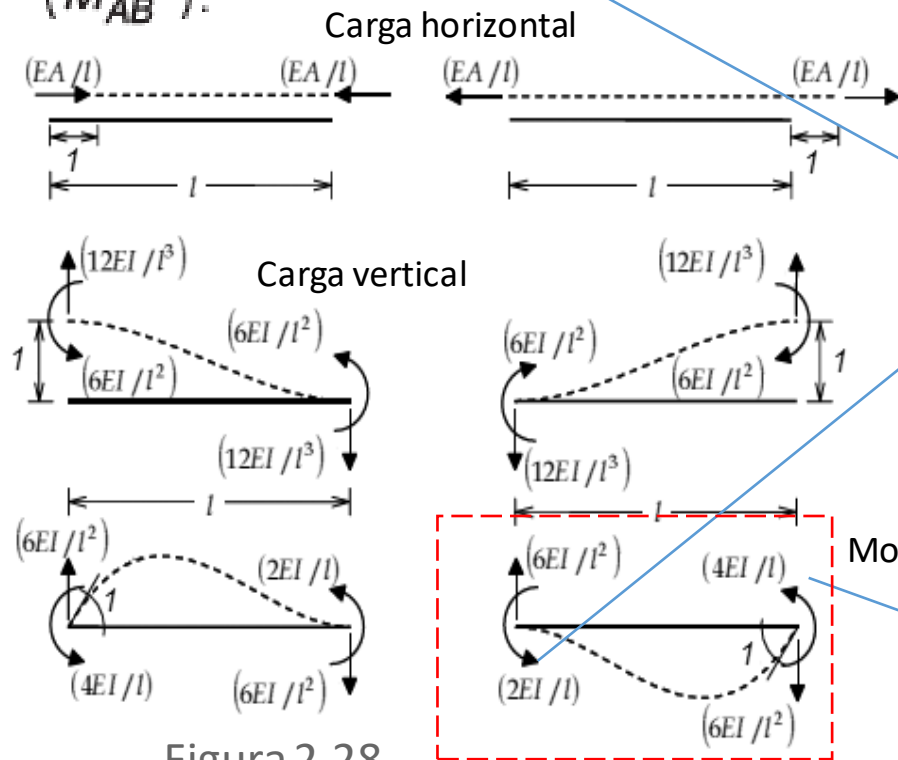


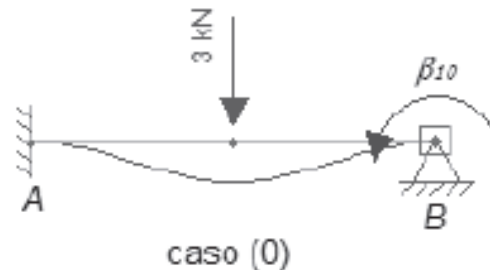
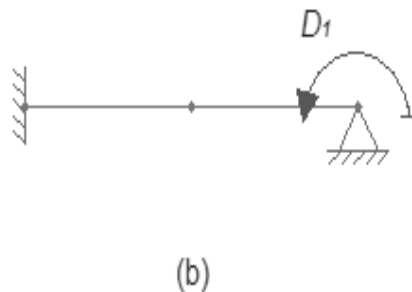
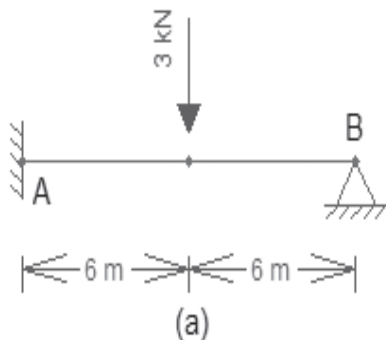
Figura 2.28

$$M_{AB}^1 = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{2 \cdot 10^5}{12} = 1,67 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{BA}^1 = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{4 \cdot 10^5}{12} = 3,33 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad} = K_{11}$$

Figura com engastamento
no lado oposto

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



Montando a equação de equilíbrio de momentos do no B, e resolvendo para D_1 :

$$\beta_{10} + K_{11} \cdot D_1 = 0 \Rightarrow -4,5 + 3,33 \cdot 10^4 \cdot D_1 = 0 \Rightarrow D_1 = 1,35 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Como D_1 é positivo, isso significa que o giro tem o mesmo sentido do giro unitário aplicado em B no caso (1), ou seja, o giro D_1 é anti-horário.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Para traçar o diagrama de momentos fletores da viga da Figura 2.29a, basta fazer a superposição dos momentos nas extremidades da viga para os casos (0) e (1):

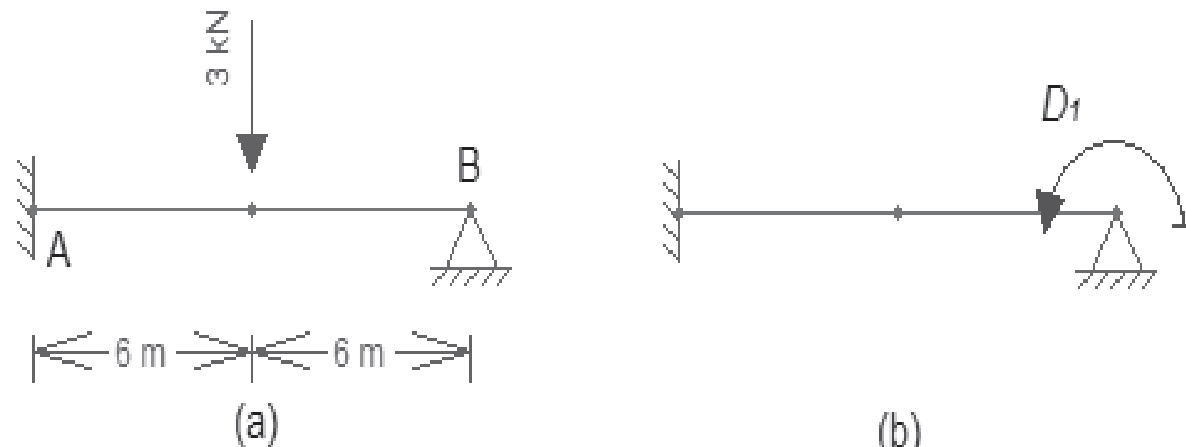


Figura 2.29 | (a) Viga; (b) Deslocabilidade

PELO FORMULÁRIO

$$M_{AB} = (3P.L)/16$$

$$M_{AB} = (3.3.12)/16 = 6,75 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA} = 0 \text{ kN.m}$$

$$M_{AB} = M_{AB}^0 + M_{AB}^1 \cdot D_1 = 4,5 + 1,67 \cdot 10^4 \cdot 1,35 \cdot 10^{-4} = 6,75 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA} = M_{BA}^0 + M_{BA}^1 \cdot D_1 = -4,5 + 3,33 \cdot 10^4 \cdot 1,35 \cdot 10^{-4} = 0 \text{ kN.m}$$

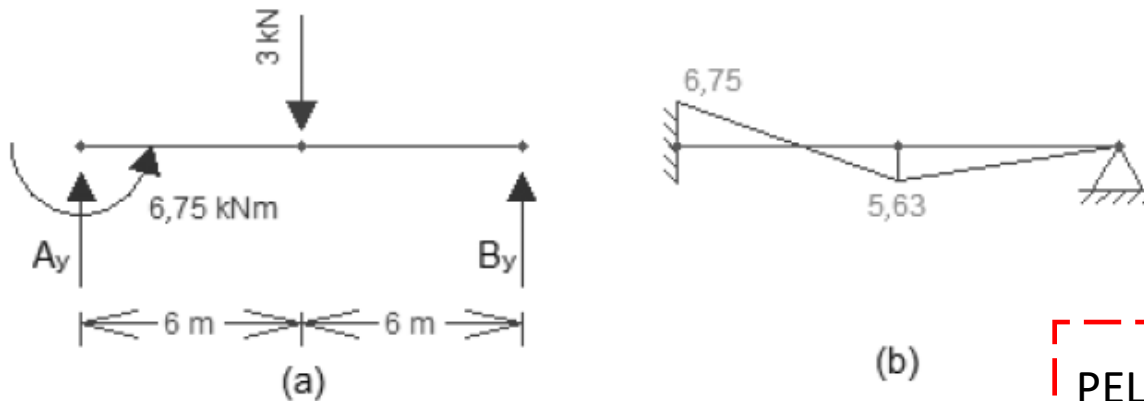
Para o meio do vão ($L=6$)

$$M_{BA} = M_{AB0} + M_{AB1} \cdot D_1 = (-3 \cdot 3 \cdot 6 / 16) - (1,67 \cdot 10^4 \cdot 1,35 \cdot 10^{-4}) = -5,63 \text{ kN.m}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

As reações de apoio verticais em A e B são determinadas pelo equilíbrio das forças verticais e dos momentos fletores nas extremidades da viga, conforme a Figura 2.32a. Assim, é possível traçar o diagrama de momentos fletores da Figura 2.32b.

Figura 2.32 | (a) Equilíbrio da viga; (b) Diagrama de momentos fletores (kN.m)



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 6,75 - 3 \cdot 6 + B_y \cdot 12 = 0 \Rightarrow B_y = 0,94 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 3 + 0,94 = 0 \Rightarrow A_y = 2,06 \text{ kN}$$

PELO FORMULÁRIO

$$R_A = 11P/16$$

$$R_A = 11 \cdot 3 / 16 = 2,06 \text{ kN}$$

$$R_B = 5P/16$$

$$R_B = 5 \cdot 3 / 16 = 0,94 \text{ kN}$$

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS: PÓRTICOS

Para exemplificar, são determinados a seguir os coeficientes de rigidez do caso (1) do pórtico da Figura 2.24a. Pela Figura 2.31 nota-se que, ao aplicar um deslocamento unitário horizontal no nó B, a barra AB (vertical) apresenta um deslocamento transversal unitário, surgindo forças transversais e momentos nas suas extremidades para manter a configuração deformada da barra, mas sem o surgimento de nenhuma força axial. Já no caso da barra BC (horizontal), o deslocamento horizontal unitário em B provoca um deslocamento axial dessa barra, surgindo forças axiais em suas extremidades, mas sem o surgimento de forças transversais e momentos.

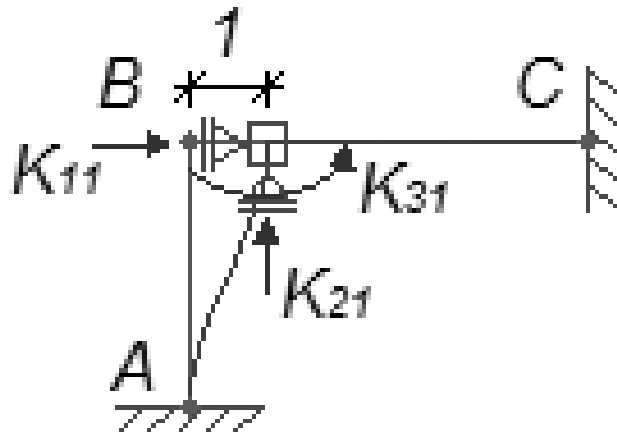


Figura 2.31 | Coeficientes de rigidez do caso (1)

Esses momentos e forças que surgem nas extremidades das barras são os coeficientes de rigidez locais, e são obtidos através da Figura 2.28, utilizando o caso de um deslocamento transversal unitário para a barra AB e o caso de um deslocamento axial unitário para a barra BC. Para encontrar os coeficientes de rigidez globais do nó B, basta somar os coeficientes de rigidez locais de mesma direção que ocorrem no nó B nas extremidades das duas barras:

$$K_{11} = \frac{E \cdot A}{6} + \frac{12 \cdot E \cdot I}{4^3} \quad K_{21} = 0 + 0 \quad K_{31} = 0 + \frac{6 \cdot E \cdot I}{4^2}$$

Para encontrar os temas de carga e os coeficientes de rigidez dos demais casos, deve-se proceder de maneira análoga

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS: DIAGRAMAS

Uma vez determinados os deslocamentos nodais (deslocabilidades), é possível encontrar os momentos nas extremidades de cada barra da estrutura original utilizando-se a superposição:

$$M = M_0 + M_1 \cdot D_1 + M_2 \cdot D_2 + \dots + M_n \cdot D_n$$

Em que:

M : momento na extremidade de uma barra para a estrutura original.

$M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$: momentos na extremidade de uma barra para os casos básicos

$D_1, D_2, \dots, D_n$: deslocabilidades já encontradas.

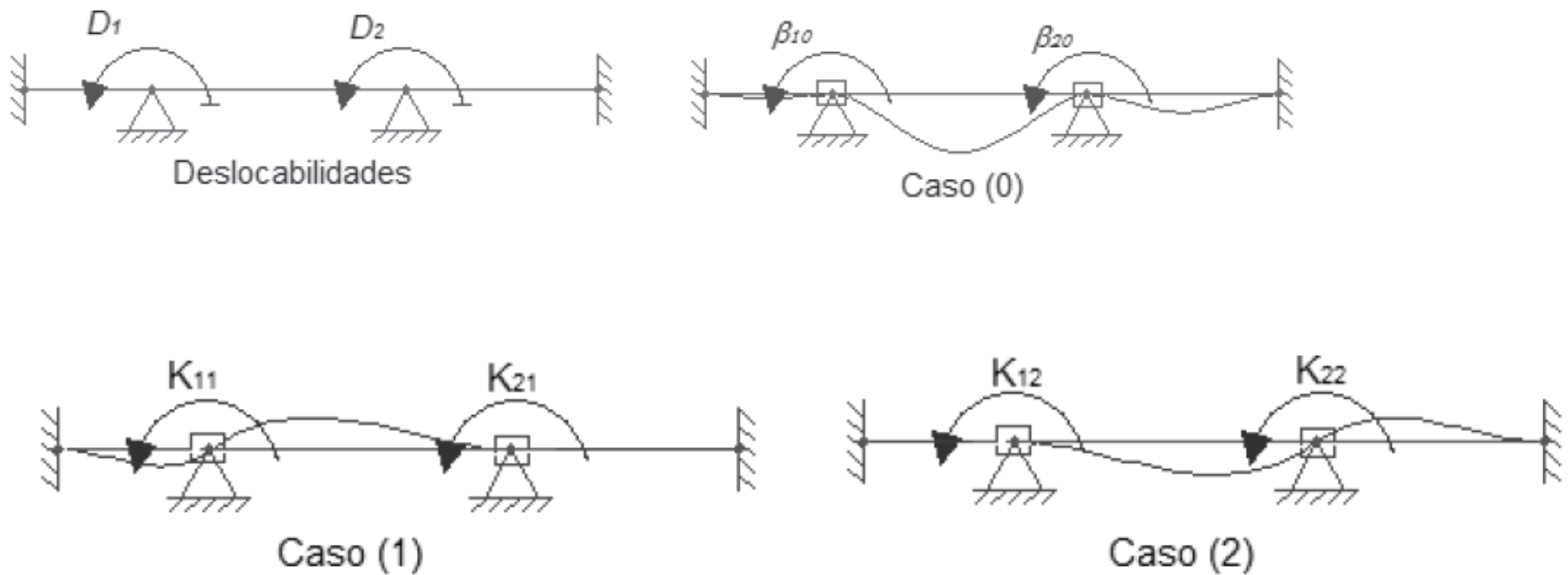
Com os momentos nas extremidades de todas as barras da estrutura original, é possível traçar o diagrama de momentos fletores.

Essa mesma superposição também é válida para traçar os diagramas de esforço normal e esforço cortante.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

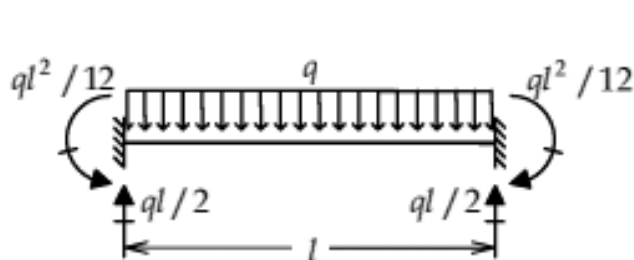
Obtenha o diagrama de momentos fletores da viga da Figura 2.23, utilizando o método dos deslocamentos. Essa viga possui duas deslocabilidades. Assim, são necessários três casos básicos, (0), (1) e (2), para resolver o problema. As deslocabilidades e os casos básicos são apresentados na Figura 2.33, com a representação dos termos de carga e dos coeficientes de rigidez no sentido positivo.

Figura 2.33 | Deslocabilidades e três casos básicos



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

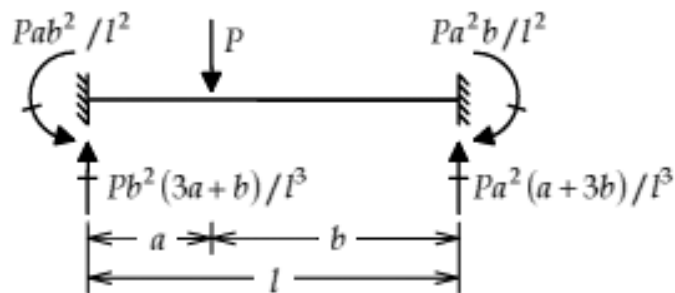
Para encontrar os termos de carga β_{10} e β_{20} , devemos determinar os momentos de engastamento perfeito nas extremidades das barras AB, BC e CD, para o caso (0), utilizando o caso de carregamento uniformemente distribuído da Figura 2.27:



$$M_{AB}^0 = \frac{q \cdot L^2}{12} = \frac{6 \cdot 2^2}{12} = 2 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC}^0 = \frac{q \cdot L^2}{12} = \frac{6 \cdot 4^2}{12} = 8 \text{ kN.m}$$

$$M_{CD}^0 = \frac{q \cdot L^2}{12} = \frac{6 \cdot 3^2}{12} = 4,5 \text{ kN.m}$$



$$M_{BA}^0 = -\frac{q \cdot L^2}{12} = -2 \text{ kN.m}$$

$$M_{CB}^0 = -\frac{q \cdot L^2}{12} = -8 \text{ kN.m}$$

$$M_{DC}^0 = -\frac{q \cdot L^2}{12} = -4,5 \text{ kN.m}$$

O termo de carga β_{10} é a soma dos momentos de engastamento perfeito na extremidade B da barra AB e na extremidade B da barra BC. Já β_{20} é a soma dos momentos de engastamento perfeito na extremidade C da barra BC e na extremidade C da barra CD:

$$\beta_{10} = M_{BA}^0 + M_{BC}^0 = -2 + 8 = 6 \text{ kN.m}$$

$$\beta_{20} = M_{CB}^0 + M_{CD}^0 = -8 + 4,5 = -3,5 \text{ kN.m}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Para os casos (1) e (2), devemos usar a situação de giro unitário da Figura 2.28 para encontrar os momentos nas extremidades das barras AB, BC e CD. De maneira análoga a determinação dos termos de carga, K_{11} , K_{21} , K_{12} e K_{22} são obtidos pela soma dos momentos nas extremidades das barras adjacentes ao nó em que o coeficiente de rigidez está atuando. Lembrando que, neste caso, $E I = 10^4 \text{ kN.m}^2$.

- Para o caso (1):

$$M_{AB}^1 = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{2 \cdot 10^4}{2} = 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{BA}^1 = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{4 \cdot 10^4}{2} = 2 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{BC}^1 = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{4 \cdot 10^4}{4} = 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{CB}^1 = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{2 \cdot 10^4}{4} = 0,5 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{CD}^1 = 0 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{DC}^1 = 0 \text{ kN.m / rad}$$

$$K_{11} = M_{BA}^1 + M_{BC}^1 = 3 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$K_{21} = M_{CB}^1 + M_{CD}^1 = 0,5 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

- Para o caso (2):

$$M_{AB}^2 = 0 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{BA}^2 = 0 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{BC}^2 = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{2 \cdot 10^4}{4} = 0,5 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{CB}^2 = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{4 \cdot 10^4}{4} = 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{CD}^2 = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{4 \cdot 10^4}{3} = 1,33 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{DC}^2 = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{2 \cdot 10^4}{3} = 0,67 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$K_{12} = M_{BA}^2 + M_{BC}^2 = 0,5 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$K_{22} = M_{CB}^2 + M_{CD}^2 = 2,33 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Escrevendo as equações de equilíbrio de momentos dos nós B e C, e resolvendo o sistema de duas equações e duas incógnitas, temos:

$$\beta_{10} + K_{11} \cdot D_1 + K_{12} \cdot D_2 = 0 \Rightarrow 6 + 3 \cdot 10^4 \cdot D_1 + 0,5 \cdot 10^4 \cdot D_2 = 0$$

$$\beta_{20} + K_{21} \cdot D_1 + K_{22} \cdot D_2 = 0 \Rightarrow -3,5 + 0,5 \cdot 10^4 \cdot D_1 + 2,33 \cdot 10^4 \cdot D_2 = 0$$

$$D_1 = -2,33 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \qquad D_2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Com as deslocabilidades determinadas, basta encontrar os momentos nas extremidades de cada barra pela superposição, e então traçar o diagrama de momentos fletores, apresentado na Figura 2.34.

$$M_{AB} = M_{AB}^0 + M_{AB}^1 \cdot D_1 + M_{AB}^2 \cdot D_2 = 2 + 10^4 \cdot (-2,33 \cdot 10^{-4}) + 0 = -0,33 \text{ kN.m giro horário}$$

$$M_{BA} = M_{BA}^0 + M_{BA}^1 \cdot D_1 + M_{BA}^2 \cdot D_2 = -2 + 2 \cdot 10^4 \cdot (-2,33 \cdot 10^{-4}) + 0 = -6,67 \text{ kN.m giro horário}$$

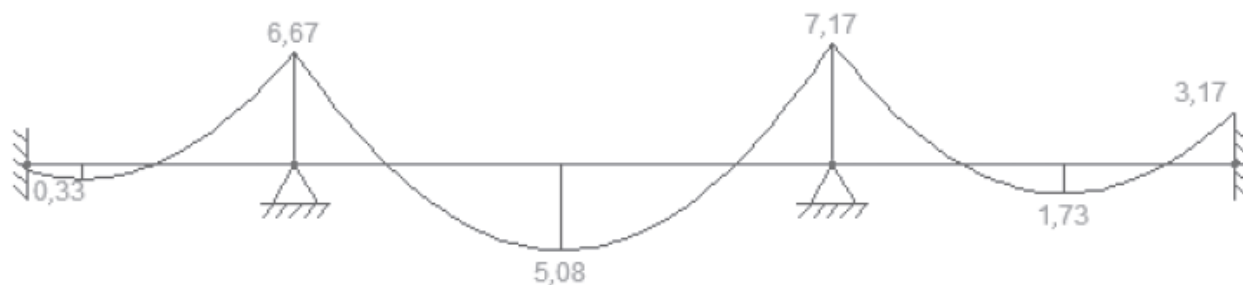
$$M_{BC} = M_{BC}^0 + M_{BC}^1 \cdot D_1 + M_{BC}^2 \cdot D_2 = 8 + 10^4 \cdot (-2,33 \cdot 10^{-4}) + 0,5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 6,67 \text{ kN.m anti-horário}$$

$$M_{CB} = M_{CB}^0 + M_{CB}^1 \cdot D_1 + M_{CB}^2 \cdot D_2 = -8 + 0,5 \cdot 10^4 \cdot (-2,33 \cdot 10^{-4}) + 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = -7,17 \text{ kN.m horário}$$

$$M_{CD} = M_{CD}^0 + M_{CD}^1 \cdot D_1 + M_{CD}^2 \cdot D_2 = 4,5 + 0 + 1,33 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 7,17 \text{ kN.m anti-horário}$$

$$M_{DC} = M_{DC}^0 + M_{DC}^1 \cdot D_1 + M_{DC}^2 \cdot D_2 = -4,5 + 0 + 0,67 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = -3,17 \text{ kN.m horário}$$

Figura 2.34 | Diagrama de momentos fletores (kN.m)



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



pitágoras

AULA 5

Linhas de influência:
estruturas hiperestáticas

Professor Rogério silva

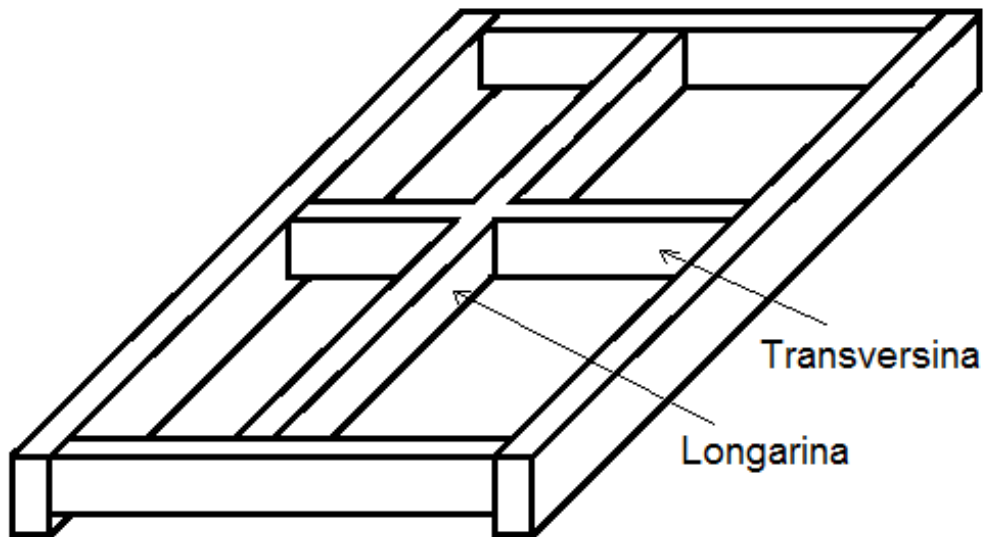
Até o momento analisamos apenas estruturas submetidas as cargas estáticas, ou seja, que estão sempre no mesmo lugar, porém, você já parou para pensar em como e feito o dimensionamento de uma estrutura submetida a uma carga móvel, ou seja, uma carga que pode atuar em varias posições diferentes ao longo da vida útil da estrutura? E que tipo de estrutura e essa que esta submetida a uma carga móvel?

Utilizamos as linhas de influencia para determinar as reações de apoio e os esforços em estruturas submetidas as cargas moveis, como, por exemplo, os viadutos, as pontes rodoviárias, ferroviárias ou de pedestres. Ou seja, sem o conhecimento da linha de influencia, você não conseguira projetar uma ponte ou um viaduto durante a sua vida profissional, nem mesmo uma simples ponte rolante em uma indústria. Assim, fica clara a importância desse assunto para um engenheiro civil.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Vamos iniciar o nosso estudo de linhas de influência pela análise de vigas isostáticas, para, nas seções seguintes, passarmos ao estudo de linhas de influência em vigas hiperestáticas.

Para projetar a ponte, você deve analisar todos os seus elementos estruturais, ou seja, tanto as transversinas quanto as longarinas da ponte. Para exemplificar, na figura abaixo é apresentada a localização de uma longarina e de uma transversina de uma ponte qualquer.



LINHAS DE INFLUÊNCIA DE REAÇÃO DE APOIO

1-) INTRODUÇÃO

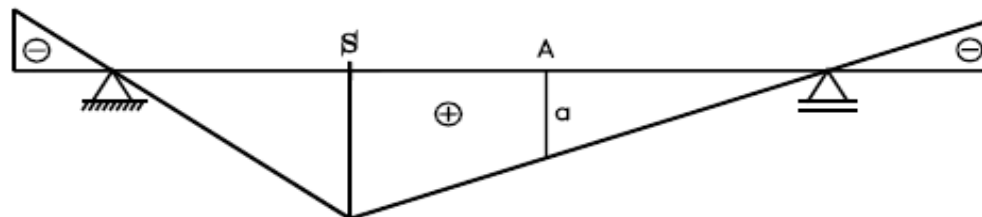
As linhas de influência tem uma importante aplicação no projeto de estruturas submetidas a carregamentos móveis, tais como: pontes, viadutos, passarelas e vigas de rolamento.

Nos capítulos anteriores foram desenvolvidas técnicas para analisar estruturas isostáticas submetidas a carregamento fixo. Será mostrado agora como os esforços solicitantes numa estrutura isostática variam com a posição do carregamento móvel.

2-) DEFINIÇÃO

Uma linha de influência mostra como um determinado esforço numa seção varia quando uma carga concentrada move sobre a estrutura. A linha de influência é construída sobre o eixo da estrutura sendo que as abscissas representam as posições da carga móvel e as ordenadas representam os respectivos valores do esforço considerado.

Exemplo: Linha de influência de momento fletor para uma seção S

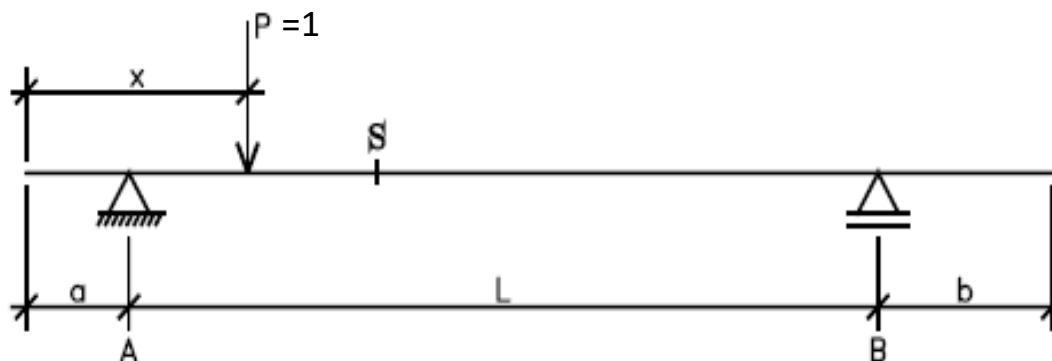


3-) PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

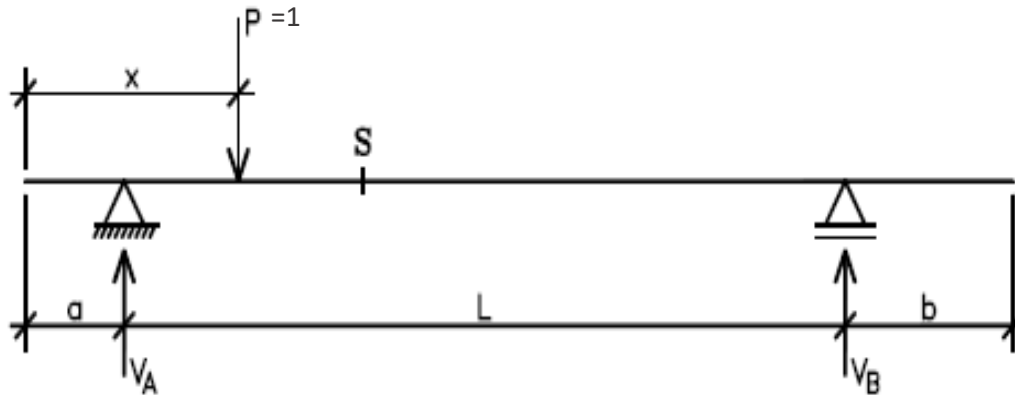
Será mostrado a seguir os procedimentos para se construir uma linha de influência de um esforço numa determinada seção.

3.1-) Vigas sobre 2 apoios

Seja uma carga móvel vertical "**P**" deslocando-se sobre a viga **AB** mostrada abaixo, e x a posição desta carga.



3.1.1-) Linha de influência das reações de apoio



$$\sum M_A = 0$$

$$V_B \cdot L - P(x-a) = 0$$

$$V_B = P(x-a)/L$$

$$\overline{V_B} = (x-a)/L$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

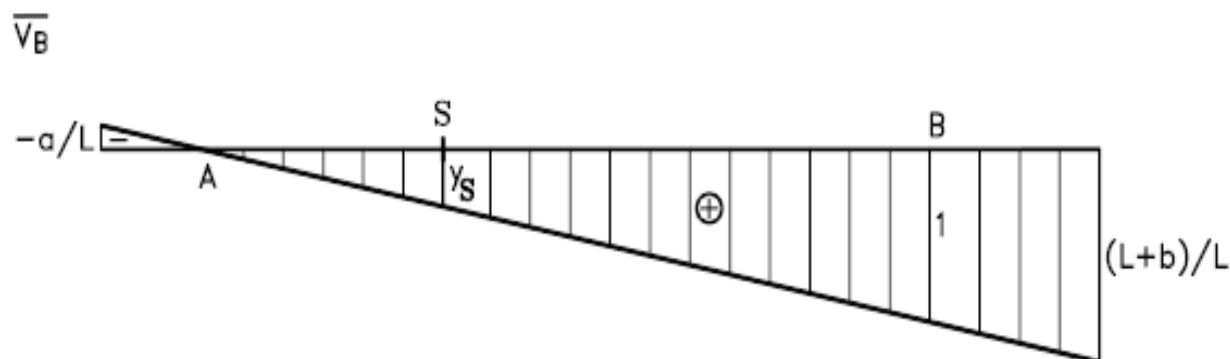
Chama-se $\overline{V}_B$ de “linha de influência” da reação de apoio V_B , isto é, uma equação que mostra como a reação V_B varia com a posição x de uma carga unitária que se desloca sobre a estrutura. Nota-se que os valores de $\overline{V}_B$ são adimensionais. Dando valores para x determina-se os respectivos valores de $\overline{V}_B$.

$$x = a \Rightarrow \overline{V}_B = 0 \text{ (carga sobre o apoio A)}$$

$$x = L+a \Rightarrow \overline{V}_B = (L+a-a)/L \Rightarrow \overline{V}_B = 1 \text{ (carga sobre o apoio B)}$$

$$x = 0 \Rightarrow \overline{V}_B = -a/L \text{ (carga na extremidade do balanço esquerdo)}$$

$$x = a+L+b \Rightarrow \overline{V}_B = (a+L+b-a)/L \Rightarrow \overline{V}_B = (L+b)/L > 1$$



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

A ordenada " Y_S " representa o valor da reação de apoio V_B quando a carga móvel unitária estiver sobre a seção " s ". Analogamente, obtêm-se $\overline{V}_A$:

$$\sum M_B = 0$$

$$V_A \cdot L - P(L+a-x) = 0$$

$$V_A = P(L+a-x)/L$$

$$V_A = \frac{P(L-x)}{L}$$

dividindo-se ambos os membros por P , resulta:

$$\overline{V}_A = (L+a-x)/L$$

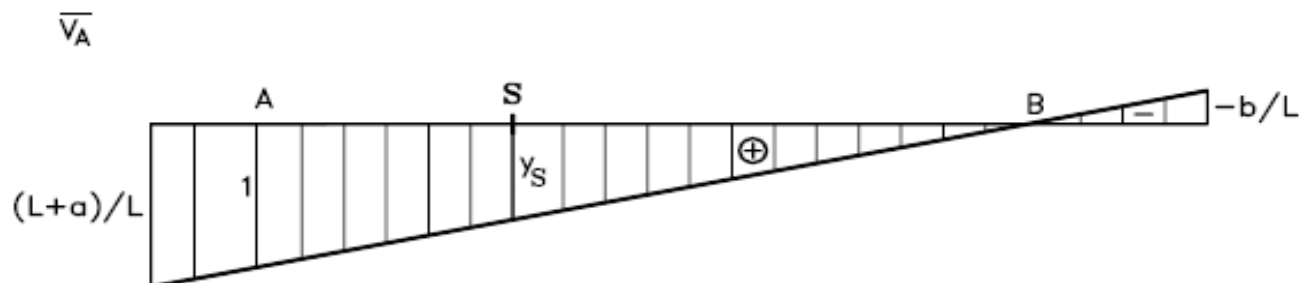
Dando valores para x , obtêm-se:

$$x = a \Rightarrow \overline{V}_A = (L+a-a)/L \Rightarrow \overline{V}_A = 1 \text{ (carga sobre o apoio A)}$$

$$x = L+a \Rightarrow \overline{V}_A = [(L+a-(L+a))/L] \Rightarrow \overline{V}_A = 0 \text{ (carga sobre o apoio B)}$$

$$x = 0 \Rightarrow \overline{V}_A = (L+a)/L > 1 \text{ (carga na extremidade do balanço esquerdo)}$$

$$x = a+L+b \Rightarrow \overline{V}_A = [-(a+L+b)+L+a]/L \Rightarrow \overline{V}_A = -b/L$$



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

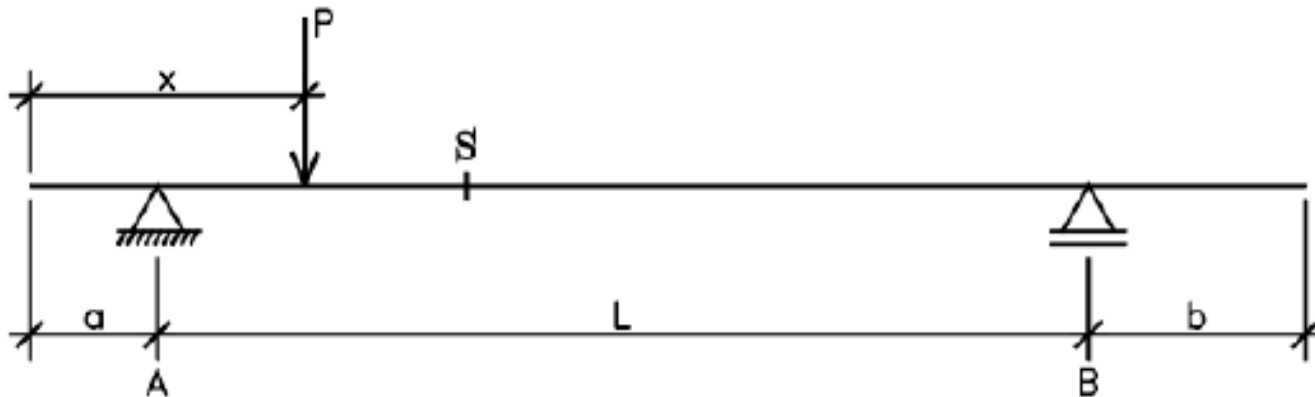
Exercício proposto:

Trace as linhas de influência de reação de apoio V_A e V_B para a estrutura abaixo:

$L = 25,00 \text{ m}$

$a = b = 3,00 \text{ m}$

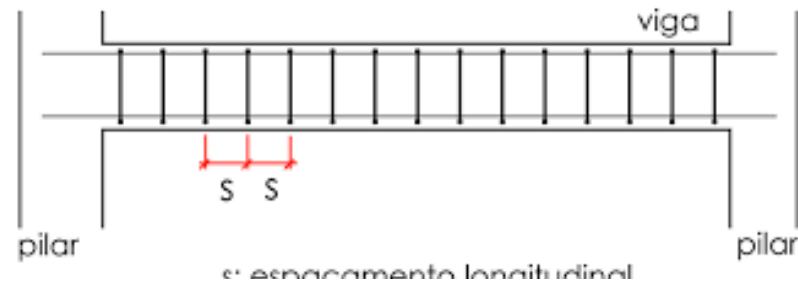
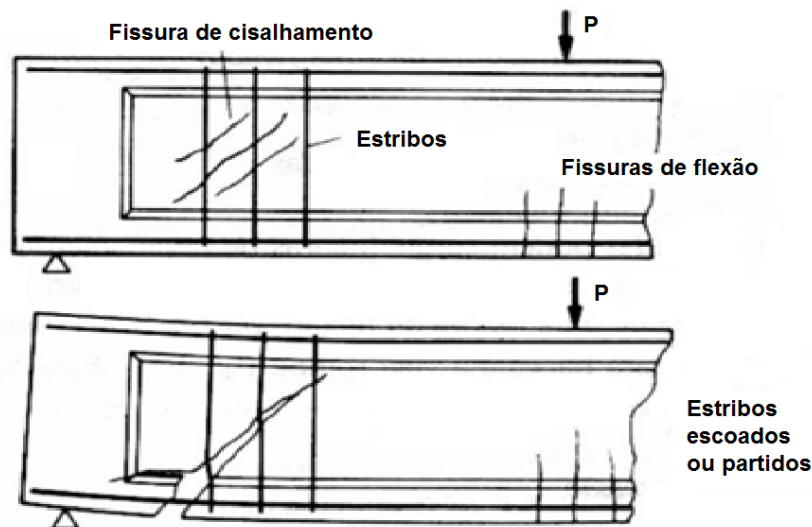
$P = 1$



LINHAS DE INFLUÊNCIA DE FORÇA CORTANTE

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

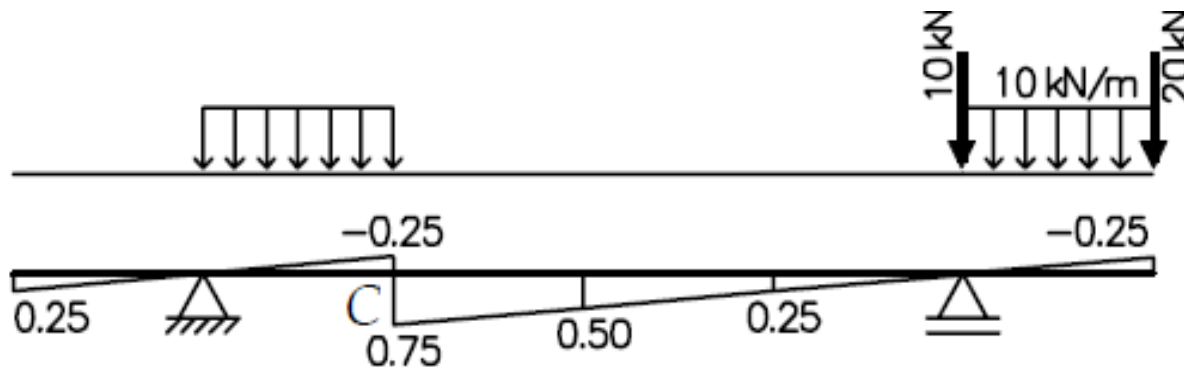
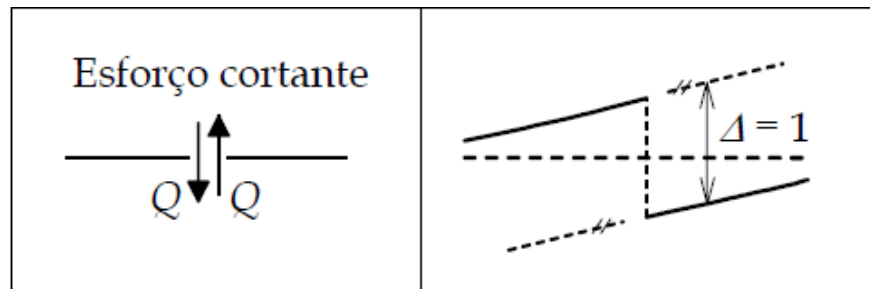
Cisalhamento : Associados a barras longitudinais curvadas (barras dobradas). tensões principais de tração e de compressão. **Cisalhamento** é um tipo de tensão gerado por forças aplicadas em sentidos iguais ou opostos, em direções semelhantes (binário) , mas com intensidades diferentes no material analisado.



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

As forças que provocam tensões de cisalhamento são chamadas de força cortante e formam um binário, podemos determinar o diagrama de força cortante em qualquer seção da estrutura, montando-se a equação na seção, considerando a força atuante a esquerda e a direita desta seção.

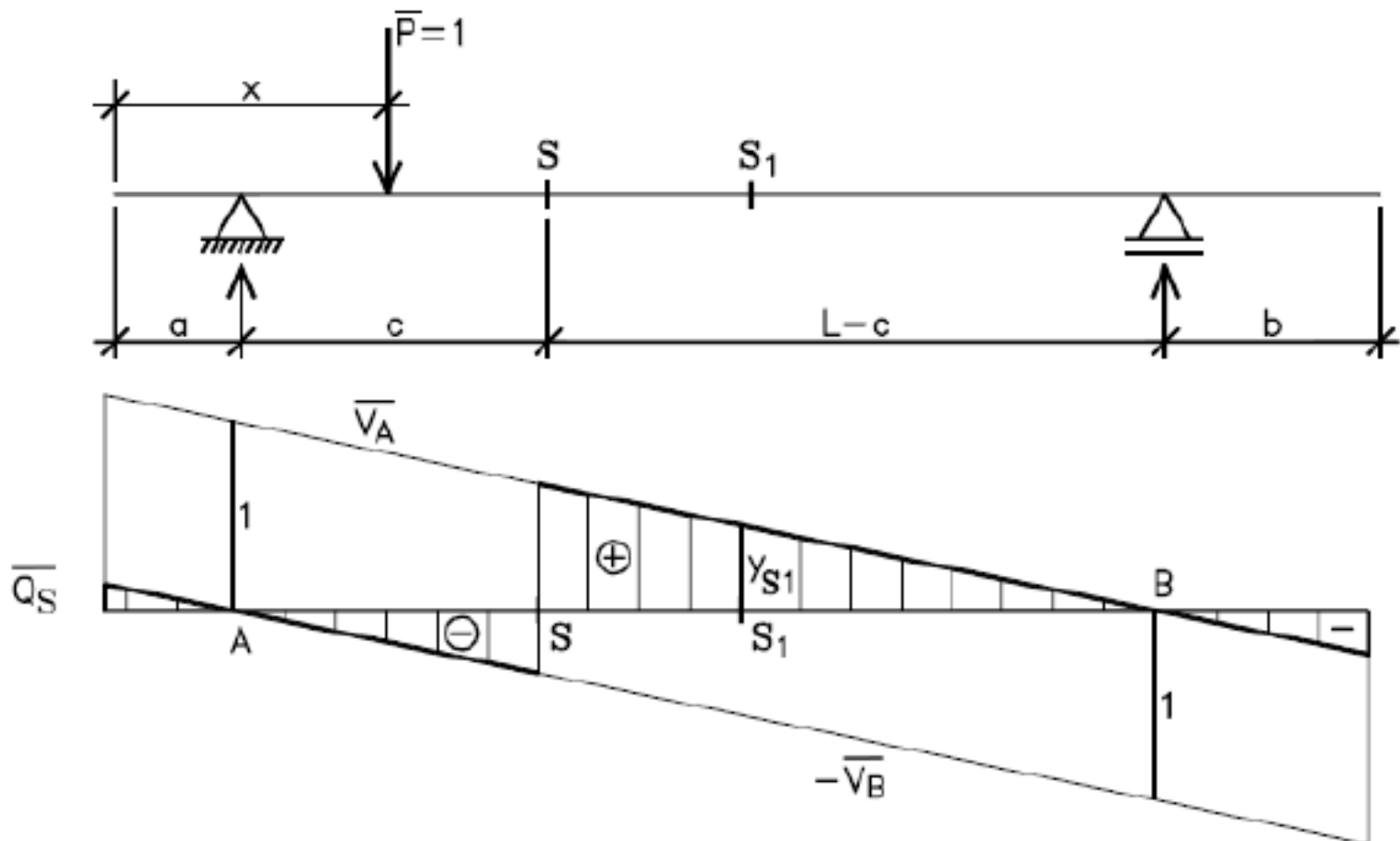
Nos apoios a força cortante é sempre nula.



Posição da carga móvel
para Q_c mínimo

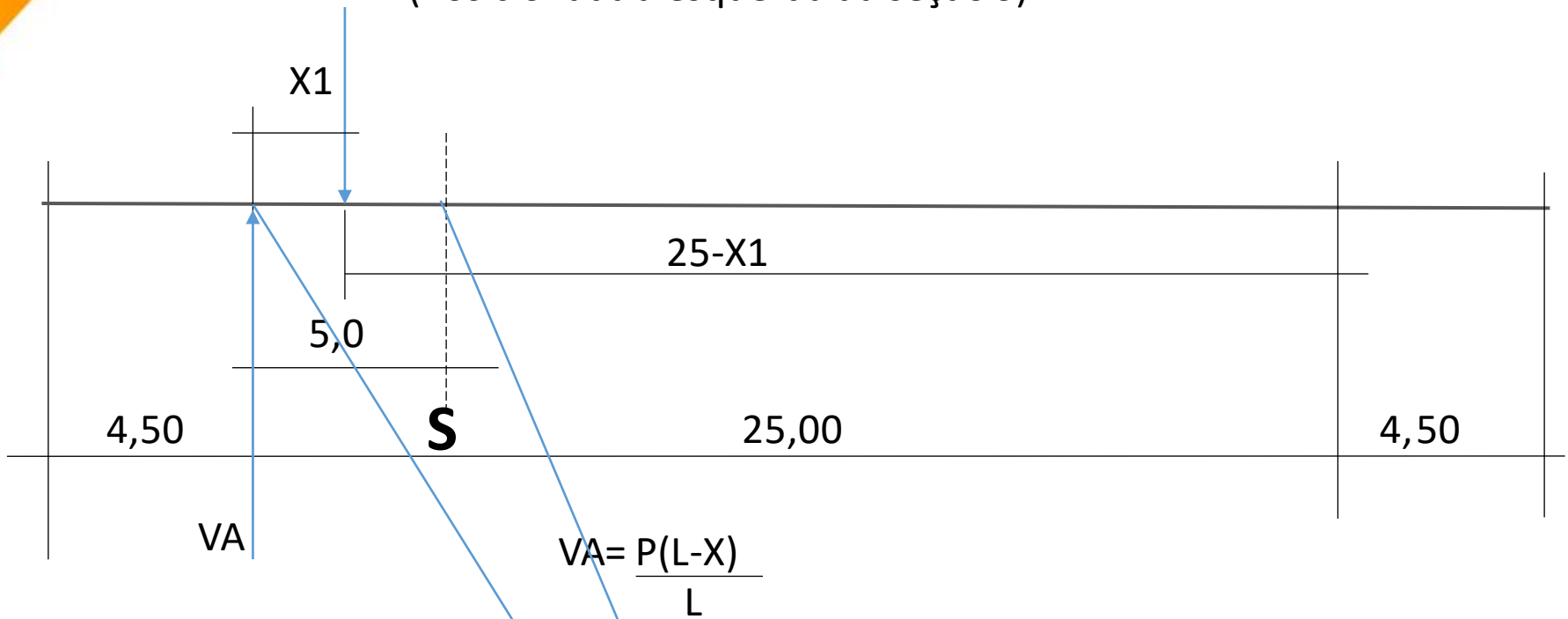
LIQ_C

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



Calculo dos esforços cortantes

P=1 (Posicionada a esquerda da seção S)



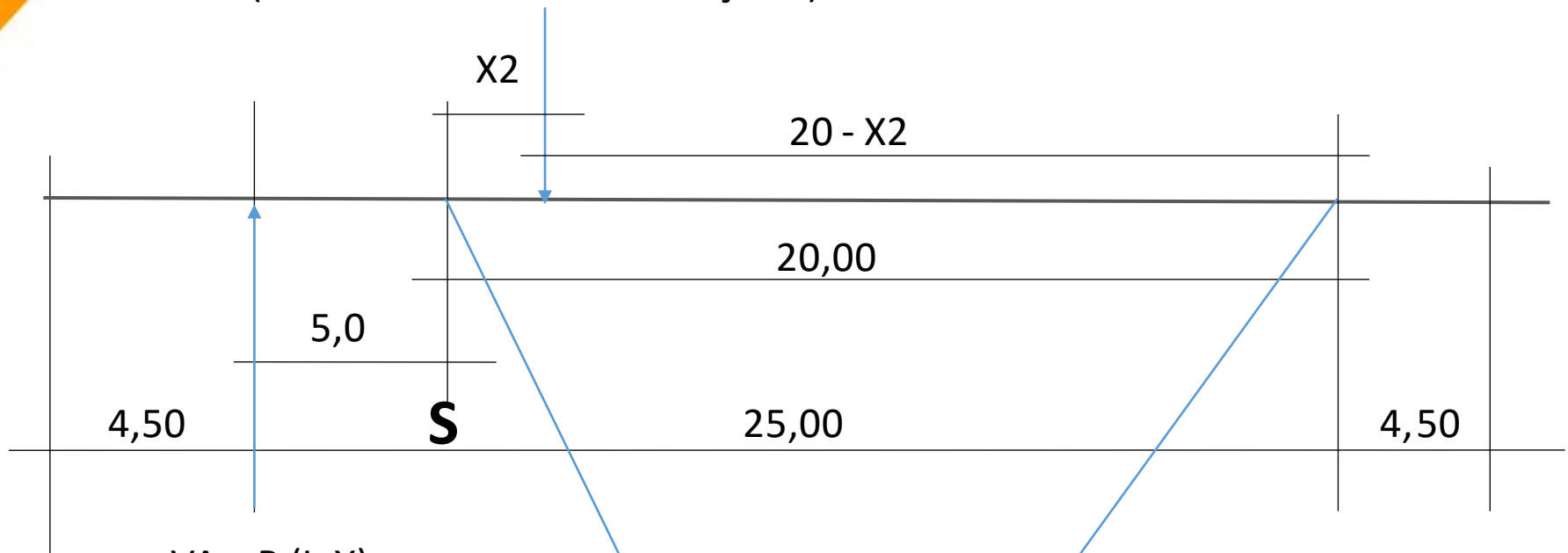
$$QSIE = VA - P$$

$$QS1 E = 1 \left(\frac{25-X_1}{25} \right) - 1$$

Para $X_1 = 0 \rightarrow \frac{1(25-0)}{25} - 1 = 0$

Para $X_1 = 5 \rightarrow \frac{1(25-5)}{25} - 1 = -0,20$

P=1 (Posicionada a direita da seção S)



$$VA = \frac{P(L-X)}{L}$$

$$QSID = VA$$

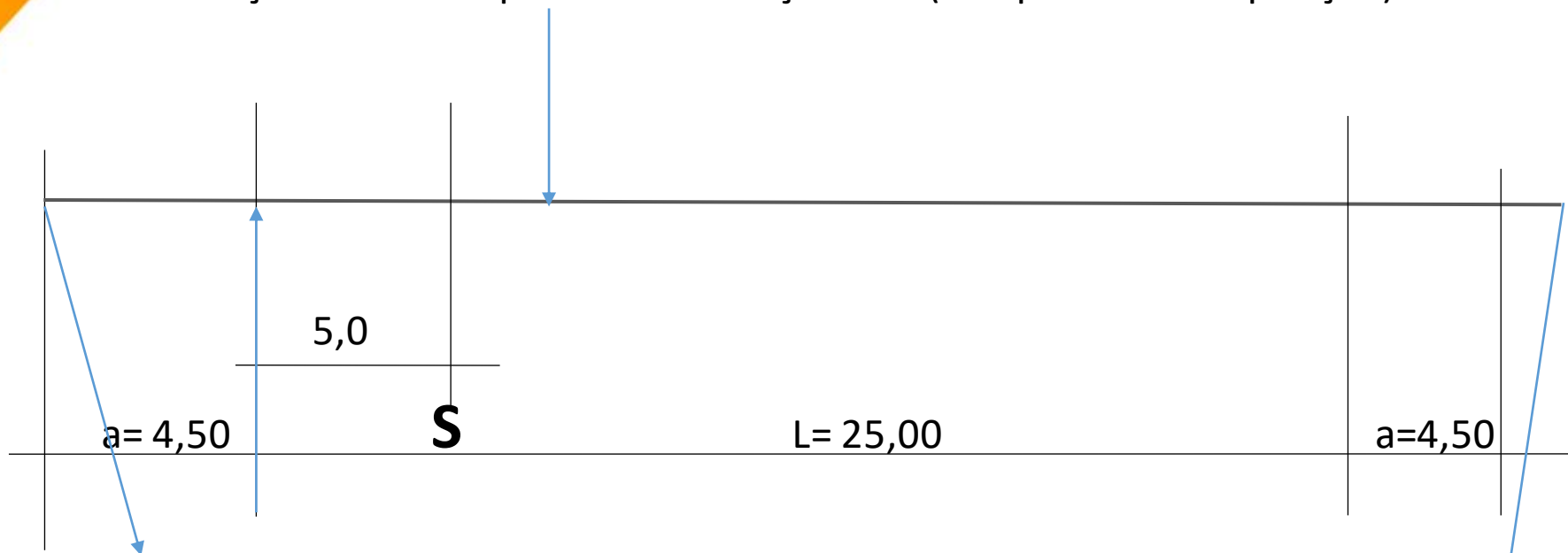
$$QS1 D = 1 \left(\frac{20 - X_2}{25} \right)$$

Para $X_2 = 0$ $\rightarrow \frac{(20-0)}{25} = 0,80$

Para $X_2 = 20 \rightarrow \frac{(20 - 20)}{25} = 0,00$

Calculo dos esforços cortantes

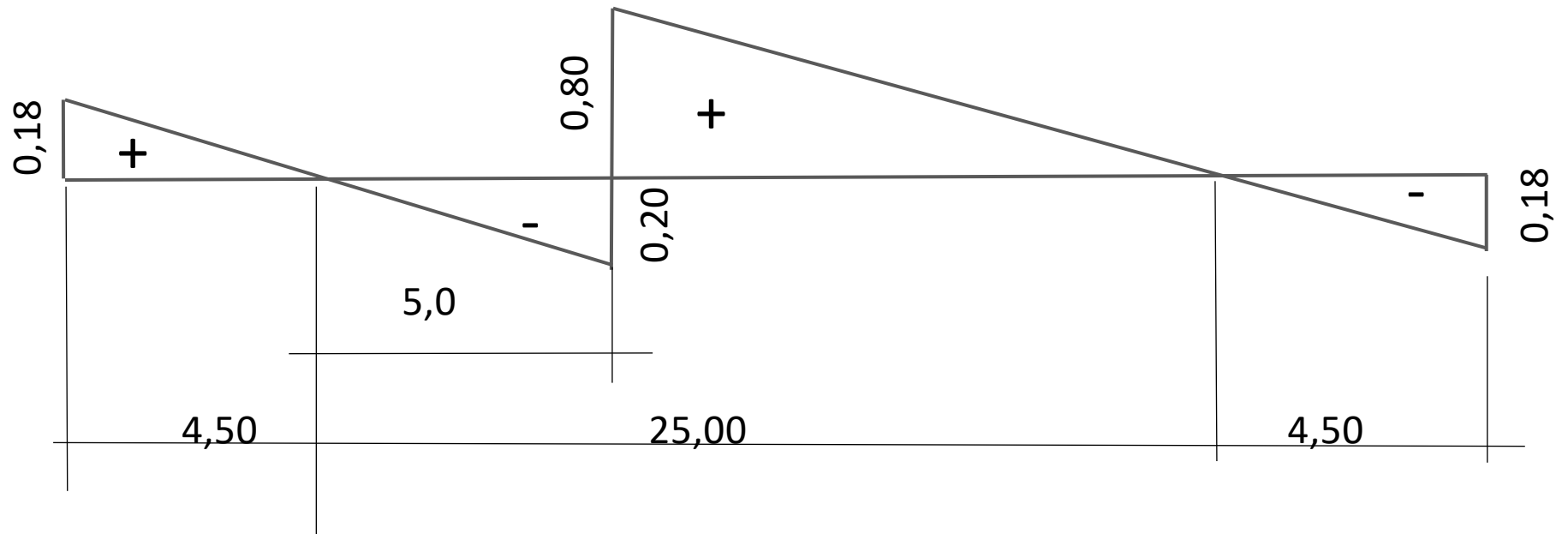
Força cortante na ponta dos balanços $P=1$ (independente da posição)



$$Q_{SID} = P - \frac{(L-a)}{L} \rightarrow 1 - \frac{(25-4,5)}{25} = 0,18$$

$$Q_{SID} = \frac{(L-a)}{L} - P \rightarrow \frac{(25-4,5)}{25} - 1 = -0,18$$

LINHA DE INFLUÊNCIA DE FORÇA CORTANTE NA SEÇÃO S1





ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



AULA 6

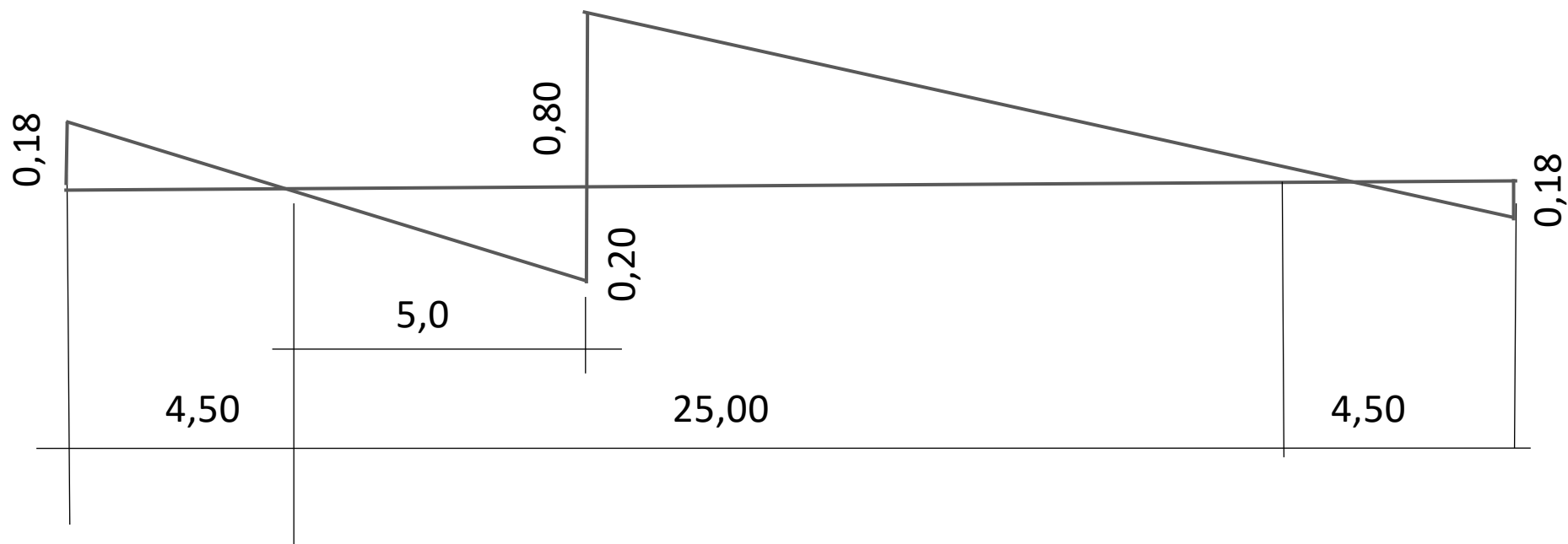
Cálculo dos esforços sobre as linhas de influência

Linhas de influência para estruturas com vários graus de indeterminação

Professor Rogério silva

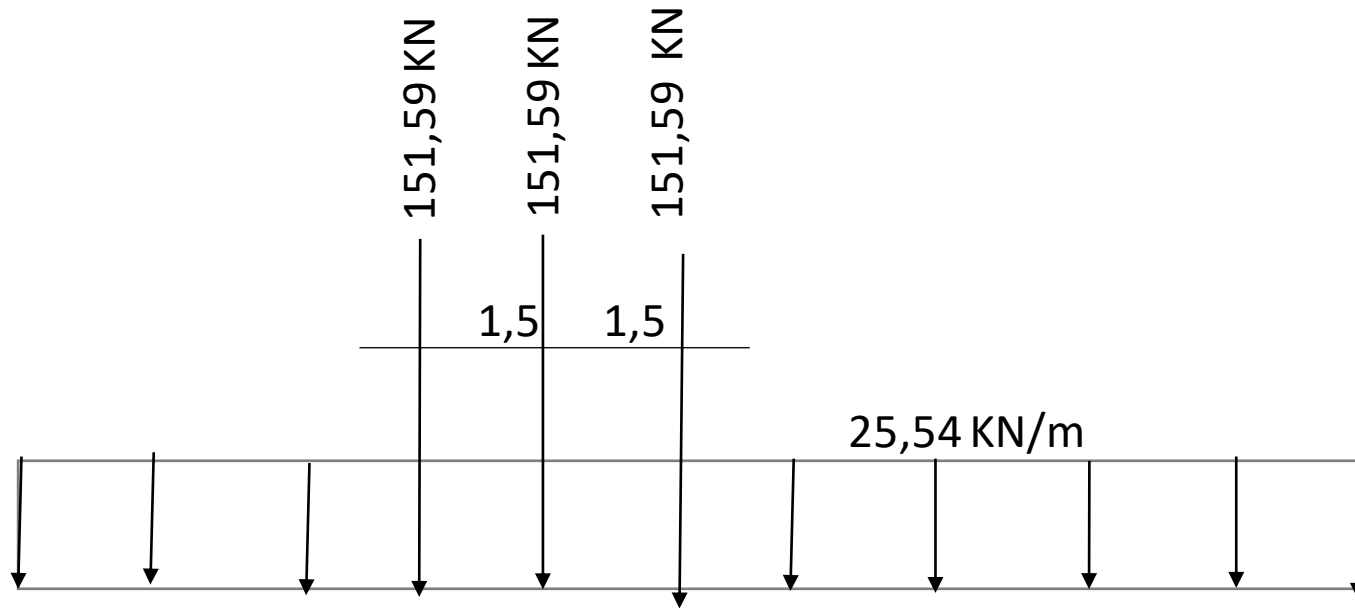
Cálculo dos esforços sobre as linhas de influência

LINHA DE INFLUÊNCIA DE FORÇA CORTANTE NA SEÇÃO S1



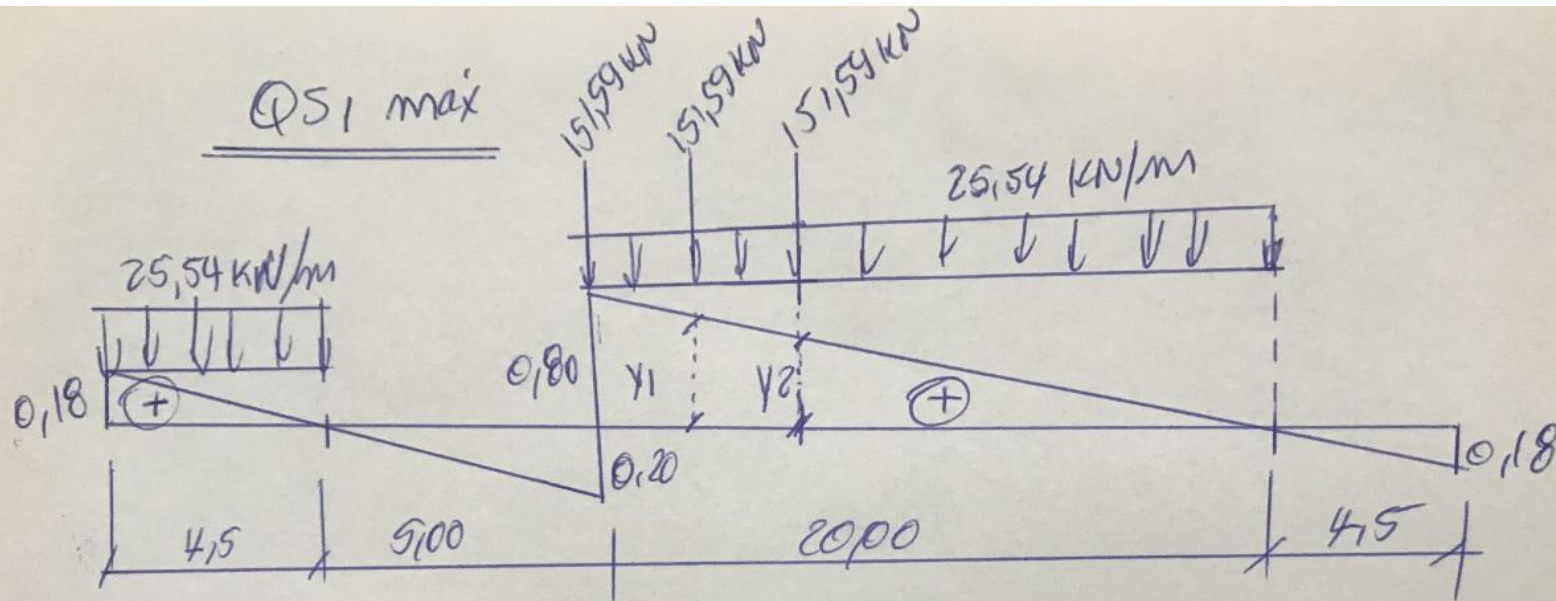
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Carregamento móvel



ESTRUTURAS HIPERSTÁTICAS

FORÇA CORTANTE MÁXIMA NA SEÇÃO S1

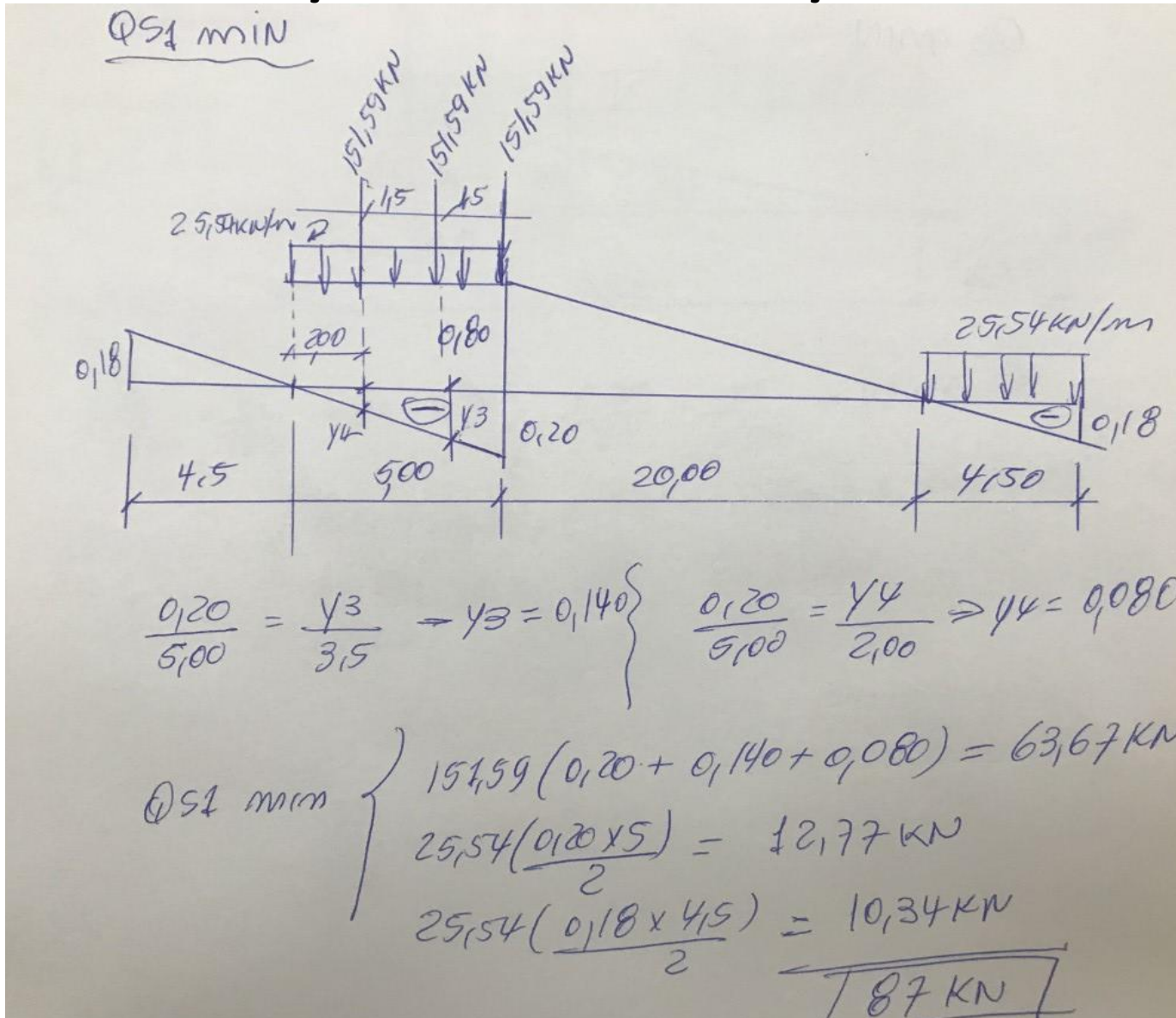


$$\frac{0,80}{20,00} = \frac{y_1}{18,5} \Rightarrow y_1 = 0,740 \quad \left\{ \quad \frac{0,80}{20} = \frac{y_2}{17,00} \Rightarrow y_2 = 0,680 \right.$$

$$Q_{S1, \max} = \left\{ \begin{array}{l} 151,59 (0,80 + 0,740 + 0,680) = 336,52 \text{ kN} \\ 25,54 \left(\frac{20 \times 0,80}{2} \right) = 204,34 \text{ kN} \\ 25,54 \left(\frac{4,5 \times 0,18}{2} \right) = 10,34 \text{ kN} \end{array} \right.$$

552 kN

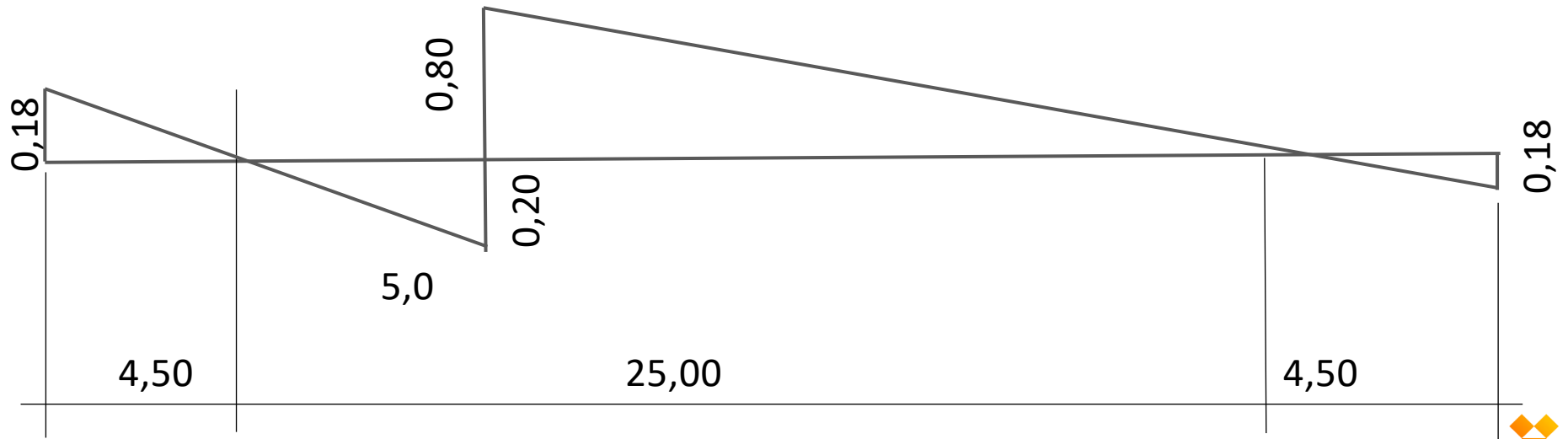
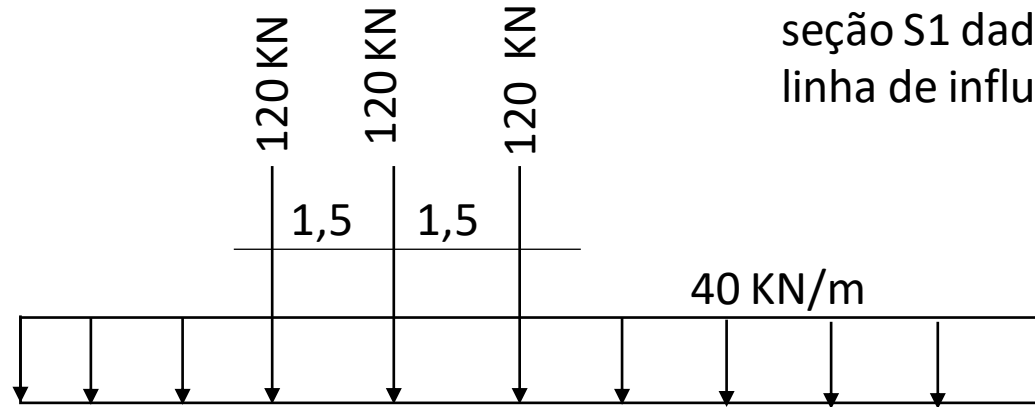
FORÇA CORTANTE MÍNIMA NA SEÇÃO S1



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

EXERCÍCIO PROPOSTO

Calcule a força cortante máxima na seção S1 dado a carga móvel e a linha de influência :

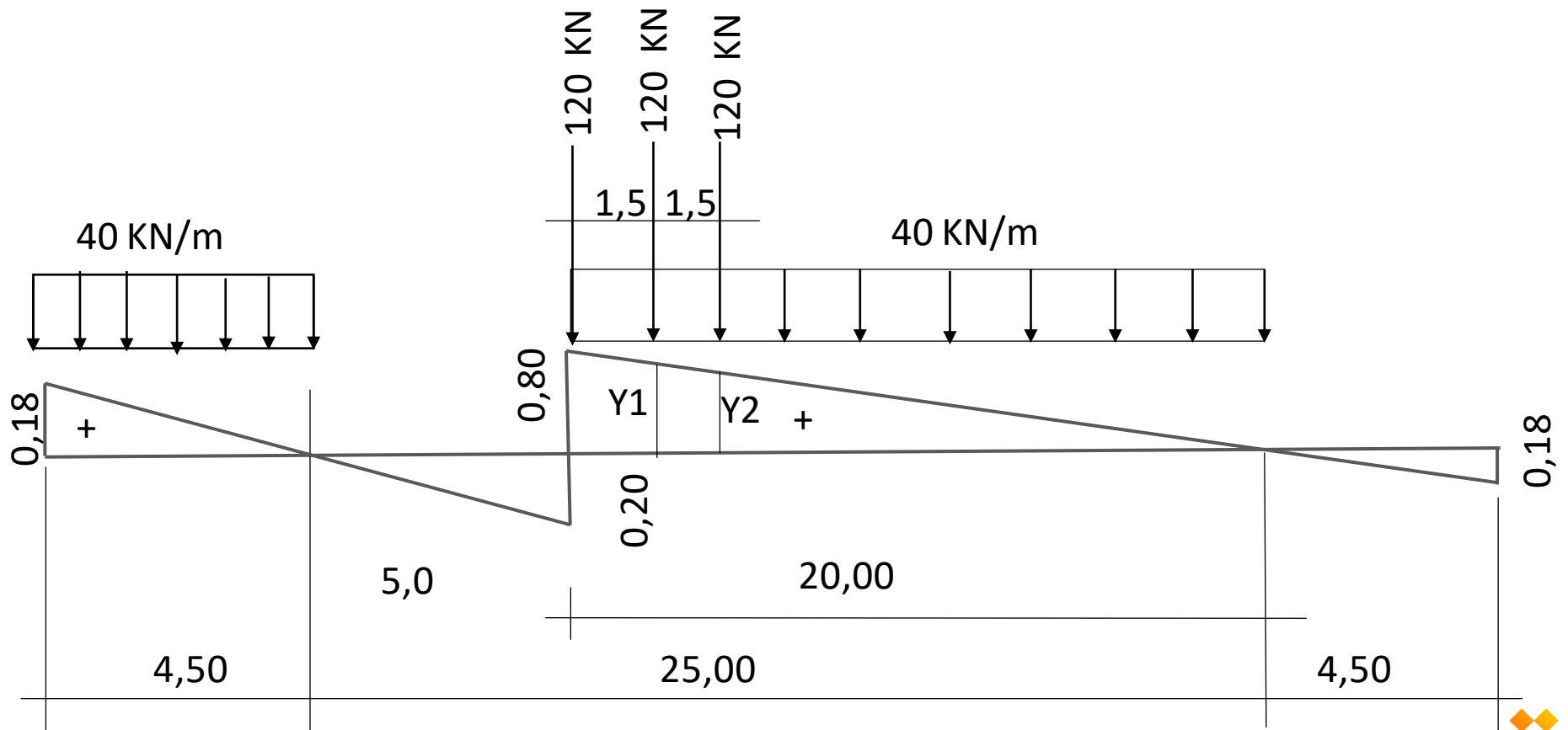


ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

$$\frac{0,80}{20} = \frac{Y1}{18,5} \quad \text{---} \quad Y1 = 0,740$$

$$\frac{0,80}{20} = \frac{Y2}{17} \quad \text{----} \quad Y2 = 0,680$$

$$Q_{SMÁX} = 120 (0,80 + 0,74 + 0,68) + \frac{40(20 \times 0,80)}{2} + \frac{40 (0,18 \times 4,5)}{2} = 602,60 \text{ KN}$$

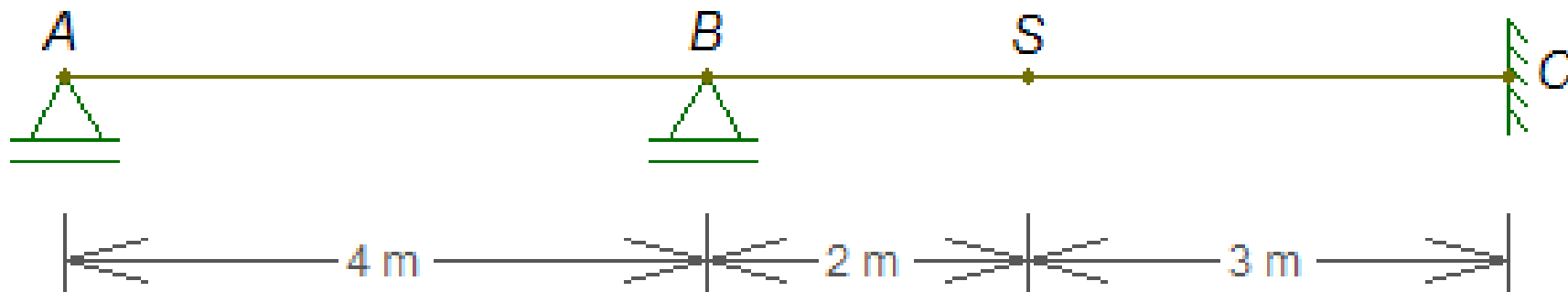


Linhas de influência para estruturas com vários graus de indeterminação

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Vamos determinar a linha de influencia de esforço cortante e de momento fletor na seção S dessa viga.

Vamos entender quais são as diferenças entre as linhas de influencia de vigas isostáticas e hiperestáticas, para que você consiga resolver esse problema.



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

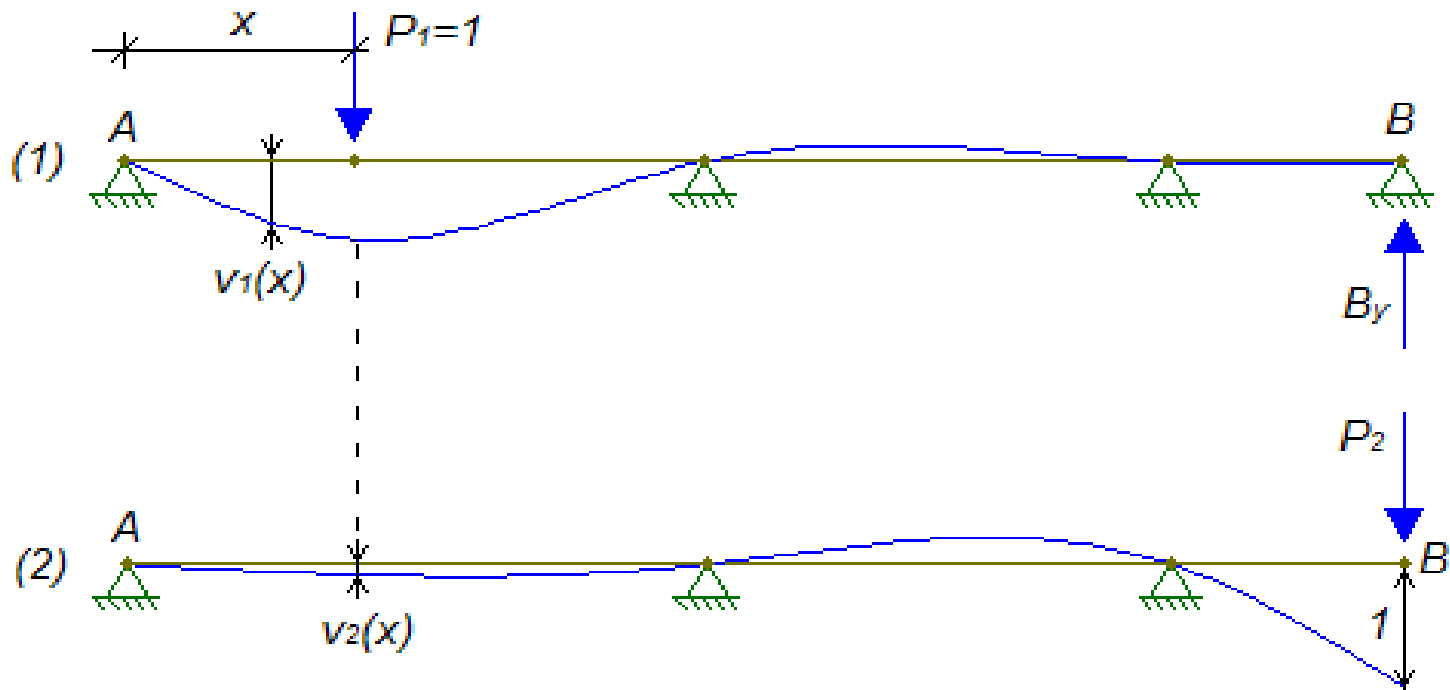
Assim como nas estruturas isostáticas, a linha de influencia de uma estrutura hiperestática também representa a variação de um efeito elástico (reação de apoio, esforço cortante ou momento fletor, por exemplo) em uma determinada seção quando uma carga concentrada unitária percorre toda a estrutura. Dessa forma, as linhas de influencia de estruturas hiperestáticas também são utilizadas para determinar os valores extremos (máximos e mínimos) de um esforço ou reação de apoio, já que, com o traçado da linha de influencia, pode-se determinar facilmente em que posição devemos aplicar o carregamento para que sejam obtidos esses valores extremos.

Vimos na seção anterior que a maneira mais rápida e pratica para traçar as linhas de influencia de estruturas isostáticas e o emprego do método cinemático (Princípio de Muller-Breslau). Esse método consiste em, na seção analisada, aplicar um deslocamento unitário no sentido contrario a convenção positiva do esforço ou reação em estudo e traçar a configuração deslocada da estrutura para esse deslocamento unitário. Essa configuração deslocada será a linha de influencia procurada.

O método cinemático também é valido para estruturas hiperestáticas, ou seja, também podemos determinar a forma das linhas de influencia dessas estruturas por meio da aplicação de deslocamentos unitários no sentido contrario a convenção de esforços ou reação positiva.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

A demonstração da validade desse método para estruturas hiperestáticas pode ser feita com a aplicação do teorema de Betti, que diz que o trabalho virtual produzido por um sistema de forças (1), devido as deformações provocadas por um sistema de forças (2), é igual ao trabalho virtual produzido pelo sistema de forças (2), devido as deformações provocadas pelo sistema de forças (1). Consideremos duas vigas hiperestáticas, conforme a figura abaixo.



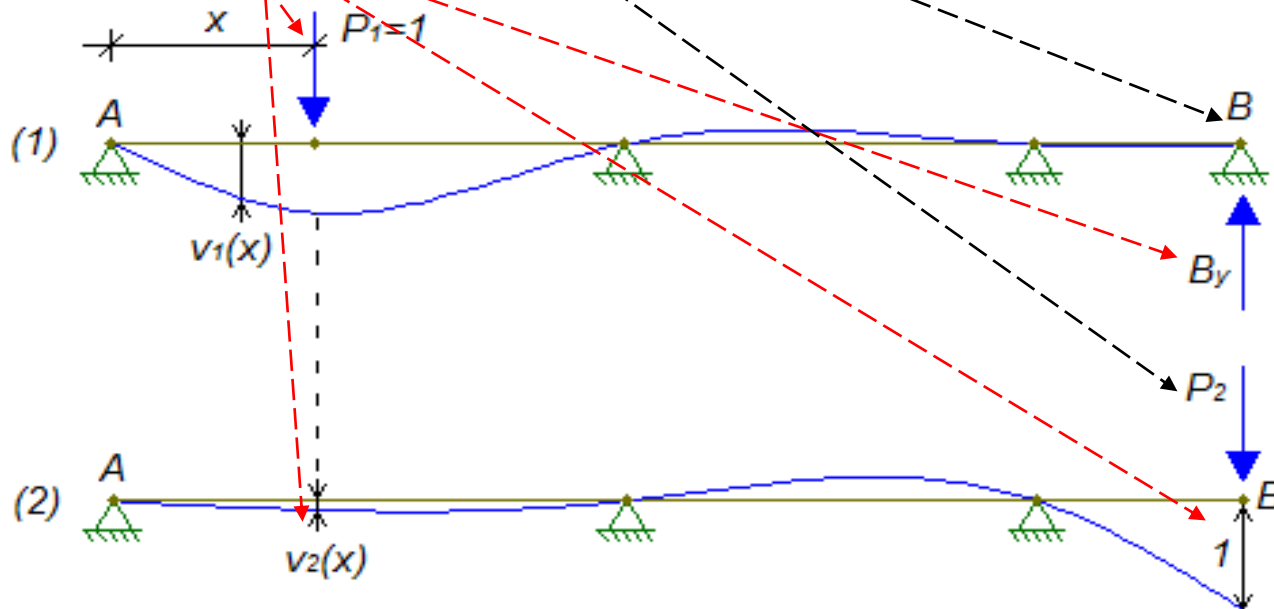
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Na viga (1), a aplicação de uma força unitária $P_1=1$ a uma distancia x do apoio A da viga gera a elástica (configuração deformada) $V_1(x)$.

Já na viga (2), a aplicação de uma força P_2 em B , que provoca um deslocamento unitário para baixo nesse mesmo ponto, gera a elástica $V_2(x)$ Assim, pelo teorema de Betti temos:

$$\sum F_1 \cdot v_2 = \sum F_2 \cdot v_1$$

$$-B_y \cdot 1 + P_1 \cdot v_2(x) = P_2 \cdot 0 \Rightarrow B_y = v_2(x) \quad \therefore \quad EI B_y = v_2(x)$$



No caso de uma estrutura isostática, ao retirar o vínculo que transmite o efeito analisado, a estrutura passa a ser hipostática, ou seja, ao aplicar um deslocamento unitário, essa estrutura apresenta um movimento de corpo rígido. Assim sendo, não oferece resistência ao deslocamento, permanecendo reta.

Já no caso de uma estrutura hiperestática, ao retirar o vínculo que transmite o efeito analisado, a estrutura não se torna hipostática, ou seja, ainda apresenta resistência ao deslocamento unitário aplicado, apresentando deformações que tornam as barras curvas.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Desprezando-se as deformações devidas ao esforço cortante, a equação diferencial das deformações por flexão para barras prismáticas (que possuem seção transversal constante) e definida pela Resistência dos Materiais, pela teoria de vigas de Navier:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{E \cdot I}$$

Em que:

$v(x)$: deslocamento transversal da barra (elástica);

$q(x)$: taxa de carregamento transversal distribuído na barra;

E : módulo de elasticidade do material;

I : momento de inércia da seção transversal.

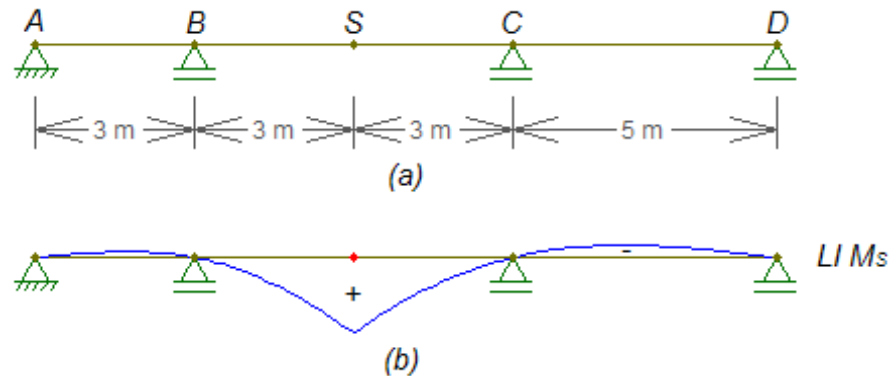
Como, para traçar a linha de influência, não existe nenhuma carga distribuída, uma vez que aplicamos apenas uma carga concentrada unitária, temos $q(x) = 0$. Além disso, já vimos que a elástica da viga é a própria linha de influência. Portanto:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{E \cdot I} \Rightarrow \frac{d^4 L I}{dx^4} = 0$$

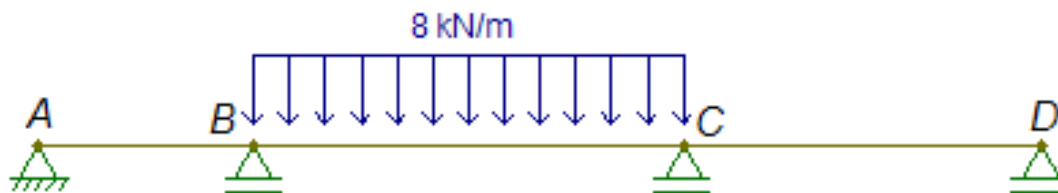
Como a quarta derivada da linha de influência é nula, essa linha de influência pode ser descrita matematicamente por um polinômio do terceiro grau do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d$, uma vez que a sua quarta derivada em relação a x é nula. Com isso, fica comprovado que a linha de influência de uma estrutura hiperestática é composta por trechos curvos.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Para exemplificar esse procedimento, vamos determinar onde devemos posicionar uma carga móvel uniformemente distribuída de 8 kN/m na viga da figura abaixo, para que se obtenha o máximo valor positivo de momento fletor na seção S .

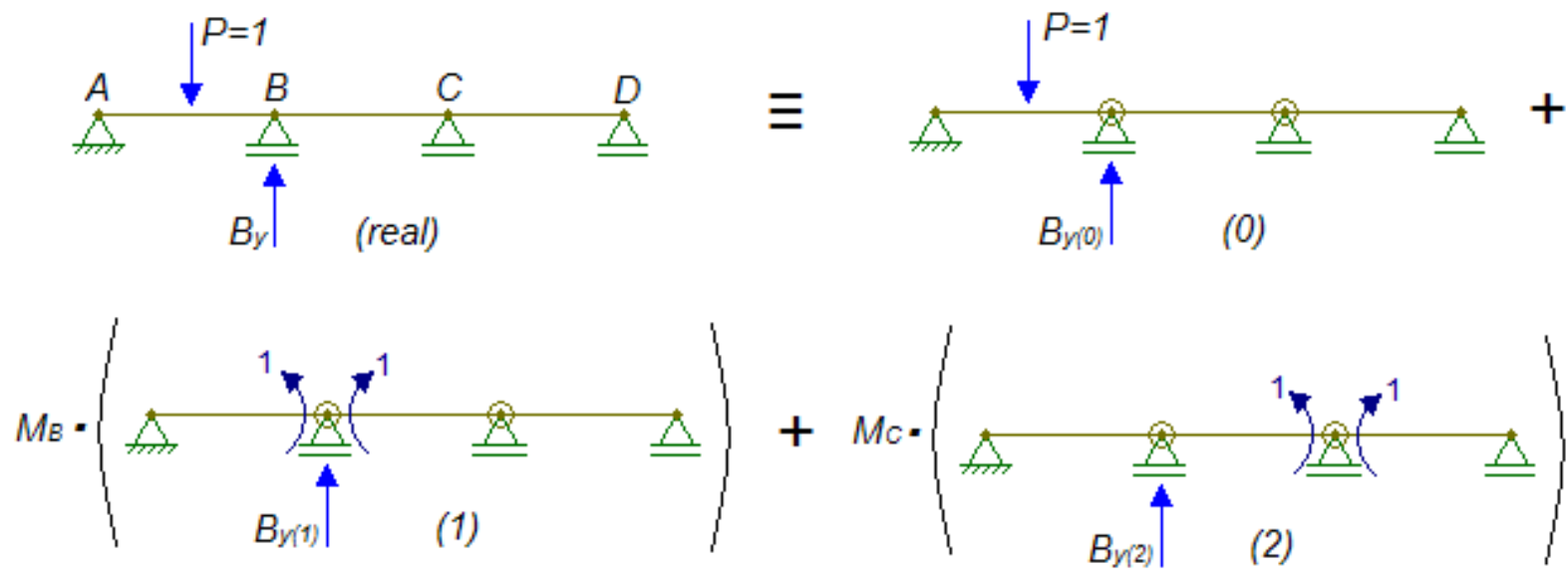


Para traçar a linha de influencia de momento fletor na seção S , basta aplicar um giro horário no lado esquerdo da seção S e um giro anti horário no lado direito da seção S , resultando na linha de influencia apresentada na figura b . Podemos perceber que o único trecho positivo da linha de influencia esta entre os apoios B e C . Dessa forma, para encontrar o momento fletor máximo positivo na seção S , devido a uma carga móvel de 8 kN/m , basta a resolução da viga da figura abaixo pelo método das forças ou dos deslocamentos. Com isso, é possível traçar o diagrama de momentos fletores dessa viga, permitindo o encontro do valor do momento fletor na seção S .



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

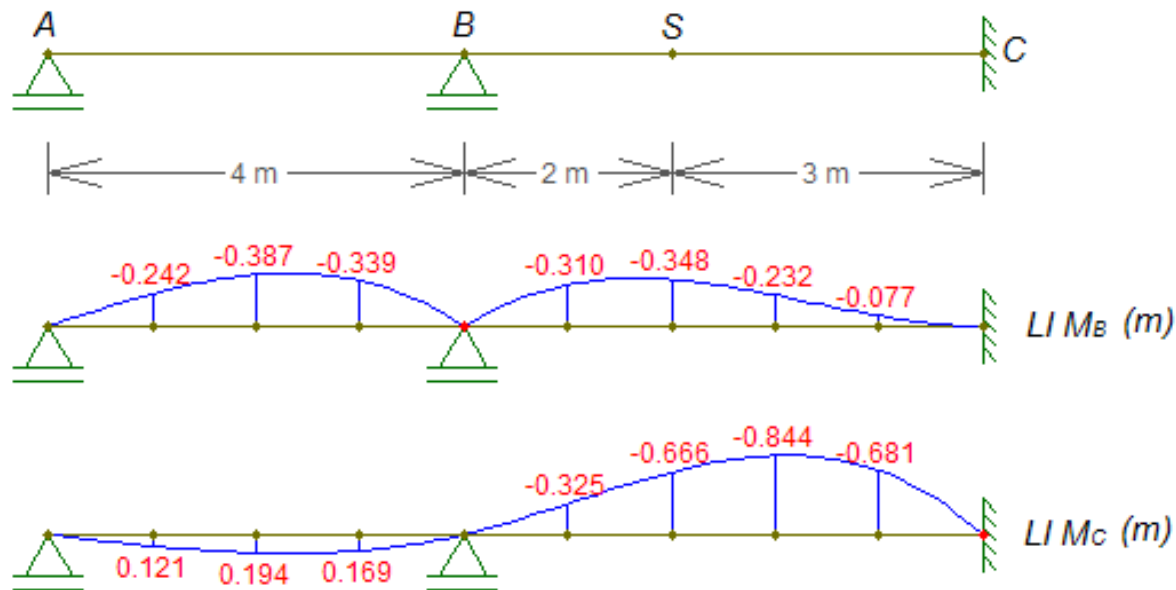
Caso se deseje determinar as ordenadas de uma linha de influenciada uma viga hiperestática, podemos utilizar um procedimento que envolve a superposição de outras linhas de influencia previamente conhecidas dessa mesma viga. Suponha que uma viga duas vezes hiperestática, da qual se conhece as linhas de influencia de dois esforços, ao se remover os vínculos que transmitem esses dois esforços, passa a ser isostática. Nesse caso é possível determinar a linha de influencia de qualquer outro esforço por meio dessas duas linhas de influencia conhecidas. Para demonstrar esse procedimento, tomemos a viga real da figura abaixo, da qual conhecemos as linhas de influencia de momentos fletores em B e C e queremos determinar a linha de influencia da reação B_y para qualquer posição da carga $P = 1$.



$$B_y = B_{y(0)} + B_{y(1)} \cdot M_B + B_{y(2)} \cdot M_C$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Dada as linhas de influencia de momento fletor nas seções B e C



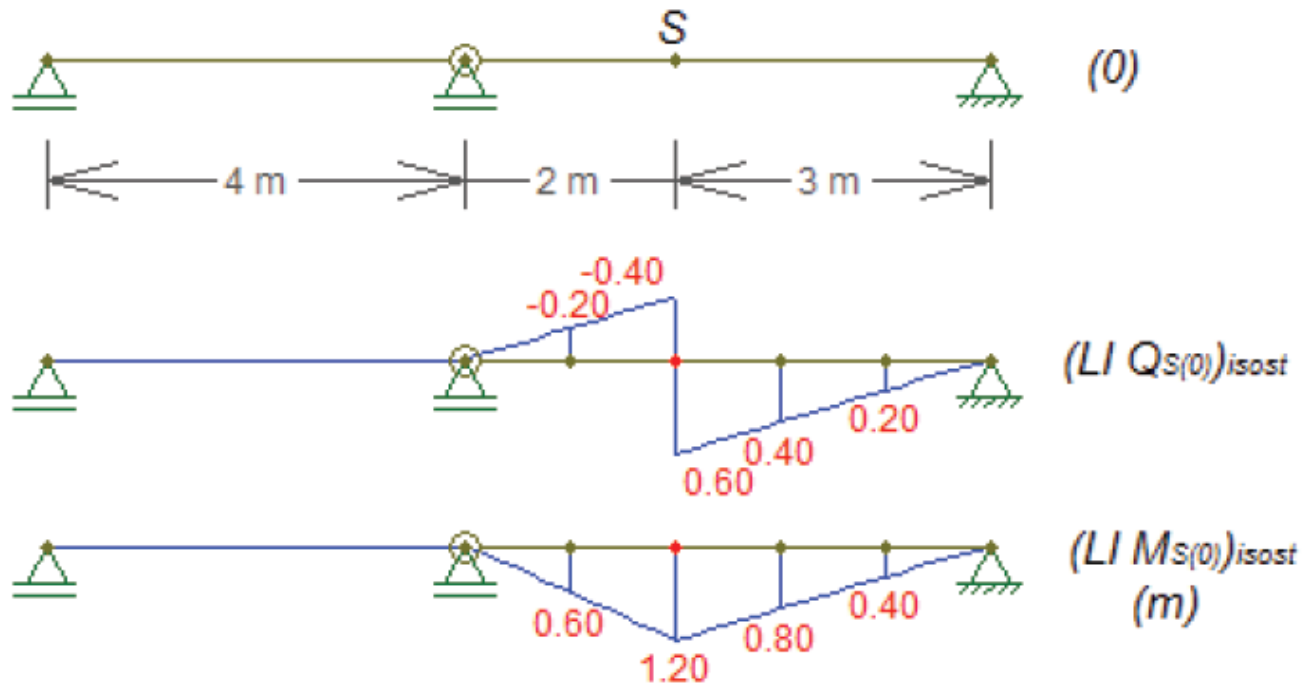
Como essa viga é duas vezes hiperestática, as duas linhas de influencia de momentos fletores já conhecidas são suficientes para determinar qualquer linha de influencia dessa mesma viga. Para isso, utilizaremos as seguintes superposições:

$$(LI Q_S)_{hip} = (LI Q_{S(0)})_{isost} + Q_{S(1)} \cdot (LI M_B)_{hip} + Q_{S(2)} \cdot (LI M_C)_{hip}$$

$$(LI M_S)_{hip} = (LI M_{S(0)})_{isost} + M_{S(1)} \cdot (LI M_B)_{hip} + M_{S(2)} \cdot (LI M_C)_{hip}$$

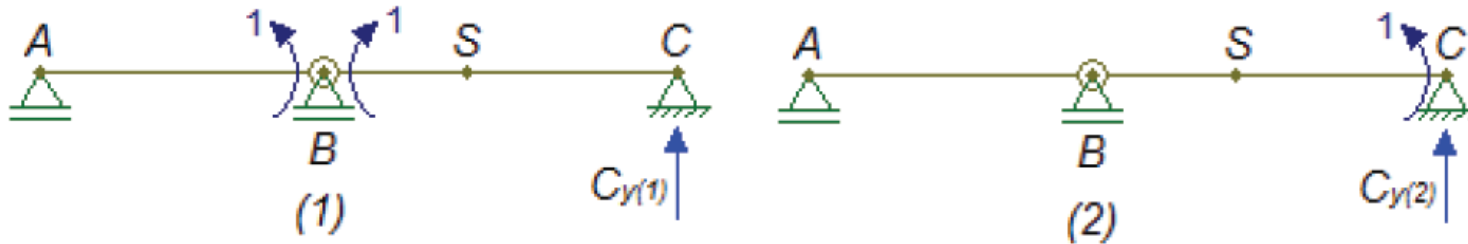
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Linhas de influencia de esforço cortante e momento fletor na seção S para a viga isostática



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

é necessário determinar os valores de $Q_S(1)$, $Q_S(2)$, $M_S(1)$ e $M_S(2)$, que correspondem aos valores do esforço cortante na seção S para os casos (1) e (2) e aos valores do momento fletor na seção S para os casos (1) e (2), respectivamente. Os casos (1) e (2) correspondem a mesma viga isostática do caso (0), porém, com a aplicação de um momento fletor unitário positivo nos pontos B e C , respectivamente, conforme a Figura



Os casos (1) e (2) correspondem a duas vigas Gerber. Portanto, é possível determinar as reações de apoio $C_{y(1)}$ e $C_{y(2)}$ fazendo-se o equilíbrio de momentos fletores, no ponto B para o trecho BC de cada um dos dois casos, considerando giro anti-horário positivo.

$$\text{Para o caso (1): } \sum M_B = 0 \Rightarrow -1 + C_{y(1)} \cdot 5 = 0 \Rightarrow C_{y(1)} = 0,2$$

$$\text{Para o caso (2): } \sum M_B = 0 \Rightarrow -1 + C_{y(2)} \cdot 5 = 0 \Rightarrow C_{y(2)} = -0,2$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

$$Q_{S(1)} = -0,2 \quad M_{S(1)} = 0,2 \cdot 3 = 0,6$$

$$Q_{S(2)} = 0,2 \quad M_{S(2)} = 1 + C_{y(2)} \cdot 3 = 1 - 0,2 \cdot 3 = 0,4$$

Utilizando-se a superposição, pode-se determinar o valor da ordenada das linhas de influência de esforço cortante e de momento fletor na seção S para a viga hiperestática a cada um metro.

$$(LI Q_S)_{hip} = (LI Q_{S(0)})_{isost} - 0,2 \cdot (LI M_B)_{hip} + 0,2 \cdot (LI M_C)_{hip}$$

$$(LI M_S)_{hip} = (LI M_{S(0)})_{isost} + 0,6 \cdot (LI M_B)_{hip} + 0,4 \cdot (LI M_C)_{hip}$$

Essas duas linhas de influência são apresentadas na Figura 3.26. Para exemplificar, são demonstrados os cálculos para obtenção das ordenadas dessas duas linhas de influência à cinco metros do apoio A:

$$Q_S = -0,2 - 0,2 \cdot (-0,31) + 0,2 \cdot (-0,325) = -0,203$$

$$M_S = 0,6 + 0,6 \cdot (-0,31) + 0,4 \cdot (-0,325) = +0,284$$



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



AULA 7

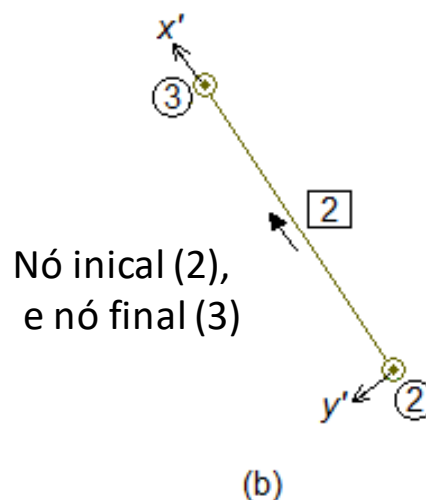
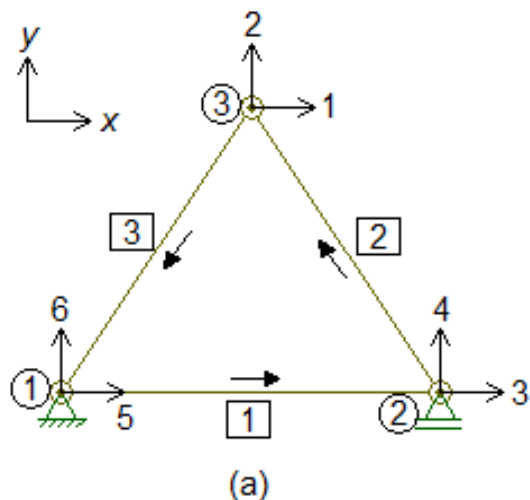
Esforços nas barras de uma treliça pelo Método da Rigidez

Professor Rogério silva

O Método da Rigidez é muito empregado no desenvolvimento de programas computacionais de análise estrutural. Isso se deve ao fato de ser um método que pode ser facilmente programável e que pode ser utilizado para resolver qualquer tipo de estrutura. Esse método nada mais é do que a aplicação do Método dos Deslocamentos, já estudado na Seção 2.3 desta disciplina. Porém, no Método da Rigidez, usamos a notação matricial, o que facilita a programação do método. Dessa forma, esse método também é conhecido como análise matricial. Para iniciar os estudos, iremos verificar como aplicar o Método da Rigidez em treliças planas. Como os únicos esforços que atuam nas barras das treliças são os esforços axiais, isso simplifica um pouco a aplicação desse método. Um dos pontos mais importantes desse método é a definição da matriz de rigidez da estrutura, que leva em consideração a rigidez de todas as barras que fazem parte da estrutura.

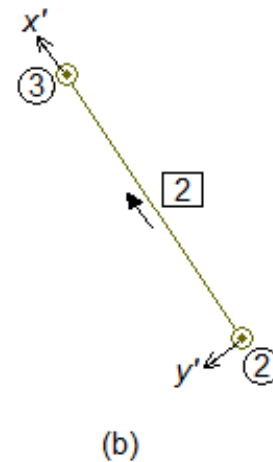
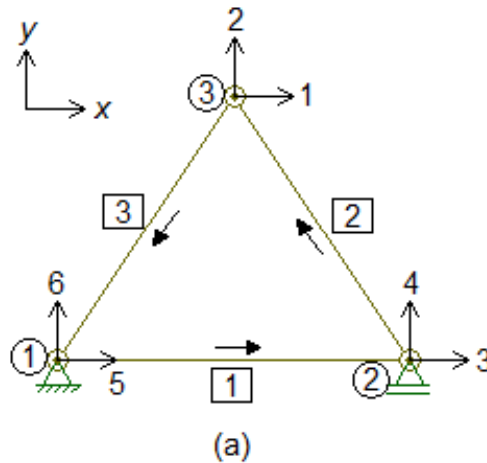
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Para iniciar a aplicação do Método da Rigidez em treliças, devemos fazer a identificação e a numeração dos membros (barras) e dos nós da treliça. Na figura (a), os membros estão numerados dentro de um quadrado, enquanto os nós estão numerados dentro de um círculo. Para definir os nós inicial e final de cada membro, uma seta voltada para o nó final é desenhada em cada membro.



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

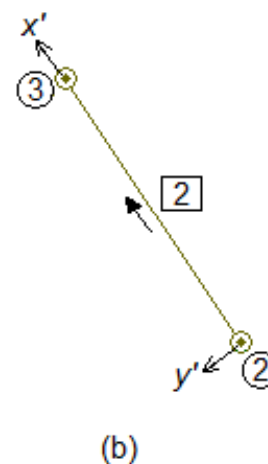
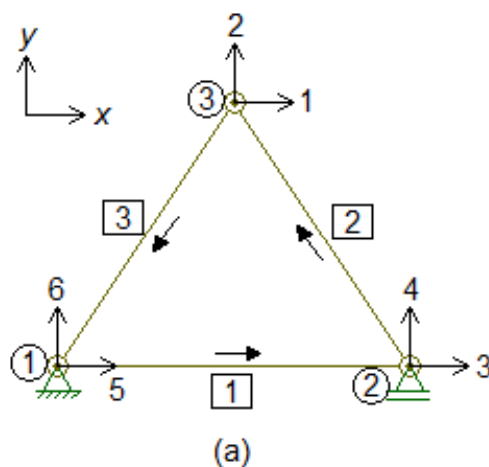
A seguir, devem ser definidas as coordenadas globais e locais. O sistema de coordenadas globais x e y , conforme definido na Figura (a), será usado para definir a direção e o sentido dos deslocamentos nodais e das forças externas aplicadas na treliça. Já o sistema de coordenadas locais x' e y' será usado para definir a direção e o sentido dos deslocamentos e esforços internos ao longo do comprimento de cada membro. Conforme a Figura (b), a origem do sistema de coordenadas locais de um membro sempre é posicionado no nó inicial desse membro



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Os deslocamentos que podem ocorrer em um nó de uma dada estrutura são denominados de graus de liberdade. Em uma treliça plana, cada nó pode apresentar três deslocamentos: um deslocamento horizontal, um deslocamento vertical e uma rotação. Porém, como os nós de uma treliça possuem a rotação totalmente livre, esse deslocamento não fará parte das incógnitas do nosso problema, já que a rotação dos nós não transmitirá momentos fletores para as barras da treliça. Assim, cada nó da treliça possui dois graus de liberdade (deslocamento horizontal e deslocamento vertical). Cada um desses graus de liberdade nos nós da treliça deve ser numerado segundo a orientação das coordenadas globais, conforme a Figura (a).

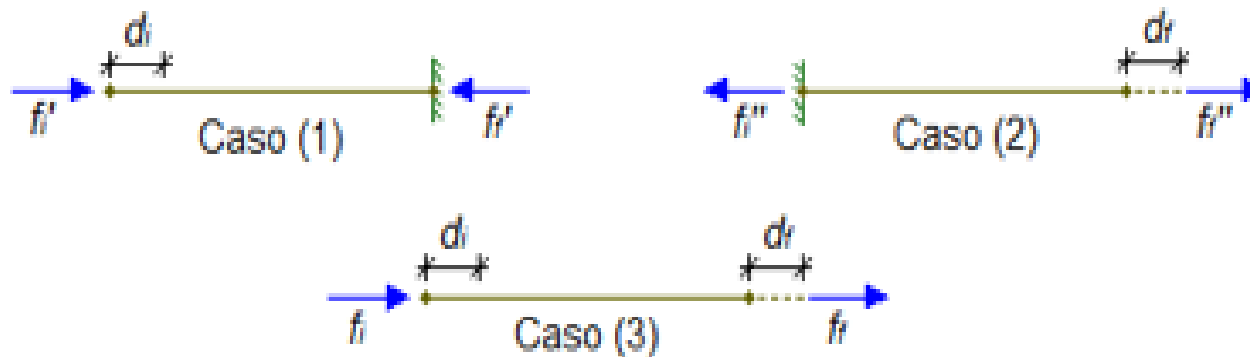
Para facilitar a resolução posterior do problema, os graus de liberdade desconhecidos (deslocamentos livres) são numerados primeiro, deixando por último a numeração dos graus de liberdade conhecidos (deslocamentos nulos devido aos apoios).



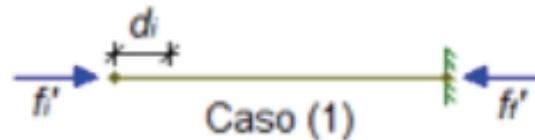
MATRIZ DE RIGIDEZ DO MEMBRO

A matriz de rigidez de um membro, segundo a orientação das coordenadas locais x' e y' , representa a relação entre força e deslocamento de uma barra da estrutura. No caso de barras de treliça, temos apenas forças e deslocamentos atuando ao longo do eixo longitudinal da barra (eixo x'). Conforme estudado na Seção 2.3, ao aplicarmos um deslocamento unitário ao longo do eixo longitudinal de uma barra de comprimento L , as forças que aparecem nas extremidades da barra, para que o deslocamento unitário seja mantido, são dadas por seu coeficiente de rigidez local $\frac{E \cdot A}{L}$, apresentando sentidos opostos em cada extremidade da barra.

Assim, caso o deslocamento aplicado na extremidade da barra seja diferente do valor unitário, basta multiplicar esse coeficiente de rigidez local pelo valor do deslocamento aplicado. A Figura abaixo apresenta três casos possíveis de deslocamentos axiais que podem ocorrer em uma barra de treliça.



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

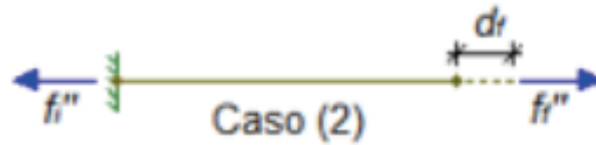


No caso (1), um deslocamento d_i é aplicado no nó inicial da barra, surgindo as forças f_i' e f_f' nos nós inicial e final da barra, respectivamente. A força f_i' é positiva, pois está no sentido positivo do eixo x' , enquanto a força f_f' é negativa, pois está no sentido negativo do eixo x' , e seus valores são:

$$f_i' = \frac{E \cdot A}{L} \cdot d_i$$

$$f_f' = -\frac{E \cdot A}{L} \cdot d_i$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



No caso (2), um deslocamento d_f é aplicado no nó final da barra, surgindo as forças f_i'' e f_f'' nos nós inicial e final da barra, respectivamente, dadas por:

$$f_i'' = -\frac{E \cdot A}{L} \cdot d_f$$

$$f_f'' = \frac{E \cdot A}{L} \cdot d_f$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



Assim, no caso (3), que é o caso mais geral, quando são aplicados deslocamentos em ambas as extremidades da barra, as forças f_i e f_r que aparecem em suas extremidades são obtidas pela superposição dos casos (1) e (2):

$$f_i = \frac{E \cdot A}{L} \cdot d_i - \frac{E \cdot A}{L} \cdot d_r$$

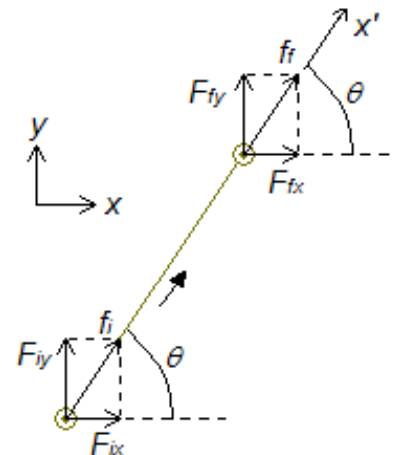
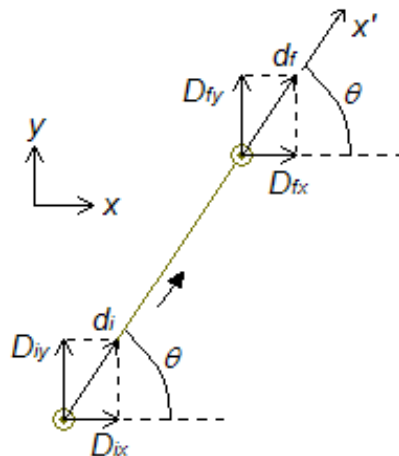
$$f_r = -\frac{E \cdot A}{L} \cdot d_i + \frac{E \cdot A}{L} \cdot d_r$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Essas equações podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_f \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ d_f \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{k}' \mathbf{d} \quad \text{onde} \quad \mathbf{k}' = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{k}'$ é chamada de matriz de rigidez do membro e é semelhante para qualquer barra de uma treliça. Uma vez conhecidos os deslocamentos nas extremidades de uma barra, pode-se usar a relação anterior para encontrar o valor do esforço axial que atua nessa barra. Essa matriz $\mathbf{k}'$ tem como referência as coordenadas locais da barra. Porém, como normalmente cada barra da treliça pode apresentar um posicionamento e um sistema de coordenadas locais diferente do global, devemos fazer a transformação para as coordenadas globais x e y . Considere uma barra inclinada de uma treliça, conforme a figura



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Os deslocamentos axiais nas extremidades inicial (d_i) e final (d_f), que estão orientados segundo o eixo local x' , podem ser expressos segundo o sistema global x e y . De maneira semelhante, as forças que atuam segundo o sistema de eixos global x e y podem ser expressas em função das forças axiais nas extremidades inicial (f_i) e final (f_f), que estão orientadas segundo o eixo local x' :

$$\begin{cases} d_i = D_{ix} \cdot \cos \theta + D_{iy} \cdot \sin \theta \\ d_f = D_{fx} \cdot \cos \theta + D_{fy} \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} F_{ix} = f_i \cdot \cos \theta & F_{iy} = f_i \cdot \sin \theta \\ F_{fx} = f_f \cdot \cos \theta & F_{fy} = f_f \cdot \sin \theta \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} d_i \\ d_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ix} \\ D_{iy} \\ D_{fx} \\ D_{fy} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{fx} \\ F_{fy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ f_f \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \mathbf{D}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}$$

A matriz T , que contém o seno e o cosseno do ângulo de inclinação da barra, é chamada de matriz de transformação de coordenadas e é responsável por transformar os deslocamentos do sistema de coordenadas global (vetor D) para o sistema de coordenadas local (vetor d). De maneira semelhante, a matriz T^T (matriz de transformação transposta) transforma as forças do sistema de coordenadas local (vetor f) para o sistema de coordenadas global (vetor F). Substituindo as equações anteriores na equação que contém a matriz de rigidez k' do membro e multiplicando ambos os lados da expressão por T^T

$$f = k'd \Rightarrow f = k'TD \Rightarrow T^T f = T^T k'TD \Rightarrow F = kD$$

Onde k é a matriz de rigidez do membro escrita no sistema de coordenadas global:

$$k = T^T k' T = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Os valores de $\cos \theta$ e $\sin \theta$ podem ser positivos ou negativos, dependendo de qual quadrante está localizado o ângulo θ .

Matriz de rigidez da treliça

Uma vez conhecida a matriz de rigidez global (k) de cada membro, podemos determinar a matriz de rigidez da treliça (K). Esse procedimento é feito somando-se a matriz de rigidez de todos os membros da treliça. A matriz de rigidez da treliça (K) terá ordem igual ao número de graus de liberdade da treliça. Dessa forma, a matriz de rigidez de um membro (k) irá contribuir nas posições relativas aos graus de liberdade de suas extremidades.

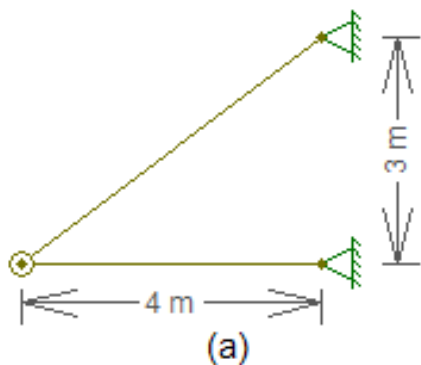
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Para exemplificar a montagem da matriz de rigidez da estrutura, iremos determinar a matriz de rigidez da treliça da Figura 4.4(a), que possui $E \times A$ constante.

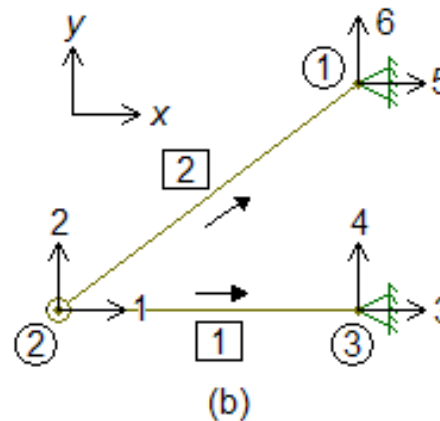
O primeiro passo consiste em numerar os nós, as barras, os graus de liberdade e definir os nós inicial e final de cada barra, conforme a Figura abaixo. Os graus de liberdade desconhecidos (1 e 2) foram numerados primeiro, seguidos dos graus de liberdade conhecidos (3, 4, 5 e 6), para facilitar os cálculos posteriores, conforme já comentado.

A treliça possui 2 membros (barras)

(a) Treliza;

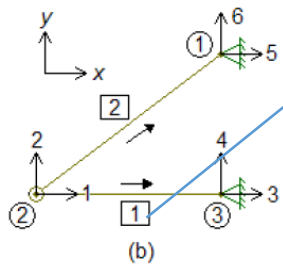
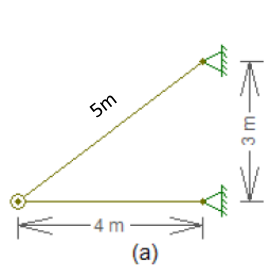


(b) Numeração dos graus de liberdade



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Prossegue-se com a determinação da matriz de rigidez de cada membro já nas coordenadas globais, onde q_1 e q_2 são os ângulos que as barras 1 e 2 fazem com a horizontal (eixo global x). Os valores do cosseno e do seno desses ângulos são obtidos facilmente por trigonometria, uma vez que são fornecidas as cotas de localização dos nós da treliça. As linhas e as colunas das matrizes de rigidez dos membros estão identificadas com a numeração dos graus de liberdade dos nós inicial e final de cada membro.



Membro 1:

$$\theta_1 = 0^\circ$$

$$L_1 = 4m \quad \cos \theta_1 = 1 \quad \sin \theta_1 = 0$$

Graus de liberdade: 1 e 2 para o nó inicial; 3 e 4 para o nó final.

$$\left(\frac{\cos \theta_1}{L_1} \right)^2 = \left(\frac{1}{4} \right)^2 = 0,25$$

$$k_1 = \frac{E \cdot A}{L_1}$$

$L_1 = 4m$

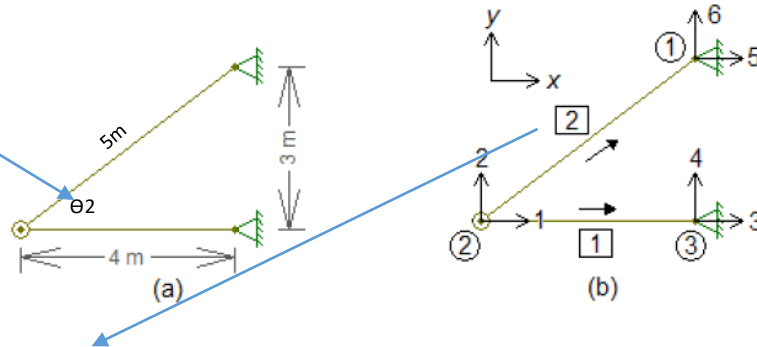
$$\begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \theta_1 & -\cos^2 \theta_1 & -\cos \theta_1 \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_1 & \sin^2 \theta_1 & -\cos \theta_1 \sin \theta_1 & -\sin^2 \theta_1 \\ -\cos^2 \theta_1 & -\cos \theta_1 \sin \theta_1 & \cos^2 \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \theta_1 \\ -\cos \theta_1 \sin \theta_1 & -\sin^2 \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \theta_1 & \sin^2 \theta_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$k_1 = E \cdot A \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

$$\cos \theta_2 = 4/5 = 0,8$$

$$\text{Sen } \theta_2 = 3/5 = 0,6$$



Membro 2:

$$L_2 = 5m \quad \cos \theta_2 = 0,8 \quad \text{sen } \theta_2 = 0,6$$

Graus de liberdade: 1 e 2 para o nó inicial; 5 e 6 para o nó final.

$$k_2 = \frac{E \cdot A}{L_2} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_2 & \cos \theta_2 \text{sen } \theta_2 & -\cos^2 \theta_2 & -\cos \theta_2 \text{sen } \theta_2 \\ \cos \theta_2 \text{sen } \theta_2 & \text{sen}^2 \theta_2 & -\cos \theta_2 \text{sen } \theta_2 & -\text{sen}^2 \theta_2 \\ -\cos^2 \theta_2 & -\cos \theta_2 \text{sen } \theta_2 & \cos^2 \theta_2 & \cos \theta_2 \text{sen } \theta_2 \\ -\cos \theta_2 \text{sen } \theta_2 & -\text{sen}^2 \theta_2 & \cos \theta_2 \text{sen } \theta_2 & \text{sen}^2 \theta_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\frac{(\cos \theta)^2}{L_1} = \frac{(0,8)^2}{5} = 0,128$$

$$k_2 = E \cdot A \begin{bmatrix} 0,128 & 0,096 & -0,128 & -0,096 \\ 0,096 & 0,072 & -0,096 & -0,072 \\ -0,128 & -0,096 & 0,128 & 0,096 \\ -0,096 & -0,072 & 0,096 & 0,072 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Como a treliça possui seis graus de liberdade, a matriz de rigidez dessa treliça terá dimensão 6x6. As matrizes de rigidez dos dois membros são somadas e cada uma delas contribui nas posições de seus respectivos graus de liberdade. Assim, $\mathbf{k}_1$ irá contribuir nas linhas e colunas 1, 2, 3 e 4 da matriz de rigidez da treliça, enquanto $\mathbf{k}_2$ irá contribuir nas linhas e colunas 1, 2, 5 e 6:

$$\mathbf{K} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0,378 & 0,096 & -0,25 & 0 & -0,128 & -0,096 \\ 0,096 & 0,072 & 0 & 0 & -0,096 & -0,072 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,128 & -0,096 & 0 & 0 & 0,128 & 0,096 \\ -0,096 & -0,072 & 0 & 0 & 0,096 & 0,072 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

$$k_1 = E \cdot A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,25 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$k_2 = E \cdot A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0,128 & 0,096 & -0,128 & -0,096 \\ 0,096 & 0,072 & -0,096 & -0,072 \\ -0,128 & -0,096 & 0,128 & 0,096 \\ -0,096 & -0,072 & 0,096 & 0,072 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

COLUNAS

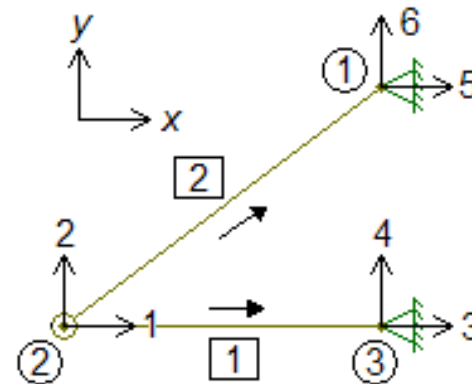
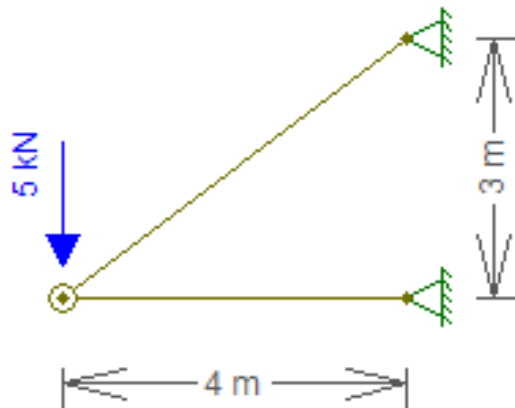
	1	2	3	4	5	6
1	0,25 0,128	0,00 0,096	- 0,25	0,00	-0,128	-0,096
2	0,00 0,096	0,00 0,072	0,00	0,00	- 0,096	-0,072
3	- 0,25	0,00	0,25	0,00	0,000	0,000
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000
5	-0,128	-0,096	0,000	0,000	0,128	0,096
6	-0,096	- 0,072	0,000	0,000	0,096	0,072

L
I
N
H
A
S



Determinação dos esforços nas barras de uma treliça pelo Método da Rigidez

A treliça da Figura 4.5 está sendo utilizada para suportar uma carga de 5 kN em sua extremidade livre. Utilizando o Método da Rigidez, determine os esforços que atuam nas barras dessa treliça, sabendo que $E A = 810 \text{ kN}$ para todas as barras da treliça.



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Para encontrar os deslocamentos e as reações de apoio desconhecidos, basta resolver o seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{K} \mathbf{D}_g \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Os deslocamentos D_1 e D_2 são desconhecidos, enquanto D_3 , D_4 , D_5 e D_6 são nulos, já que os deslocamentos referentes aos graus de liberdade 3, 4, 5 e 6 estão impedidos devido aos apoios. Consequentemente, as forças F_3 , F_4 , F_5 e F_6 são desconhecidas, pois são as reações de apoio. Como não temos nenhuma carga aplicada na direção do grau de liberdade 1, a força F_1 é nula. Já na direção do grau de liberdade 2, temos $F_2 = -5 \text{ kN}$ (negativo, pois a carga está no sentido contrário ao grau de liberdade 2 positivo).

Substituindo esses valores na equação anterior, assim como a matriz de rigidez já determinada, usando $EA = 810 \text{ kN}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = 8 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 0,378 & 0,096 & -0,25 & 0 & -0,128 & -0,096 \\ 0,096 & 0,072 & 0 & 0 & -0,096 & -0,072 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,128 & -0,096 & 0 & 0 & 0,128 & 0,096 \\ -0,096 & -0,072 & 0 & 0 & 0,096 & 0,072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminando as linhas 3, 4, 5 e 6, correspondentes aos graus de liberdade com deslocamentos nulos, temos o seguinte sistema com sua respectiva solução:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} = 8 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 0,378 & 0,096 \\ 0,096 & 0,072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 3,33 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$D_2 = -13,125 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Substituindo os valores de D1 e D2 no sistema de equações original, encontramos as reações de apoio:

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = 8 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0,128 & -0,096 \\ -0,096 & -0,072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,33 \cdot 10^{-6} \\ -13,125 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$F_3 = -6,67 \text{ kN} \quad F_4 = 0 \text{ kN} \quad F_5 = 6,67 \text{ kN} \quad F_6 = 5 \text{ kN}$$

Por fim, determinam-se os esforços nas barras 1 e 2, usando a equação. Para a barra 1:

$$f_1 = \frac{E \cdot A}{L_1} \begin{bmatrix} -\cos \theta_1 & -\text{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 & \text{sen} \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

$$f_1 = \frac{8 \cdot 10^6}{4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,33 \cdot 10^{-6} \\ -13,125 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -6,67 \text{ kN (compressão)}$$

Para a barra 2:

$$f_2 = \frac{E \cdot A}{L_2} \begin{bmatrix} -\cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

$$f_2 = \frac{8 \cdot 10^6}{5} \begin{bmatrix} -0,8 & -0,6 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,33 \cdot 10^{-6} \\ -13,125 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 8,33 \text{ kN (tração)}$$



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



AULA 8

Análise matricial de vigas e pórticos

Professor Rogério silva

Análise matricial de vigas e pórticos

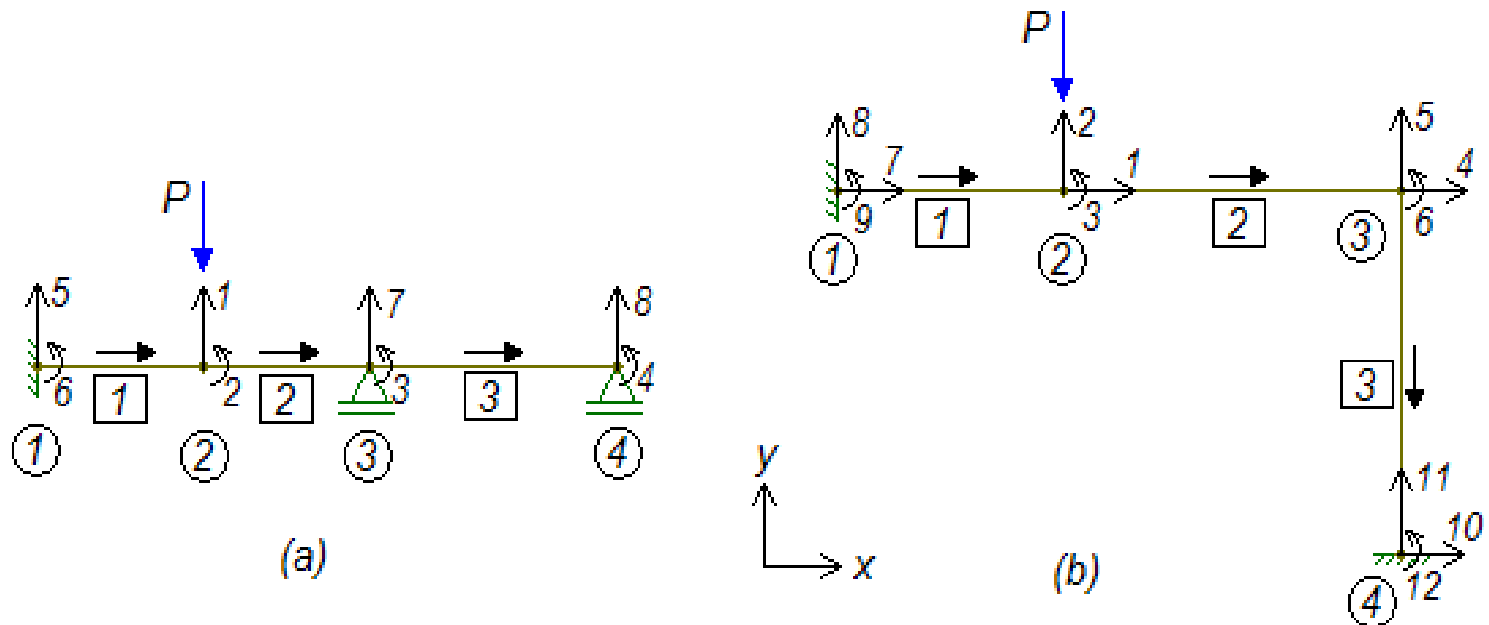
O procedimento de resolução de vigas e pórticos pelo Método da Rigidez é muito semelhante ao procedimento apresentado para treliças, na qual analisamos a resolução de treliças pelo Método da Rigidez. Primeiramente, devemos definir e numerar os nós e os elementos da estrutura. No caso das treliças, cada barra é considerada como um elemento, ou seja, os nós são os pontos de encontro de duas ou mais barras. Já no caso de vigas e pórticos, para facilitar a resolução do problema, consideramos como nós os pontos de aplicação de cargas concentradas, os pontos de início e fim de cargas distribuídas, os pontos com apoios, os pontos onde existe mudança da seção transversal da barra e os pontos com mudança de inclinação da barra.

Dessa forma, dividimos as vigas e os pórticos em elementos finitos, e cada elemento é delimitado por um nó inicial e um nó final.

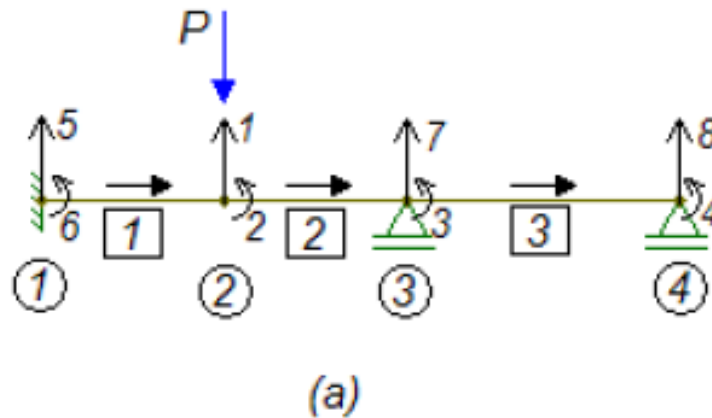
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Na Figura 4.7, são apresentados exemplos da numeração dos nós (dentro de um círculo) e dos elementos/barras (dentro de um quadrado) para uma viga e para um pórtico. Também estão indicados os nós inicial e final de cada elemento, com uma seta na direção do eixo do elemento e com sentido do nó inicial para o nó final.

Figura 4.7 | (a) Viga; (b) Pórtico



SEQUENCIA DE NUMERAÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE NAS VIGAS



(a)

Começo a numerar pelo nó onde está aplicado o carregamento

Em cada nó vou numerar:
1º força horizontal (se houver)
2º força vertical
3º momento fletor

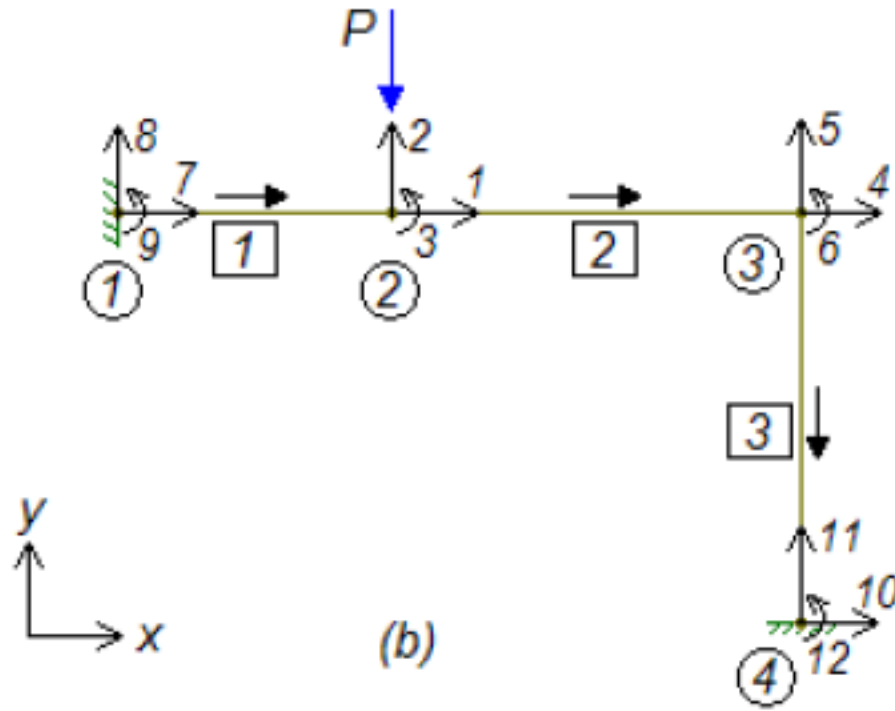
Continuo numerando os momentos fletores até o final da estrutura

Volto no início da estrutura
1º F. horizontal (se houver)
2º força vertical
3º momento fletor

Numero o restante das forças nos nós subsequentes

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

SEQUENCIA DE NUMERAÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE NOS PORTICOS



Primeiro numero as barras horizontais:

Começo a numerar pelo nó onde esta aplicado o carregamento



EM CADA NÓ VOU NUMERAR:

- 1º força horizontal (se houver)
- 2º força vertical
- 3º momento fletor



Continuo numerando as forças no sentido do nó inicial para o nó final



Volto no inicio da estrutura Se for o caso



Depois numero as barras verticais:



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Em seguida, deve-se definir e numerar os graus de liberdade de cada nó, lembrando que iremos trabalhar com estruturas planas (em duas dimensões). Para as treliças, são considerados dois graus de liberdade por nó, sendo um deslocamento horizontal e um deslocamento vertical. Para as vigas, iremos considerar também dois graus de liberdade por nó, porém sendo eles um deslocamento vertical e uma rotação, para serem considerados os efeitos de flexão e de cisalhamento na viga. Já para os pórticos, iremos considerar três graus de liberdade por nó, sendo um deslocamento vertical, um deslocamento horizontal e uma rotação, ou seja, além do efeito da flexão e do cisalhamento, também consideraremos o efeito do esforço normal (ou axial). A numeração dos graus de liberdade é feita como no caso das treliças: primeiro, numeramos os graus de liberdade desconhecidos (deslocamentos e rotações desconhecidas) e, por último, numeramos os graus de liberdade conhecidos (deslocamentos e rotações referentes aos apoios, que usualmente são nulos, com exceção dos casos com recalques de apoio). Os exemplos da Figura 4.7 já apresentam a numeração dos graus de liberdade.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

A próxima etapa consiste na determinação da matriz de rigidez de cada elemento. A matriz de rigidez de um elemento de viga é diferente da matriz de rigidez de um elemento de treliça. Enquanto na treliça leva-se em consideração apenas a rigidez axial do elemento para a determinação de sua matriz de rigidez, no caso das vigas leva-se em consideração a rigidez à flexão e também a rigidez ao cisalhamento. Consequentemente, a matriz de rigidez de um elemento de pórtico também será diferente da matriz de rigidez de um elemento de viga e de um elemento de treliça, pois para o pórtico leva-se em consideração a rigidez axial, a rigidez à flexão e a rigidez ao cisalhamento. Outro ponto que merece destaque diz respeito à aplicação da matriz de transformação (também chamada “matriz de rotação”), que no caso de treliças e pórticos é necessária para transformar a matriz de rigidez do elemento das coordenadas locais para as globais, uma vez que podem existir barras inclinadas e verticais. Já para as vigas horizontais, essa matriz de transformação não é necessária, uma vez que os eixos locais são paralelos aos eixos globais.

Álgebra de matrizes

A utilização do Método da Rigidez (análise matricial) envolve operações com matrizes. Os principais conceitos da álgebra de matrizes necessários para a aplicação do Método da Rigidez são a multiplicação de uma matriz por um escalar, a multiplicação de matrizes e a definição de matriz transposta. Esses conceitos serão revisados brevemente a seguir, com a apresentação de alguns exemplos.

Para obter a matriz resultante da multiplicação de uma matriz por um escalar, basta multiplicar cada elemento da matriz por esse escalar.

No caso da multiplicação de duas matrizes, primeiro devemos verificar se é possível realizar a multiplicação dessas duas matrizes, ou seja, nem todas as matrizes podem ser multiplicadas uma pela outra. Isso vai depender da ordem da matriz. A multiplicação **AB** de duas matrizes só é possível se elas forem conformáveis ou seja, se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B. Assim, se a matriz A tiver ordem $(m \times n)$ e a matriz B tiver ordem $(n \times p)$, a matriz resultante da multiplicação de AB será uma matriz de ordem $(m \times p)$. É importante destacar que a multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, o resultado da multiplicação de AB é diferente do resultando da multiplicação de BA (caso as matrizes A e B tenham as ordens apresentadas, a multiplicação BA nem mesmo pode ser feita).



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

A matriz resultante da multiplicação de $\mathbf{AB}$ é obtida multiplicando primeiramente cada elemento da linha da matriz $\mathbf{A}$ pelo respectivo elemento da coluna da matriz $\mathbf{B}$; em seguida, somam-se os valores resultantes das multiplicações para obter um elemento da matriz resultante. Os demais elementos são obtidos da mesma forma.

Dada uma matriz $\mathbf{A}$, a sua matriz transposta $\mathbf{A}^T$ é obtida trocando de posição as linhas pelas colunas de $\mathbf{A}$.

Exemplo :

Considere as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ a seguir:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

1) Determine a matriz resultante da multiplicação da matriz $\mathbf{A}$ pelo escalar $k = -3$.

$$k\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -6 & -15 \\ -12 & -21 \end{vmatrix}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

2) Verifique se a multiplicação das matrizes **AB** é possível. Caso seja possível, determine a matriz resultante dessa multiplicação.

Como o número de colunas da matriz **A** (2 colunas) é igual ao número de linhas da matriz **B** (2 linhas), a multiplicação **AB** é possível. A ordem da matriz resultante será:

$$(2 \times 2)(2 \times 4) = (2 \times 4)$$

Portanto, a matriz **C** resultante será:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 32 & 11 & 50 \\ 18 & 52 & 19 & 76 \end{vmatrix}$$

A obtenção dos elementos da matriz **C** é feita multiplicando-se cada linha da matriz **A** pela respectiva coluna da matriz **B**. Por exemplo, para a obtenção do elemento c_{12} , multiplicamos os elementos da linha 1 da matriz **A** pelos respectivos elementos da coluna 2 da matriz **B**; em seguida, soma-se o resultado dessas multiplicações:

$$c_{12} = 2 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 32$$

Os demais elementos são obtidos de maneira análoga.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

3) Obtenha $\mathbf{B}^T$ (matriz transposta de $\mathbf{B}$).

Para obter a matriz transposta, basta trocar as linhas pelas colunas, ou seja, a linha 1 passa a ser a coluna 1, enquanto a linha 2 passa a ser a coluna 2:

$$\mathbf{B}^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \\ 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

Análise matricial de vigas

Para determinarmos a matriz de rigidez de um elemento (membro) de uma viga, considere o elemento da Figura 4.8, na qual está indicado o sistema de coordenadas local x' , y' e z' (este último está saindo do plano da figura). Como um elemento de viga leva em consideração a rigidez ao cisalhamento e à flexão, em cada extremidade do elemento existem duas reações, sendo uma força cortante e um momento fletor, representados na Figura 4.8 no sentido positivo das coordenadas locais (para o momento fletor, considera-se o sentido anti-horário positivo, pela regra da mão direita). Para os deslocamentos lineares e angulares, também adotaremos essa mesma convenção de sinais.

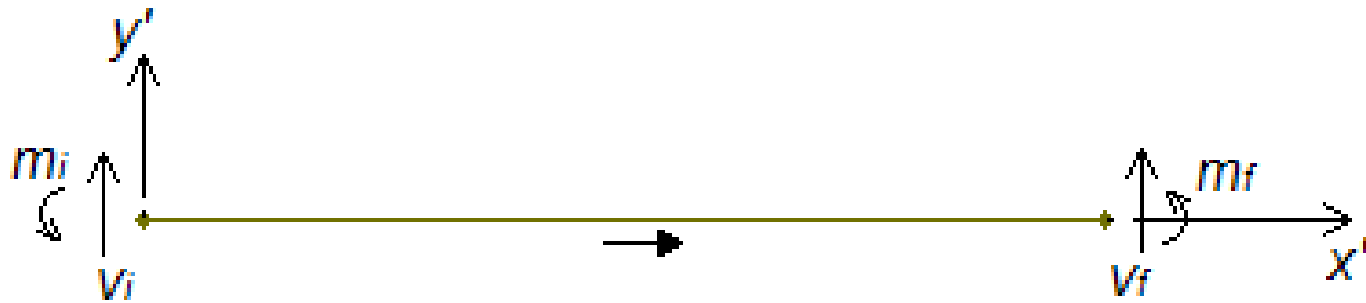
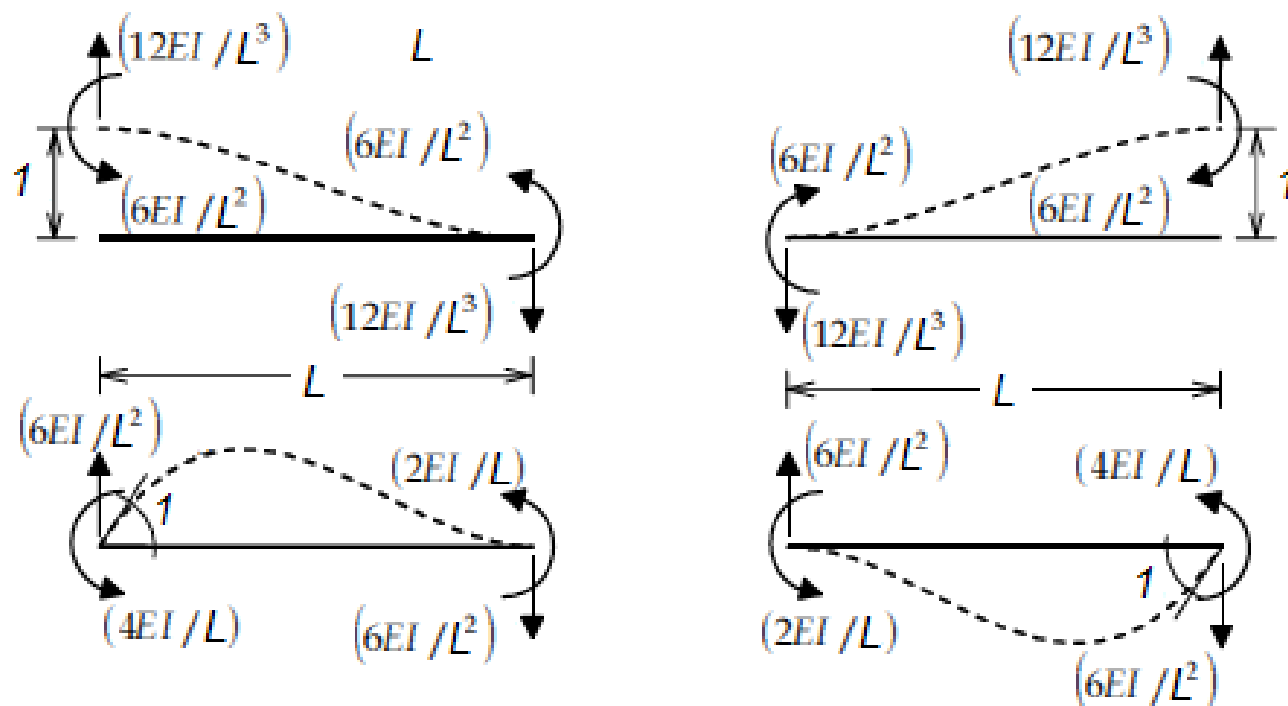


Figura 4.8 | Coordenadas locais e reações positivas

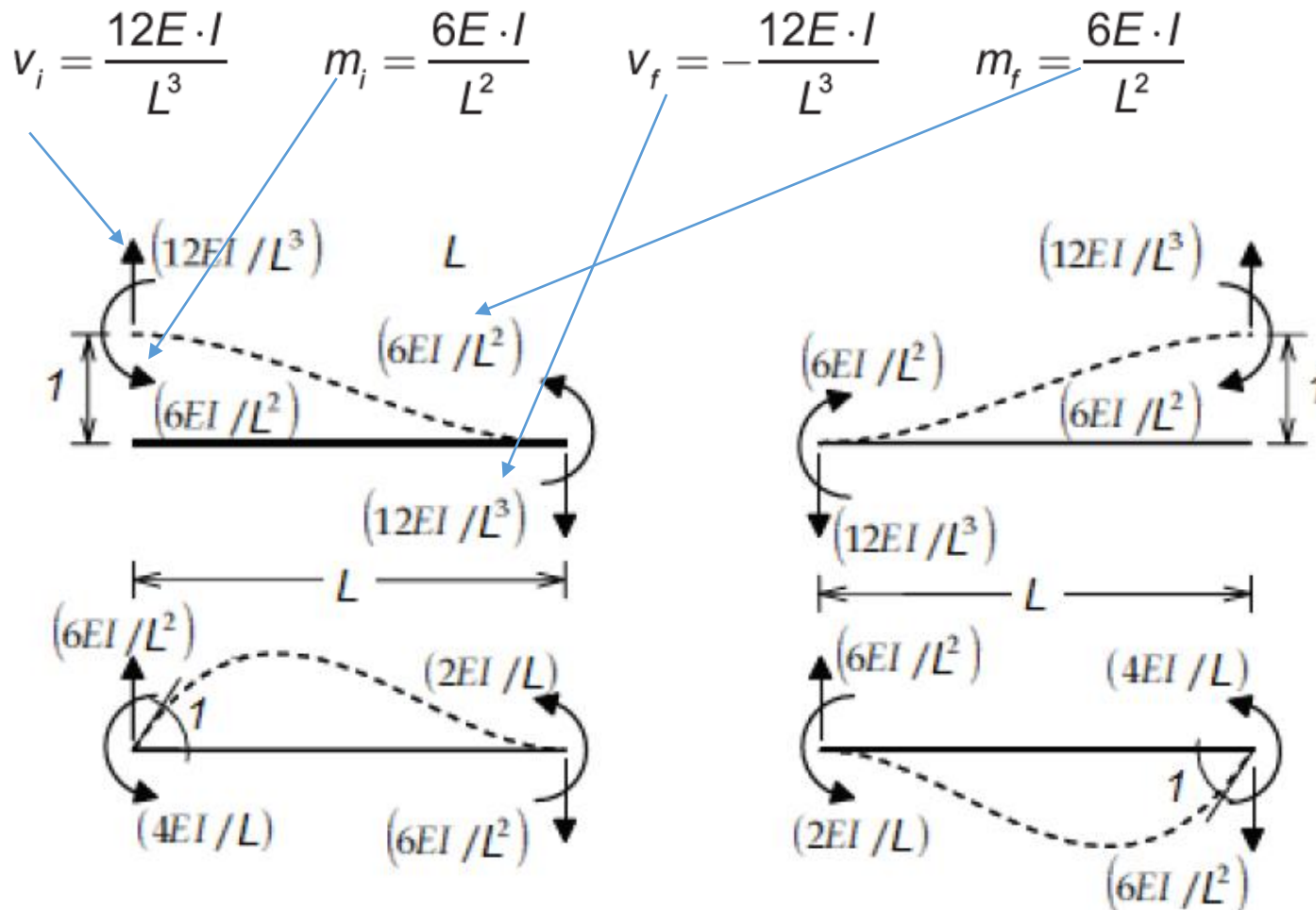
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Quando a nossa estrutura a ser analisada é uma viga, cada extremidade pode apresentar dois deslocamentos, um transversal ao elemento e outro angular (rotacional). Dessa forma, são quatro deslocamentos possíveis em um elemento de viga, o que resulta em uma matriz de rigidez de tamanho 4x4. Os valores de cada posição da matriz de rigidez do elemento de viga são obtidos pelos coeficientes de rigidez locais já apresentados na Seção 2.3 e estão exibidos na figura a seguir.



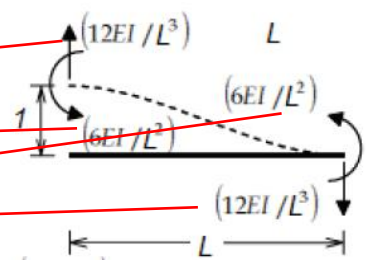
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Pode-se notar que, quando um deslocamento unitário transversal é aplicado na extremidade inicial do elemento e todos os demais deslocamentos nas extremidades são impedidos, surgem as seguintes reações nas extremidades:



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Aplicando os outros três deslocamentos unitários possíveis, obtemos os valores das reações de maneira análoga. Representando essas relações de força-deslocamento na forma matricial, temos:



$$\begin{bmatrix} v_i \\ m_i \\ v_f \\ m_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12E \cdot I}{L^3} & \frac{6E \cdot I}{L^2} & -\frac{12E \cdot I}{L^3} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{4E \cdot I}{L} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & -\frac{2E \cdot I}{L} \\ -\frac{12E \cdot I}{L^3} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{12E \cdot I}{L^3} & \frac{6E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{2E \cdot I}{L} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{4E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i \\ \phi_i \\ t_f \\ \phi_f \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{k} \mathbf{d}$$

Onde:

- t_i e t_f são os deslocamentos transversais ao elemento nas extremidades inicial e final, respectivamente.
- ϕ_i e ϕ_f são as rotações (deslocamentos rotacionais) nas extremidades inicial e final, respectivamente.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

A matriz quadrada simétrica $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez do elemento de viga. Nota-se que essa matriz, no caso de vigas horizontais, é a mesma tanto para as coordenadas locais quanto para as coordenadas globais. Por esse motivo, não há a necessidade de transformar essa matriz para as coordenadas globais, bastando apenas somar as matrizes de todos os elementos finitos da viga para obter a matriz de rigidez da estrutura, da mesma forma como foi feito no caso das treliças. Lembrando que cada elemento contribui na matriz de rigidez da estrutura nas posições referentes aos graus de liberdade de suas extremidades. Uma vez determinada a matriz de rigidez da estrutura, basta resolver o sistema de equações a seguir, apresentado na forma matricial para uma viga com seis graus de liberdade, para encontrar os deslocamentos desconhecidos e as reações de apoio, de maneira análoga ao procedimento adotado para a resolução de treliças:

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{K} \mathbf{D}_g \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

Onde:

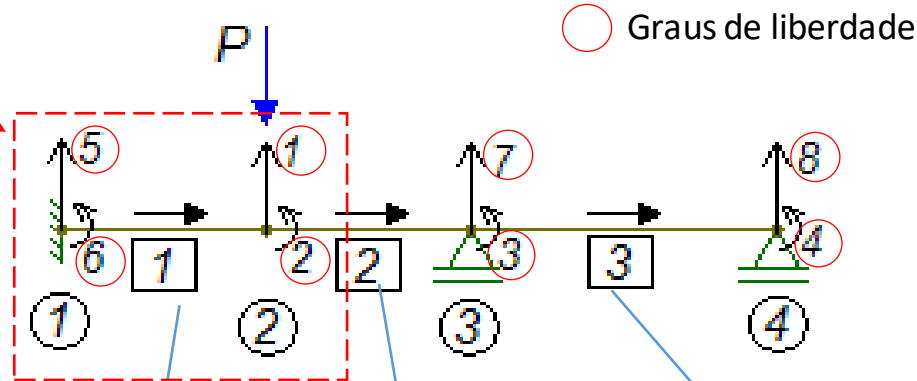
- $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez da viga.
- $\mathbf{F}_g$ é o vetor global de forças externas que atuam em cada grau de liberdade da viga.
- $\mathbf{D}_g$ é o vetor global de deslocamentos que atuam em cada grau de liberdade da viga.

EXEMPLOS RIGIDEZ EM VIGAS

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Monte a matriz de rigidez de uma viga que é composta por três elementos. Os seus nós, elementos e graus de liberdade já foram numerados, conforme a Figura.

Cada elemento ou barra da viga tem 4 graus de liberdade portanto a matriz de cada elemento será 4X4

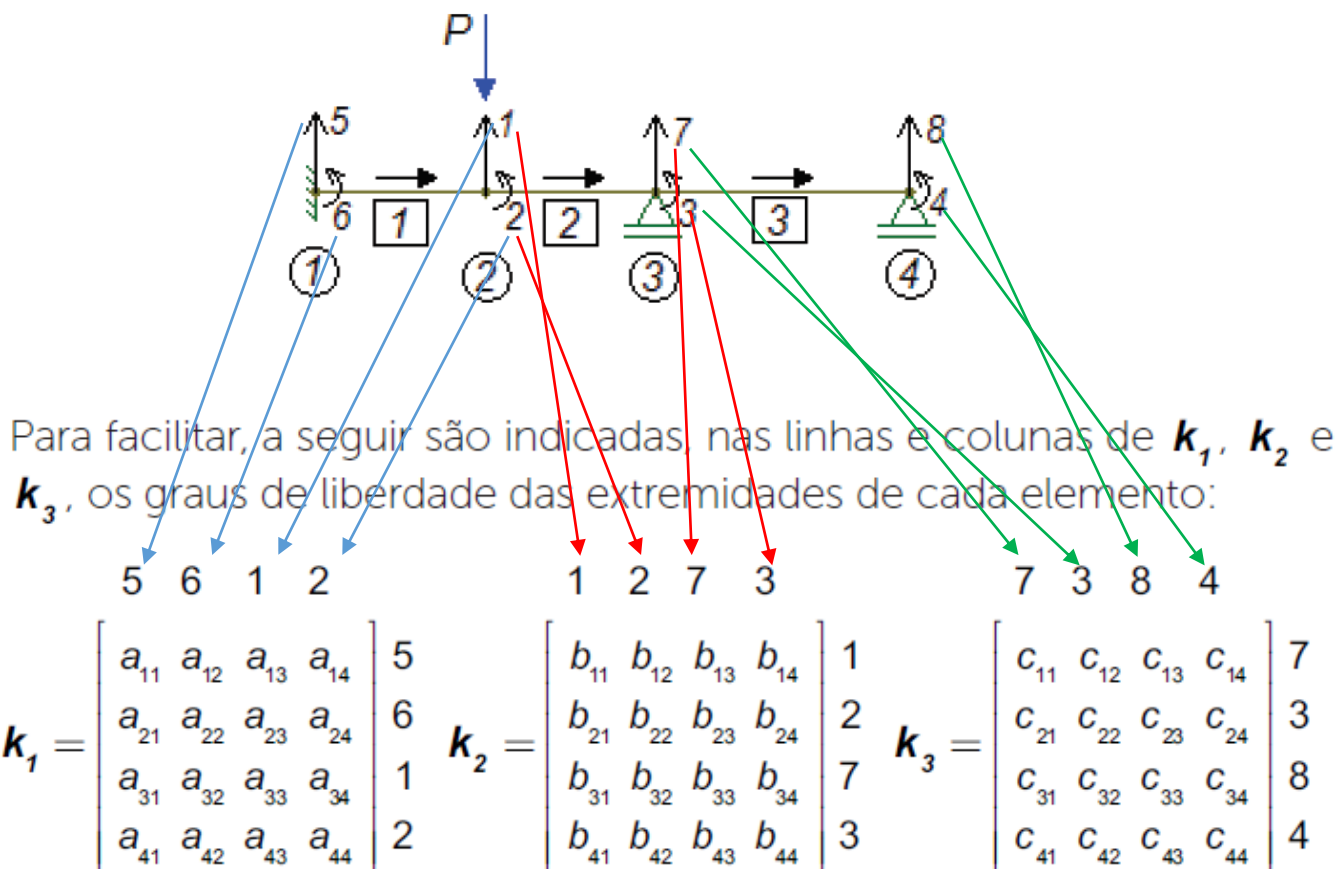


As matrizes de rigidez de cada elemento já foram calculadas e são dadas por:

$$k_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad k_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \quad k_3 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Cada elemento irá contribuir nas posições referentes aos graus de liberdade dos nós inicial e final deste elemento.



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Como a viga possui oito graus de liberdade, a matriz de rigidez da viga terá dimensão 8x8.

Para montar a matriz de rigidez **K** da viga, basta fazer a contribuição da matriz de rigidez de cada elemento nas posições adequadas:

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{3} & \boxed{4} & 5 & \boxed{6} & \boxed{7} & 8 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \\ \boxed{5} \\ \boxed{6} \\ \boxed{7} \\ \boxed{8} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \\ \boxed{5} \\ \boxed{6} \\ \boxed{7} \\ \boxed{8} \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{33} + b_{11} & a_{34} + b_{12} & b_{14} & 0 & a_{31} & a_{32} & b_{13} & 0 \\ a_{43} + b_{21} & a_{44} + b_{22} & b_{24} & 0 & a_{41} & a_{42} & b_{23} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{44} + c_{22} & c_{24} & 0 & 0 & b_{43} + c_{21} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{42} & c_{44} & 0 & 0 & c_{41} & c_{43} \\ a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{34} + c_{12} & c_{14} & 0 & 0 & b_{33} + c_{11} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{32} & c_{34} & 0 & 0 & c_{31} & c_{33} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Um elemento de uma viga possui 4 metros de comprimento e $E I = 4 \times 10^4 \text{ kN.m}^2$. A matriz de rigidez $\mathbf{k}$ desse elemento é dada por:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Assinale a alternativa que contém os valores corretos dos elementos k_{12} , k_{31} e k_{44} da matriz de rigidez desse elemento.

~~a) $k_{12} = 1,5 \cdot 10^4$, $k_{31} = -0,75 \cdot 10^4$ e $k_{44} = 4 \cdot 10^4$.~~

b) $k_{12} = -0,75 \cdot 10^4$, $k_{31} = -0,75 \cdot 10^4$ e $k_{44} = 2 \cdot 10^4$.

c) $k_{12} = 0,75 \cdot 10^4$, $k_{31} = 2 \cdot 10^4$ e $k_{44} = 4 \cdot 10^4$.

d) $k_{12} = 4 \cdot 10^4$, $k_{31} = 0,75 \cdot 10^4$ e $k_{44} = -1,5 \cdot 10^4$.

e) $k_{12} = -4 \cdot 10^4$, $k_{31} = 2 \cdot 10^4$ e $k_{44} = 4 \cdot 10^4$.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Como já tínhamos visto anteriormente, temos para uma matriz 4X4 com as devidas reações em cada extremidade ou nó :

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$



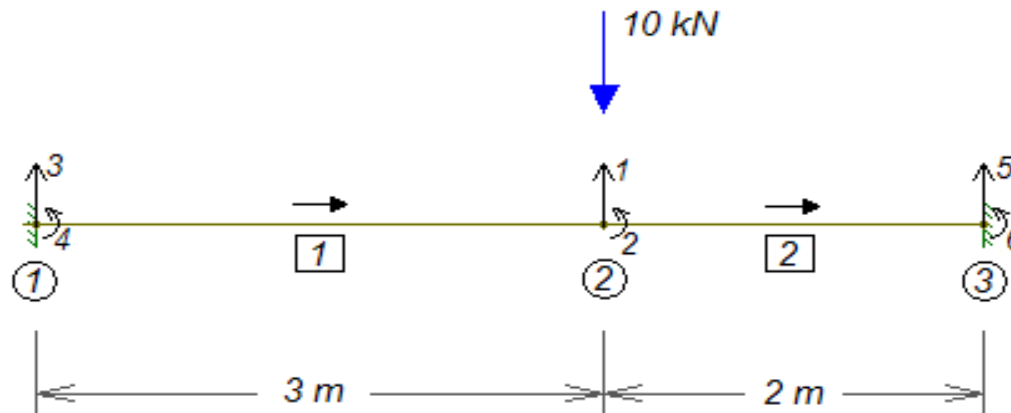
$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{12E \cdot I}{L^3} & \frac{6E \cdot I}{L^2} & -\frac{12E \cdot I}{L^3} & \frac{6E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{4E \cdot I}{L} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{2E \cdot I}{L} \\ -\frac{12E \cdot I}{L^3} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{12E \cdot I}{L^3} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{2E \cdot I}{L} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{4E \cdot I}{L} \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = \frac{(6 \cdot EI)}{L^2} = \frac{6 \cdot 4 \times 10^4}{4^2} = \frac{24 \times 10^4}{16} = 1,5 \times 10^4 \text{ KN}$$

$$K_{44} = \frac{(4 \cdot EI)}{L} = \frac{4 \cdot 4 \times 10^4}{4} = \frac{16 \times 10^4}{4} = 4 \times 10^4 \text{ KN}$$

$$K_{31} = \frac{(-12 \cdot EI)}{L^3} = \frac{-12 \cdot 4 \times 10^4}{4^3} = \frac{-48 \times 10^4}{64} = -0,75 \times 10^4 \text{ KN}$$

Dada a viga abaixo, monte a matriz de rigidez da mesma :



$$K_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c|cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 4 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 2 \end{array} \end{array}$$

$$K_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c|cccc|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & 2 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & 5 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & 6 \end{array} \end{array}$$

MATRIZ DE
RIGIDEZ

→ K =

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c|cccccc|c} (a_{33}+b_{11}) & (a_{34}+b_{12}) & a_{31} & a_{32} & b_{13} & b_{14} & 1 \\ (a_{43}+b_{21}) & (a_{44}+b_{22}) & a_{41} & a_{42} & b_{23} & b_{24} & 2 \\ a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 3 \\ a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 4 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & 5 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & 0 & b_{43} & b_{44} & 6 \end{array} \end{array}$$

PÓRTICOS

Análise matricial de pórticos

Para a análise matricial de pórticos, devemos definir a matriz de rigidez de um elemento de pórtico, para o qual levamos em consideração a rigidez axial, a rigidez ao cisalhamento e a rigidez à flexão.

Dessa forma, são três os deslocamentos e forças possíveis em cada extremidade dos elementos, conforme a Figura 4.10.

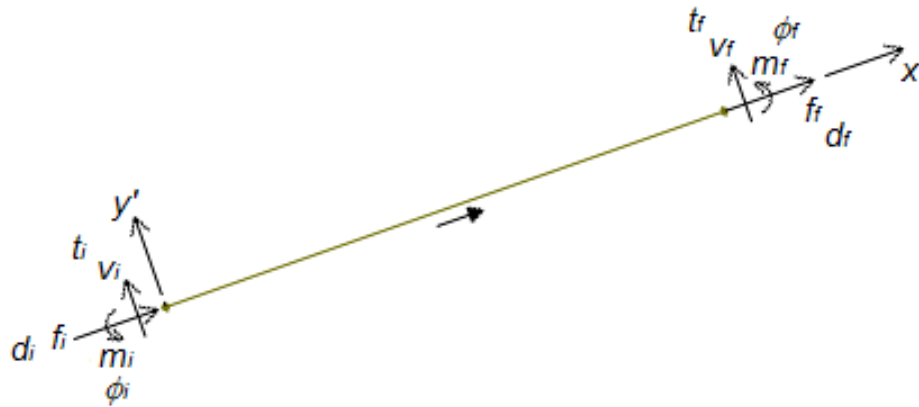


Figura 4.10 | Forças e deslocamentos nas extremidades de um elemento de pórtico

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

A matriz de rigidez do elemento de pórtico é obtida pelos mesmos coeficientes de rigidez locais já utilizados anteriormente. Nota-se que essa matriz é obtida pela superposição das matrizes de rigidez do elemento de barra da treliça e do elemento de viga, conforme apresentado a seguir, resultando em uma matriz 6x6 para considerar os seis deslocamentos possíveis no elemento:

$$\begin{bmatrix} f_i \\ v_i \\ m_i \\ f_f \\ v_f \\ m_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E \cdot I}{L^3} & \frac{6E \cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12E \cdot I}{L^3} & \frac{6E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{4E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{2E \cdot I}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E \cdot I}{L^3} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12E \cdot I}{L^3} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{2E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{4E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ t_i \\ \phi_i \\ d_f \\ t_f \\ \phi_f \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{k}'\mathbf{d}$$

Como nem todos os elementos de pórtico são horizontais, devemos transformar essa matriz de rigidez local do elemento ($\mathbf{k}'$) na matriz de rigidez com relação ao sistema de eixos global do elemento ($\mathbf{k}$), usando a matriz de transformação $\mathbf{T}$, que é obtida por meio da decomposição dos deslocamentos globais horizontal e vertical nas direções axial e transversal em cada nó do elemento, lembrando que as rotações no sistema local (ϕ) e no sistema global (ϕ_D) são as mesmas. A Figura 4.11 apresenta a decomposição dos deslocamentos globais (D_{ix} e D_{iy}) nas direções axial (d_i) e transversal (t_i) do nó inicial de um elemento de pórtico.

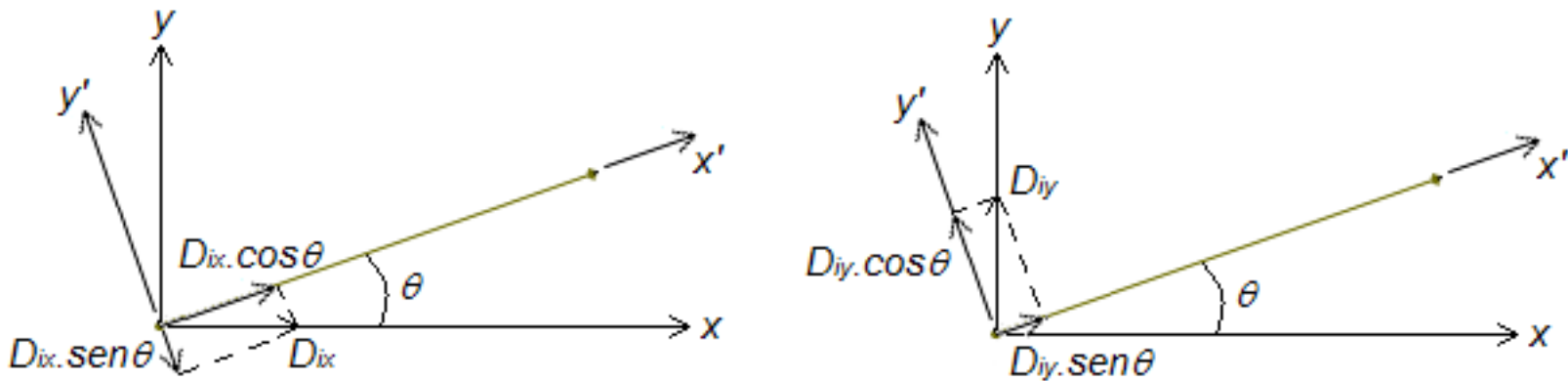
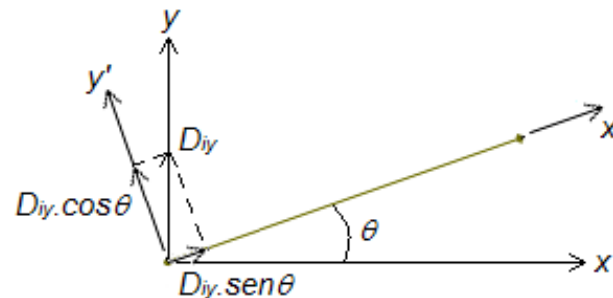
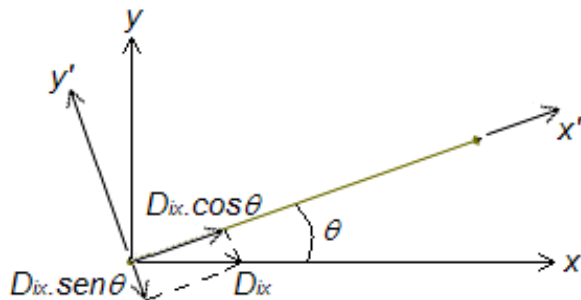


Figura 4.11 | Decomposição dos deslocamentos globais no nó inicial de um elemento de pórtico

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



$$d_i = D_{ix} \cdot \cos \theta + D_{iy} \cdot \sin \theta \quad t_i = -D_{ix} \cdot \sin \theta + D_{iy} \cdot \cos \theta \quad \phi_i = D_{i\phi}$$

Escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} d_i \\ t_i \\ \phi_i \\ d_f \\ t_f \\ \phi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ix} \\ D_{iy} \\ D_{i\phi} \\ D_{fx} \\ D_{fy} \\ D_{f\phi} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{D}$$

Da mesma forma como apresentado no caso das barras de treliça, a matriz de rigidez do elemento escrita no sistema de eixos global ($\mathbf{k}$) é dada por:

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$$

Uma vez obtida a matriz de rigidez escrita no sistema de eixos global de cada elemento do pórtico, basta fazer a contribuição dessas matrizes na matriz de rigidez do pórtico, de maneira análoga ao procedimento realizado para as treliças e para as vigas. Também de maneira semelhante, são determinados os deslocamentos desconhecidos e as reações de apoio do pórtico.



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



AULA 9

Processo de Cross

Professor Rogério silva

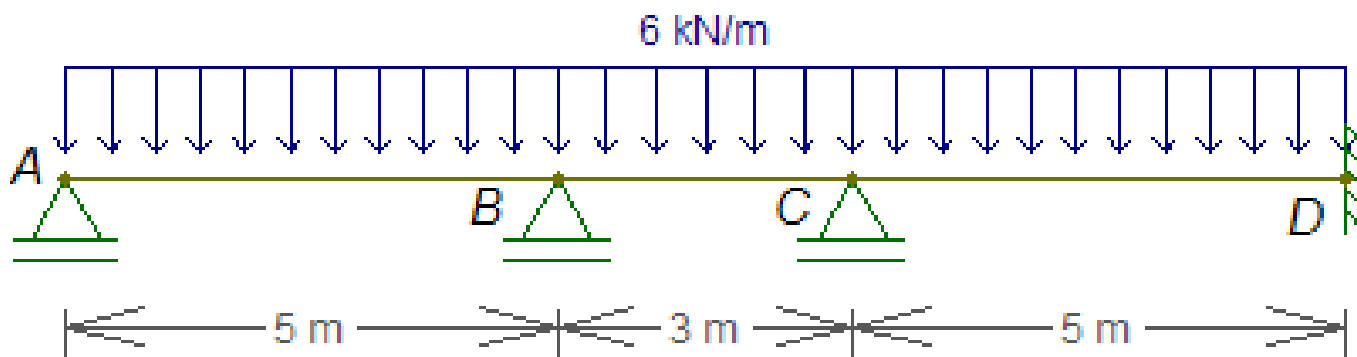
O procedimento de resolução pelo Processo de Cross faz uso do Método dos Deslocamentos e também pode ser chamado de Distribuição de Momentos. O motivo de usarmos este nome ficará claro ao longo desta seção. O Processo de Cross é um método iterativo de resolução de estruturas hiperestáticas. Isso significa que devemos repetir alguns ciclos para chegar à solução do problema. A cada ciclo, a resposta se aproxima mais da solução exata. O momento em que se deve encerrar o processo iterativo vai depender da precisão desejada, que é definida por meio do critério de parada. Quanto mais passos forem realizados, maior será a precisão da resposta.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

As etapas que devem ser desenvolvidas para a utilização do Processo de Cross são relativamente simples e rápidas, o que o torna uma ferramenta extremamente útil para a solução de estruturas hiperestáticas mais simples, como vigas. E é exatamente uma viga hiperestática que vamos analisar utilizando o processo de Cross para traçar o diagrama de momentos fletores da viga da figura a seguir. Todas as barras da viga possuem $E.I$ constante.

Figura 4.13 | Viga

Fonte:



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

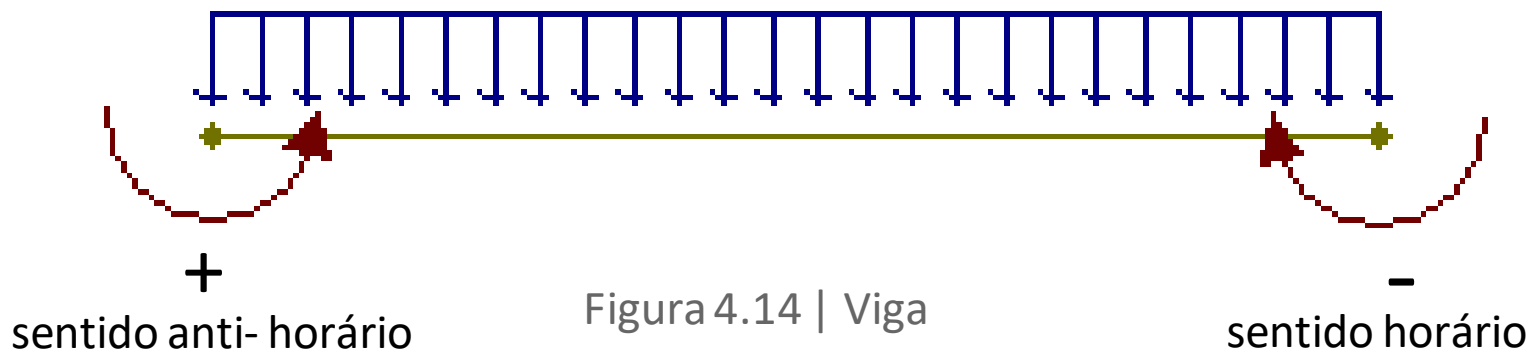
O Processo de Cross, também chamado de Distribuição de Momentos, é um procedimento que, assim como o Método da Rigidez, utiliza o Método dos Deslocamentos para a análise de estruturas hiperestáticas, sejam elas vigas, pórticos planos, grelhas ou até mesmo pórticos espaciais. No caso de vigas hiperestáticas, a aplicação do Processo de Cross é bastante rápida e prática, como veremos nesta seção.

A ideia básica desse processo é a de que, como os nós de uma estrutura devem estar em equilíbrio, a soma dos momentos aplicados pelas extremidades das barras que chegam a um nó deve ser nula. O Processo de Cross é um método iterativo e, portanto, aproximado, e o critério de parada do processo é definido pela precisão desejada para a resposta.

Inicialmente, admite-se que todos os nós da estrutura estão fixos, ou seja, não podem girar. Dessa forma, são obtidos os momentos de engastamento perfeito nas extremidades das barras, provocados pelos carregamentos aplicados. Depois, a rotação de um dos nós da estrutura é liberada, permitindo que ele gire e, desse modo, faça a distribuição dos momentos que atuam nesse nó para as barras adjacentes, em função da rigidez de cada barra. Esse nó é novamente bloqueado, liberando-se outro nó para reiniciar o processo, que deve ser repetido até que se atinja o critério de parada definido, quando todos os nós terão girado para a sua posição final. Com a finalização da distribuição dos momentos, são obtidos os momentos finais nas extremidades de cada barra, o que permite determinar as reações de apoio e também traçar os diagramas de momento fletor e força cortante da estrutura.

Convenção de sinais

Para o desenvolvimento do Processo de Cross, adotaremos a seguinte convenção de sinais: momentos que atuam no sentido anti- horário são considerados positivos, enquanto os momentos que atuam no sentido horário são negativos. Por essa convenção, na Figura 4.14, o momento na extremidade esquerda da barra é positivo, enquanto o momento na extremidade direita da barra é negativo.



Estruturas indeslocáveis

Estruturas indeslocáveis são aquelas que não apresentam deslocamento lateral. Pórticos que possuem algum mecanismo que impeça o deslocamento lateral de seus nós, como, por exemplo, os contraventamentos, são chamados de pórticos indeslocáveis.

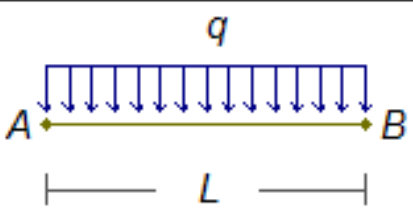
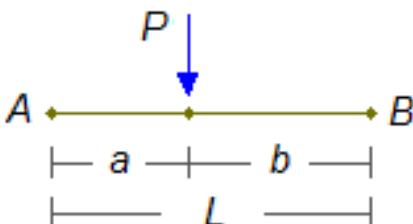
Também consideraremos que as vigas são estruturas indeslocáveis, apresentando somente força cortante e momento fletor ao longo da viga. Antes de aplicar o Processo de Cross nesse tipo de estrutura, serão apresentadas algumas definições.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Momentos de engastamento perfeito (MEPs)

São os momentos que aparecem nas extremidades de uma barra carregada, quando essas extremidades estiverem fixas (engastadas). Esses momentos são os mesmos apresentados na Seção 2.3, quando foram chamados de reações de engastamento perfeito. Na Figura 4.15, são apresentados os MEPs para as duas situações mais comuns de carregamentos.

Figura 4.15 | Momentos de engastamento perfeito (MEPs)

Condições de contorno Carregamento			
	$M_A = +\frac{q \cdot L^2}{12}$ $M_B = -\frac{q \cdot L^2}{12}$	$M_A = +\frac{q \cdot L^2}{8}$	$M_B = -\frac{q \cdot L^2}{8}$
	$M_A = +\frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2}$ $M_B = -\frac{P \cdot a^2 \cdot b}{L^2}$	$M_A = +\frac{P \cdot a \cdot b}{2 \cdot L^2} \cdot (L + b)$	$M_B = -\frac{P \cdot a \cdot b}{2 \cdot L^2} \cdot (L + a)$

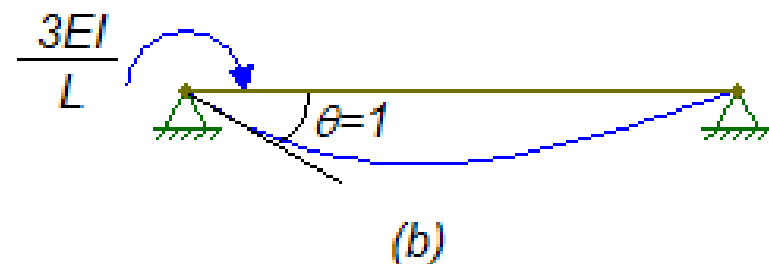
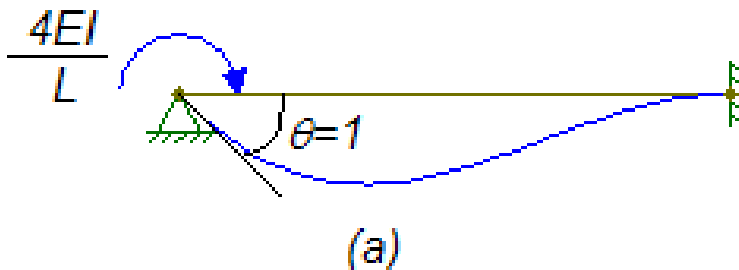
Coeficiente de rigidez

Esse coeficiente também já foi apresentado na Seção 2.3 (coeficiente de rigidez local). Vimos que, quando aplicamos um giro unitário em uma extremidade de uma barra e a extremidade oposta está engastada, um momento de

$$\frac{4 \cdot E \cdot I}{L}$$

para manter a configuração deformada da barra, conforme a Figura 4.16(a), para uma viga de comprimento L . Esse é o valor do coeficiente de rigidez (k) de uma barra quando a extremidade oposta for engastada.

Uma outra situação que não foi apresentada na Seção 2.3, mas o que ocorre com frequência, é termos a extremidade oposta da barra articulada. Nesse caso, o coeficiente de rigidez (k) da barra é , conforme a $\frac{3 \cdot E \cdot I}{L}$. 4.16(b), para uma barra de comprimento L .

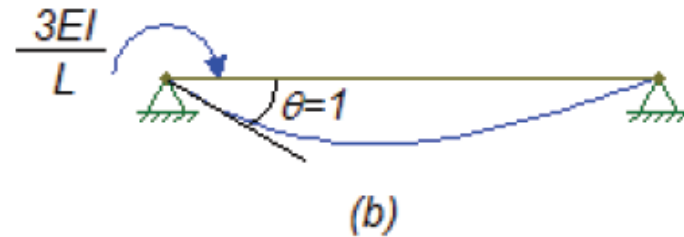
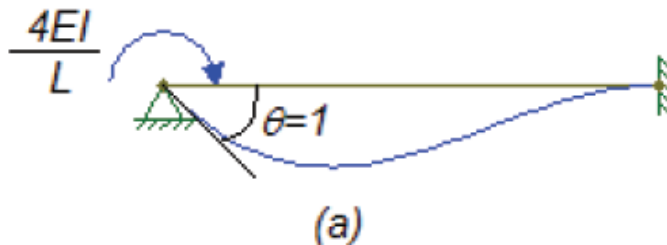


ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Fator de propagação

Conforme vimos na Seção 2.3, na situação da Figura (a), um momento de $\frac{2 \cdot E \cdot I}{L}$ atuar na extremidade engastada da barra para que seja mantida a configuração deformada correta dessa barra.

Perceba que esse momento é exatamente a metade do momento que atua na extremidade oposta. Logo, quando a extremidade oposta da barra está engastada, existe um fator de propagação de valor $\alpha = 0,5$, que representa a parcela de momento que foi “propagada” de uma extremidade para a outra. Já no caso da figura (b) abaixo esse fator de propagação não existe, pois a extremidade oposta é articulada, ou seja, nenhuma parcela de momento foi “propagada” para essa extremidade.



Coeficiente de distribuição

Quando um nó está conectado a n barras e um momento M é aplicado nesse nó, cada barra irá resistir a uma parcela desse momento, dependendo da rigidez da barra. Ou seja, cada barra apresentará um momento resistente diferente, que é uma parcela do momento total M no nó, de forma que a soma dos momentos na extremidade de todas as barras seja igual ao momento no nó, para manter o equilíbrio. A parcela do momento total resistida por uma barra é denominada de coeficiente de distribuição e é calculada por:

$$\gamma = \frac{k}{\sum_{i=1}^n k_i}$$

Onde:

- k : coeficiente de rigidez da barra analisada.
- k_i : coeficiente de rigidez de uma das n barras ligadas ao nó da estrutura.

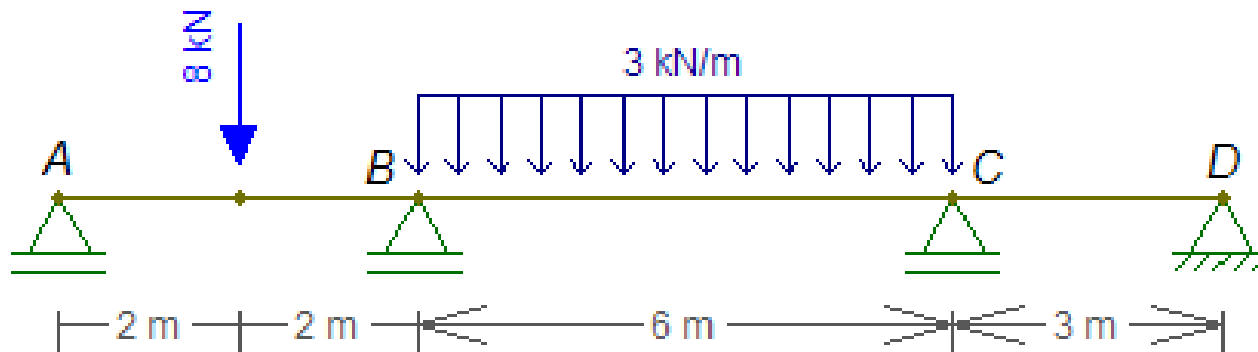
Assim, um nó com, por exemplo, três barras terá três coeficientes de distribuição, sendo um para cada barra conectada a ele.

Com essas definições, podemos aplicar o Processo de Cross para resolver uma estrutura hiperestática, como, por exemplo, uma viga.

EXEMPLO

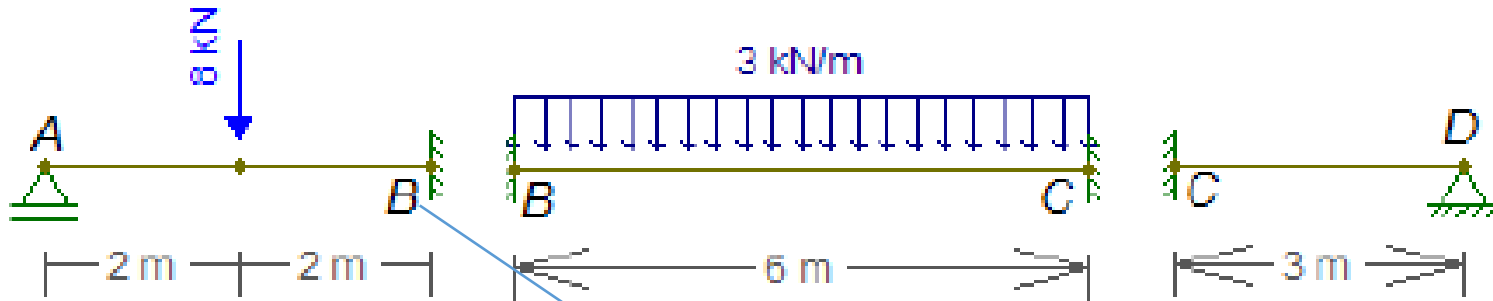
Determine o momento em cada apoio da viga da Figura 4.17, sabendo que todas as barras possuem $E.I$ constante. Como critério de parada do processo iterativo, considere que momentos inferiores à 0,1 kN.m podem ser aproximados para zero.

Figura 4.17 | Viga hiperestática



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Primeiramente, devemos determinar os MEPs (momentos de engastamento perfeito) e os coeficientes de rigidez de cada uma das três barras que formam a viga. Essas barras foram isoladas e estão representadas abaixo. Nota-se que, ao isolar as barras, os apoios intermediários são tratados como engastes.



Fonte: elaborada pelo autor.

- Trecho AB:

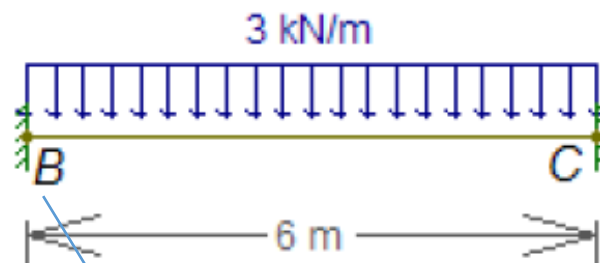
Ver figura 4.15.

$$M_B = -\frac{P \cdot a \cdot b}{2 \cdot L^2} \cdot (L + a) = -\frac{8 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 4^2} \cdot (4 + 2) = -6 \text{ kN.m} ; e$$

$$k_{AB} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{4} = 0,75 \cdot E \cdot I$$

Extremidade da barra
é articulada

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



Ver figura
4.15.

• Trecho BC

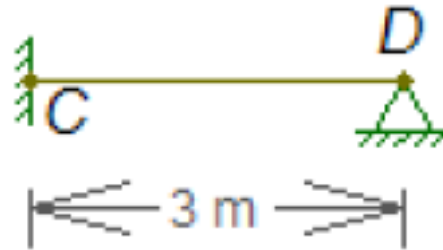
$$M_B = \frac{q \cdot L^2}{12} = \frac{3 \cdot 6^2}{12} = 9 \text{ kN.m}$$

$$M_C = -\frac{q \cdot L^2}{12} = -9 \text{ kN.m}$$

$$k_{BC} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{6} = 0,67 \cdot E \cdot I$$

Extremidade da barra
é engastada

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



Não tem carregamento
portanto não tem momento

- Trecho CD

$$k_{CD} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{3} = E \cdot I$$

Extremidade da barra
é articulada

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Em seguida, determinam-se os coeficientes de distribuição dos nós com duas ou mais barras, ou seja, dos nós intermediários B e C. Esses nós terão um coeficiente de distribuição para cada barra que chega ao nó, ou seja, cada nó terá dois coeficientes de distribuição.

• Nó B

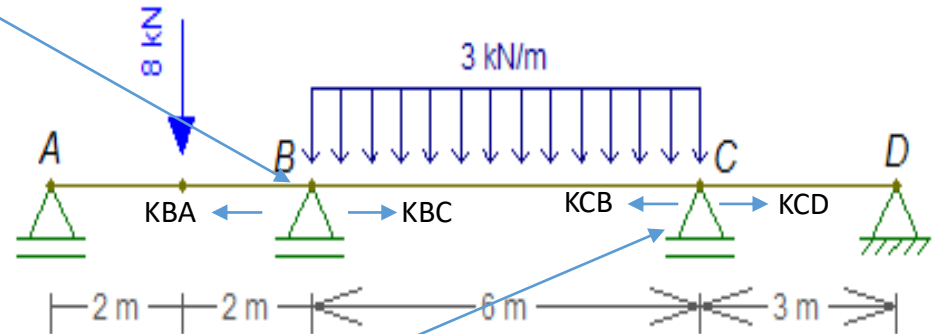
$$\gamma_{BA} = \frac{k_{AB}}{k_{AB} + k_{BC}} = \frac{0,75 \cdot E \cdot I}{0,75 \cdot E \cdot I + 0,67 \cdot E \cdot I} = 0,53$$

$$\gamma_{BC} = \frac{k_{BC}}{k_{AB} + k_{BC}} = \frac{0,67 \cdot E \cdot I}{0,75 \cdot E \cdot I + 0,67 \cdot E \cdot I} = 0,47$$

• Nó C

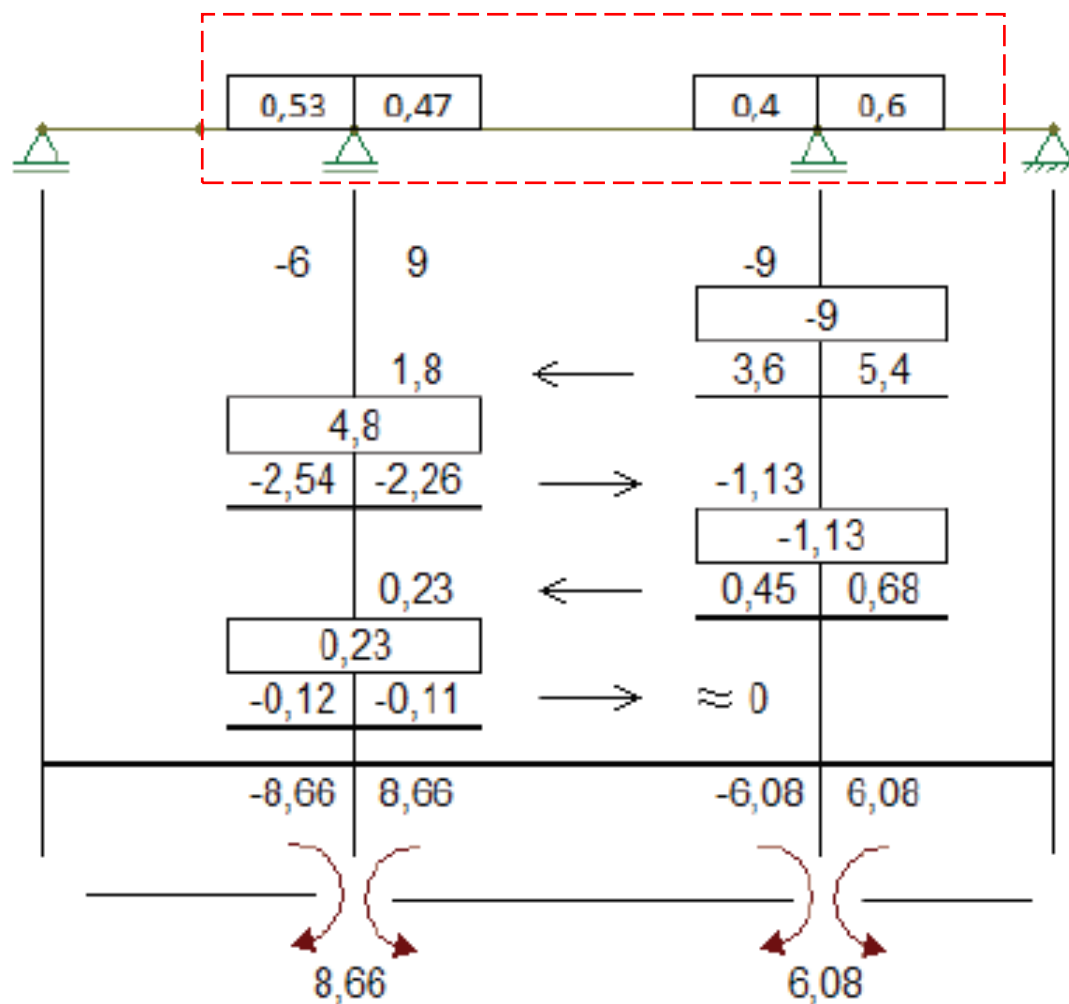
$$\gamma_{CB} = \frac{k_{BC}}{k_{BC} + k_{CD}} = \frac{0,67 \cdot E \cdot I}{0,67 \cdot E \cdot I + E \cdot I} = 0,4$$

$$\gamma_{CD} = \frac{k_{CD}}{k_{BC} + k_{CD}} = \frac{E \cdot I}{0,67 \cdot E \cdot I + E \cdot I} = 0,6$$



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Dessa forma, parte-se para a distribuição dos momentos utilizando o processo iterativo. Para organizar o processo, desenha-se a viga indicando os coeficientes de distribuição sobre os nós intermediários, conforme abaixo.



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Abaixo da viga são indicados os momentos de engastamento perfeito já calculados nas extremidades de cada barra. Na sequência, é feita a distribuição de momentos, representada na Figura 4.19. Essa distribuição de momentos é feita somente nos nós com duas ou mais barras, ou seja, somente nos nós intermediários (B e C).

Para tornar o processo iterativo mais rápido, devemos começar a distribuição de momentos pelo nó mais desequilibrado, ou seja, o nó com maior valor de momento em módulo:

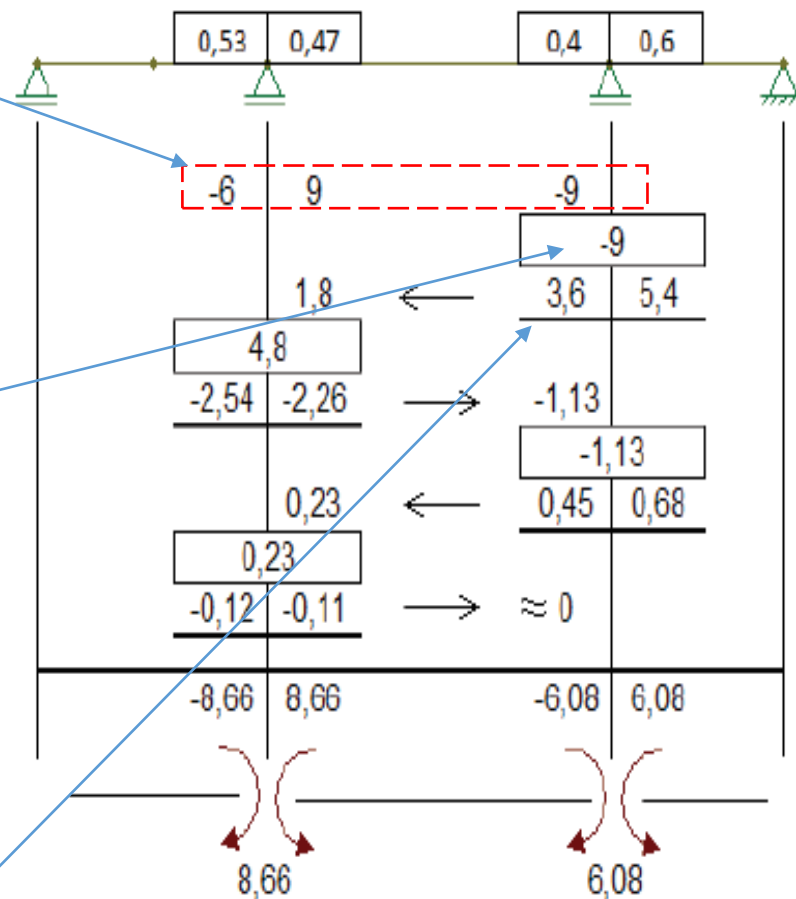
Momento total no nó B: $-6 + 9 = 3 \text{ kN.m}$

Momento total no nó C: -9 kN.m

Assim, o processo é iniciado pelo nó C. Primeiro, representa-se o momento total no nó dentro de um retângulo.

Depois, esse momento é distribuído para as barras adjacentes ao nó, multiplicando-se o momento no nó pelo coeficiente de distribuição. Como estamos transmitindo o momento do nó para a barra, nesse instante é necessário alterar o sinal do momento, pelo princípio da ação e reação: Momento distribuído para a barra BC: $9 \times 0,4 = 3,6 \text{ kN.m}$

Momento distribuído para a barra CD: $9 \times 0,6 = 5,4 \text{ kN.m}$

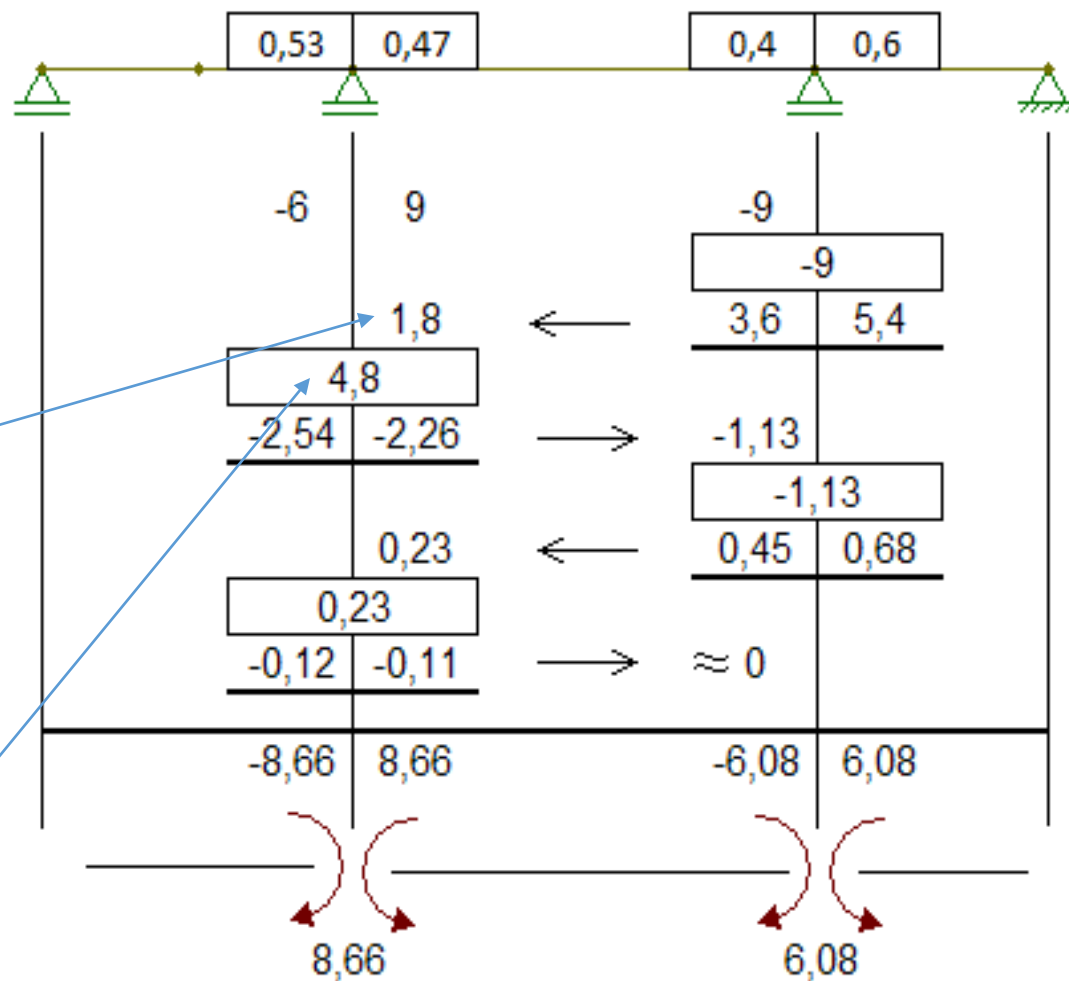


ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Em seguida, devemos fazer a propagação desses momentos de uma extremidade da barra para a outra. Como na barra CD a extremidade D é articulada, nenhum momento será propagado para essa extremidade.

Já no caso da barra BC, como a extremidade B é um nó intermediário, considerado um engaste, metade do momento é transmitido da extremidade C para a extremidade B, ou seja, $(3,6/2)=1,8$ kN.m. Dessa forma, o equilíbrio do nó C está concluído, o que é representado desenhando-se uma linha abaixo dos momentos desse nó.

O próximo passo consiste em fazer o equilíbrio do nó B, que, ao receber o momento de 1,8 kN.m do nó C, passou a ter um momento total de: $-6+9+1,8=4,8$ kN.m



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

O procedimento de equilíbrio do nó B é exatamente o mesmo descrito para o nó C, lembrando-se sempre de trocar o sinal do momento no instante de transmiti-lo do nó para a barra. Como ao final do processo de equilíbrio do nó B houve uma propagação de um momento de $-1,13 \text{ kN.m}$ para o nó C, é necessário equilibrar o nó C novamente. Como o nó C recebeu apenas um momento de $-1,13 \text{ kN.m}$, este é o momento total no nó que deve ser equilibrado, uma vez que os momentos anteriores que atuam no nó C já foram equilibrados. Repetindo a distribuição de momentos por quatro vezes, chegamos ao final do processo iterativo, já que na última distribuição o momento propagado do nó B para o nó C é inferior a $0,1 \text{ kN.m}$, que, pelo critério de parada definido, pode ser aproximado para zero.

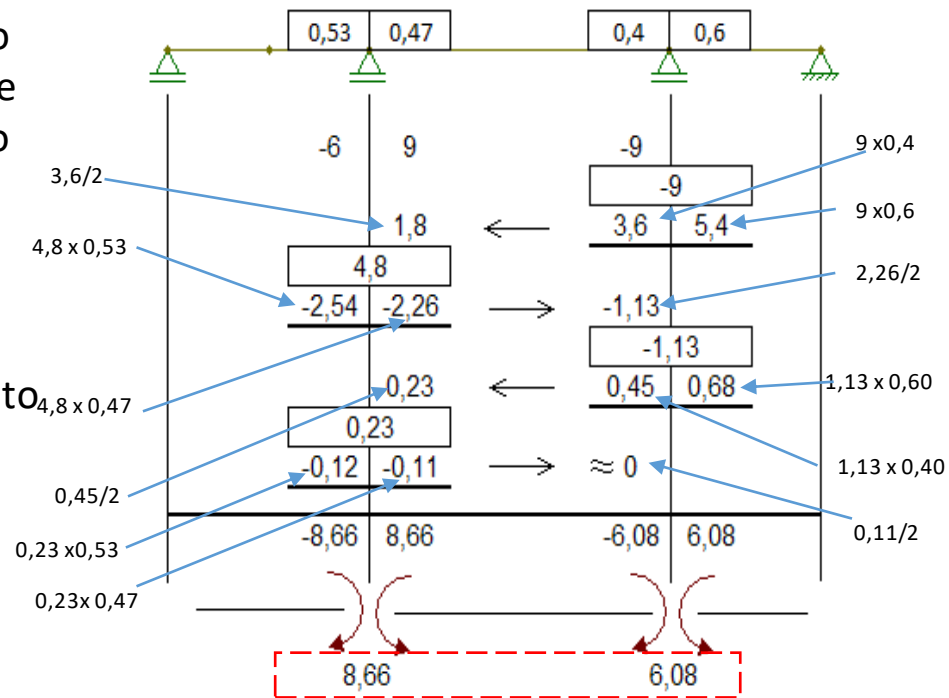
Para encontrar os momentos finais nas extremidades de cada barra, basta somar os momentos de todas as etapas do processo:

Direita da barra AB: $-6 - 2,54 - 0,12 = -8,66 \text{ kN.m}$

Esquerda da barra BC: $9 + 1,8 - 2,26 + 0,23 - 0,11 = 8,66 \text{ kN.m}$

Direita da barra BC: $-9 + 3,6 - 1,13 + 0,45 = -6,08 \text{ kN.m}$

Esquerda da barra CD: $5,4 + 0,68 = 6,08 \text{ kN.m}$



Note que os momentos que atuam nas extremidades das barras à esquerda e à direita de um nó devem possuir o mesmo módulo, porém sinais (sentidos) opostos. Isso garante que o nó está em equilíbrio, pois a somatória dos momentos é igual a zero. Essa é uma maneira de conferir se não foi cometido nenhum erro no processo de distribuição dos momentos. Esses são os momentos nos apoios da viga, que podem ser usados para traçar o diagrama de momentos fletores.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



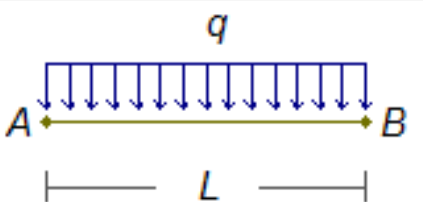
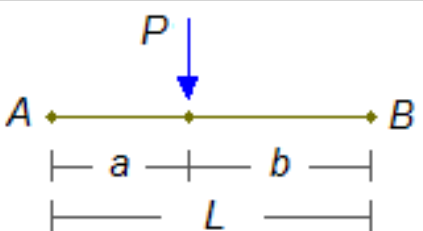
AULA 10

Processo de Cross

Professor Rogério silva

Resolução de vigas pelo processo de cross

Figura 4.15 | Momentos de engastamento perfeito (MEPs)

Condições de contorno Carregamento			
	$M_A = +\frac{q \cdot L^2}{12}$ $M_B = -\frac{q \cdot L^2}{12}$	$M_A = +\frac{q \cdot L^2}{8}$	$M_B = -\frac{q \cdot L^2}{8}$
	$M_A = +\frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2}$ $M_B = -\frac{P \cdot a^2 \cdot b}{L^2}$	$M_A = +\frac{P \cdot a \cdot b}{2 \cdot L^2} \cdot (L + b)$	$M_B = -\frac{P \cdot a \cdot b}{2 \cdot L^2} \cdot (L + a)$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

EXEMPLO

Determine o diagrama de momentos fletores para a viga da Figura 4.13.

Para definir quando terminar o processo iterativo, adotaremos como critério de parada que momentos inferiores a $0,1 \text{ kN.m}$ podem ser aproximados para zero.

Primeiramente, isolamos os três trechos da viga, conforme a Figura 4.22, e determinamos os momentos de engastamento perfeito e os coeficientes de rigidez de cada trecho:

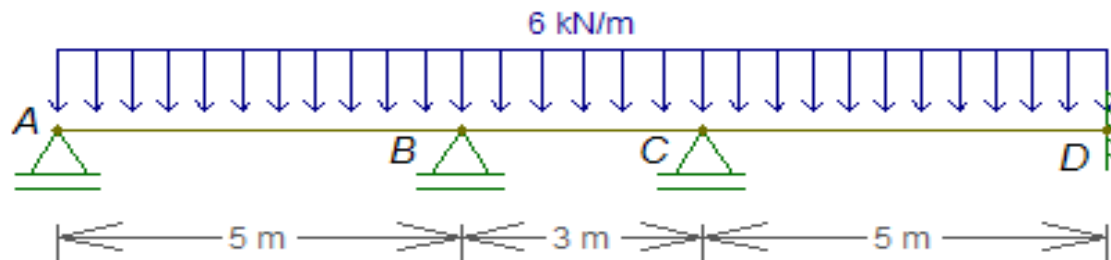
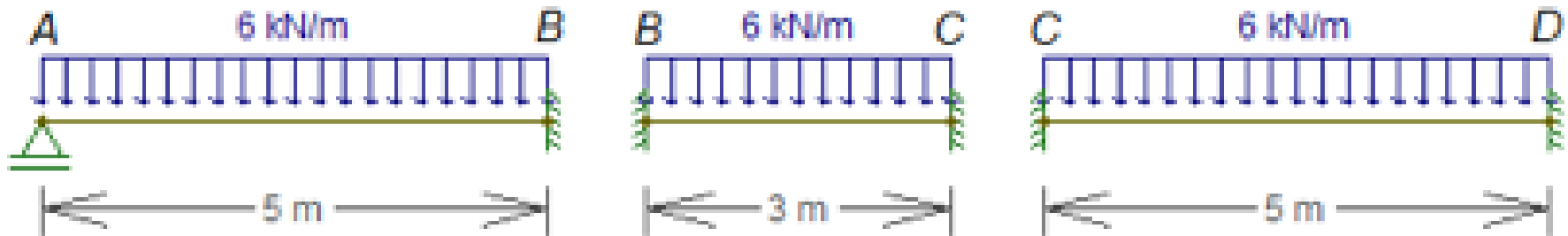


Figura 4.22 | Trechos da viga analisada



- Trecho AB

$$M_B = -\frac{6 \cdot 5^2}{8} = -18,75 \text{ kN.m} \quad k_{AB} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{5} = 0,6 \cdot E \cdot I$$

- Trecho BC

$$M_B = \frac{6 \cdot 3^2}{12} = 4,5 \text{ kN.m} \quad M_C = -4,5 \text{ kN.m} \quad k_{BC} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} = 1,33 \cdot E \cdot I$$

- Trecho CD

$$M_C = \frac{6 \cdot 5^2}{12} = 12,5 \text{ kN.m} \quad M_D = -12,5 \text{ kN.m} \quad k_{CD} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{5} = 0,8 \cdot E \cdot I$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

$$\gamma_{BA} = \frac{k_{AB}}{k_{AB} + k_{BC}} \quad \gamma_{BC} = \frac{k_{BC}}{k_{AB} + k_{BC}} \quad \gamma_{CB} = \frac{k_{BC}}{k_{BC} + k_{CD}} \quad \gamma_{CD} = \frac{k_{CD}}{k_{BC} + k_{CD}}$$

Os coeficientes de distribuição dos nós **B** e **C** são, então, calculados:

- **Nó B**

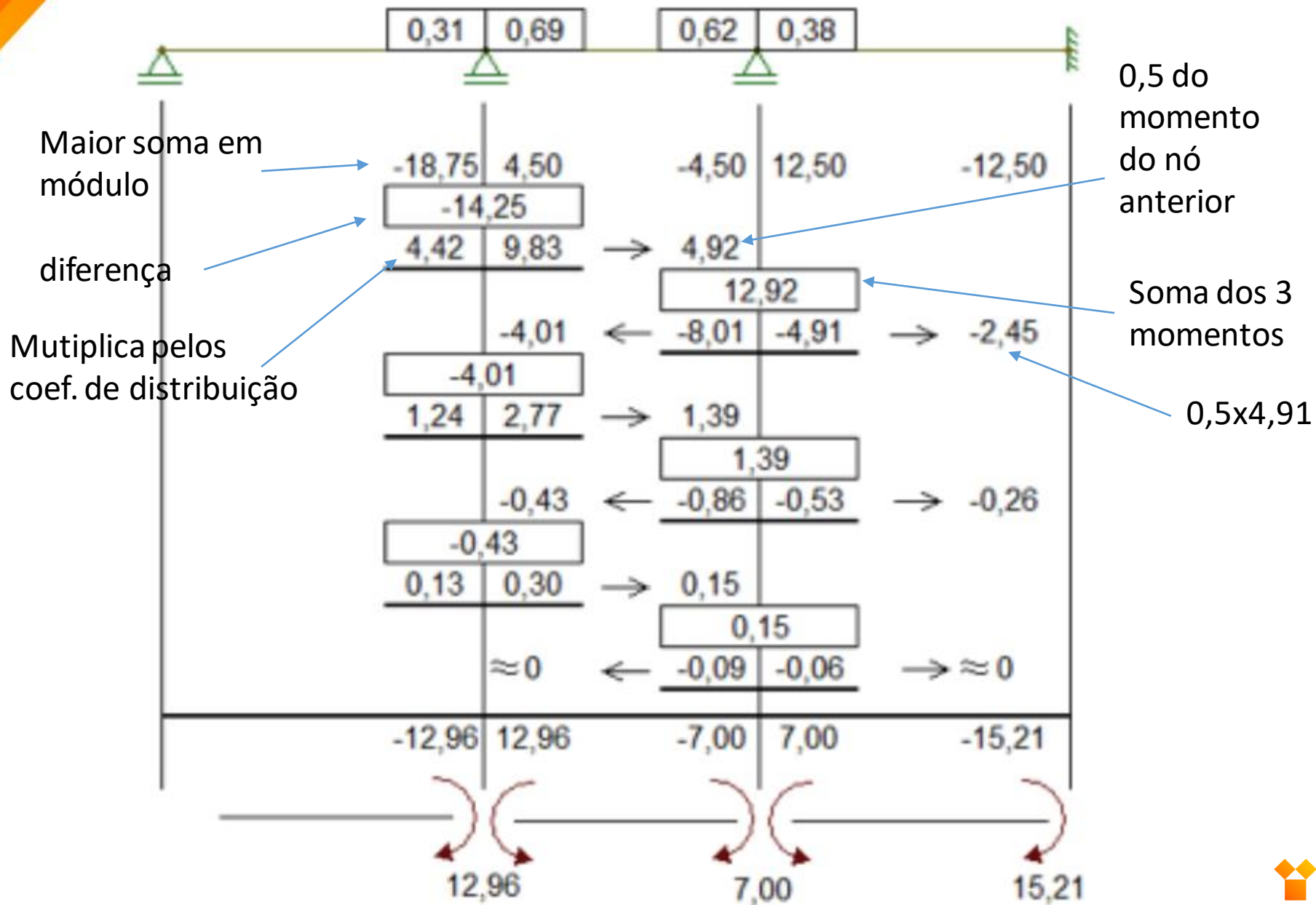
$$\gamma_{BA} = \frac{0,6 \cdot E \cdot I}{0,6 \cdot E \cdot I + 1,33 \cdot E \cdot I} = 0,31 \quad \gamma_{BC} = \frac{1,33 \cdot E \cdot I}{0,6 \cdot E \cdot I + 1,33 \cdot E \cdot I} = 0,69$$

- **Nó C:**

$$\gamma_{CB} = \frac{1,33 \cdot E \cdot I}{1,33 \cdot E \cdot I + 0,8 \cdot E \cdot I} = 0,62 \quad \gamma_{CD} = \frac{0,8 \cdot E \cdot I}{1,33 \cdot E \cdot I + 0,8 \cdot E \cdot I} = 0,38$$

A distribuição de momentos é realizada, conforme a figura a seguir.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



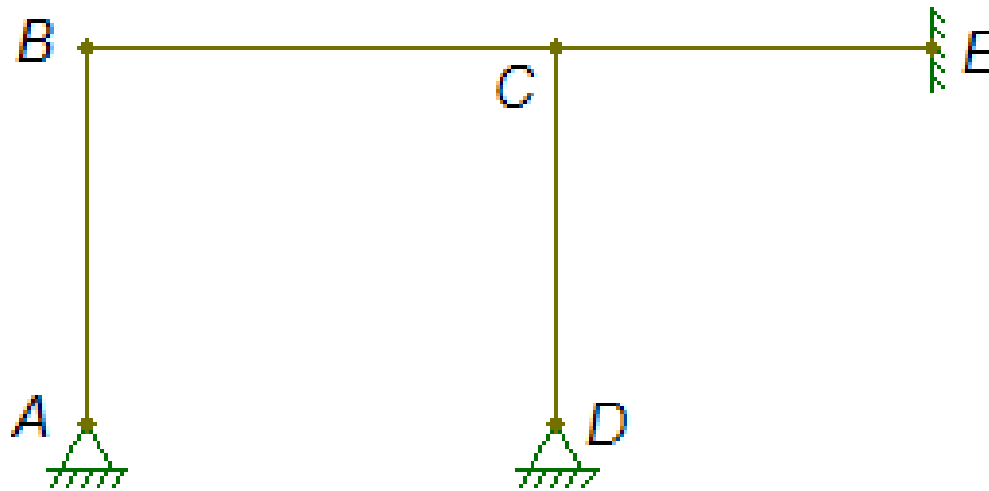
PÓRTICOS NO PROCESSO DE CROSS

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

O procedimento para a resolução de pórticos hiperestáticos com nós indeslocáveis é exatamente o mesmo apresentado para as vigas hiperestáticas. A única diferença é que alguns nós de pórticos podem apresentar mais do que duas barras concorrentes.

Dessa forma, em um mesmo nó pode haver mais do que dois coeficientes de distribuição. O pórtico hiperestático da Figura 4.20 é indeslocável, pois o engaste no nó E impede o deslocamento horizontal dos nós B e C.

Figura 4.20 | Pórtico hiperestático indeslocável



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Estruturas deslocáveis

Para resolver estruturas deslocáveis (estruturas com deslocamentos laterais dos seus nós) pelo Processo de Cross, aplicamos o Método dos Deslocamentos, considerando como deslocabilidade apenas o deslocamento lateral de seus nós. Utilizando a superposição de efeitos, o pórtico deslocável da Figura 4.21 pode ser obtido pela soma de dois casos básicos.

Assim, o diagrama de momentos fletores real da estrutura é dado por:

$$M = M_0 + M_1 \cdot D_1$$

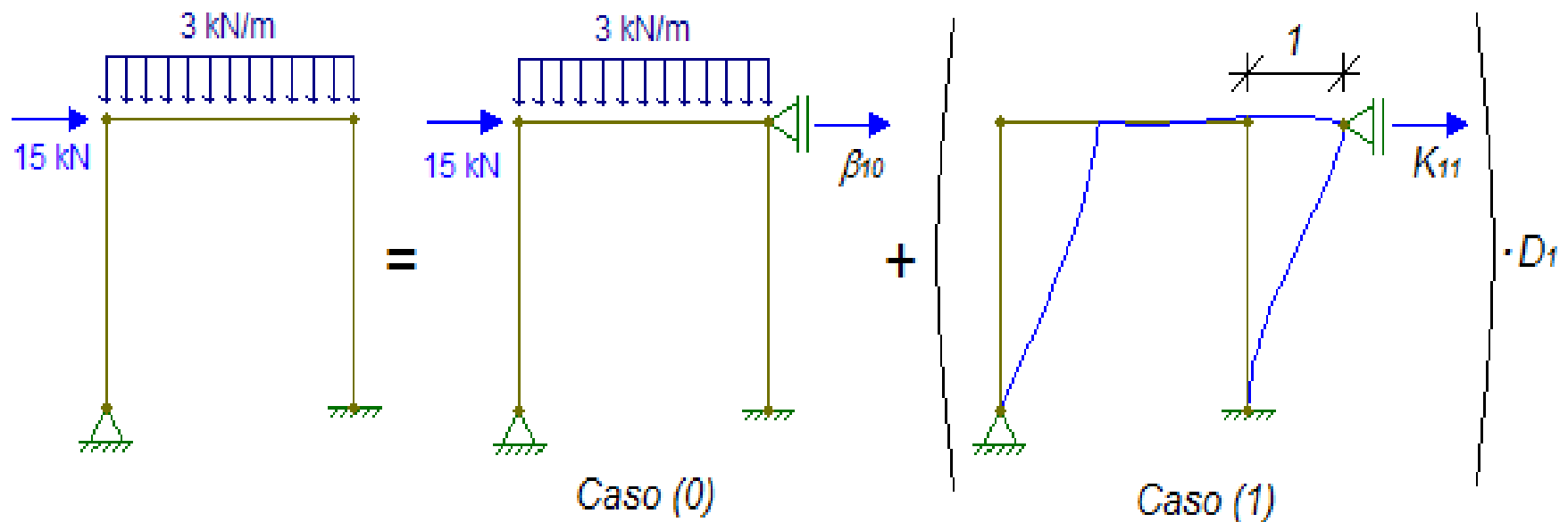


Figura 4.21 | Pórtico hiperestático deslocável

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Os diagramas de momentos fletores M_0 e M_1 são obtidos aplicando-se o Processo de Cross para os casos (0) e (1), respectivamente, da mesma maneira como já explicado anteriormente. Uma vez determinados esses diagramas de momentos fletores, também é possível encontrar as reações de apoio dos casos (0) e (1), fazendo-se o equilíbrio de cada barra de forma isolada, como já apresentado na Seção 2.3. Assim, encontram-se as reações de apoio b_{10} e K_{11} dos casos (0) e (1), respectivamente.

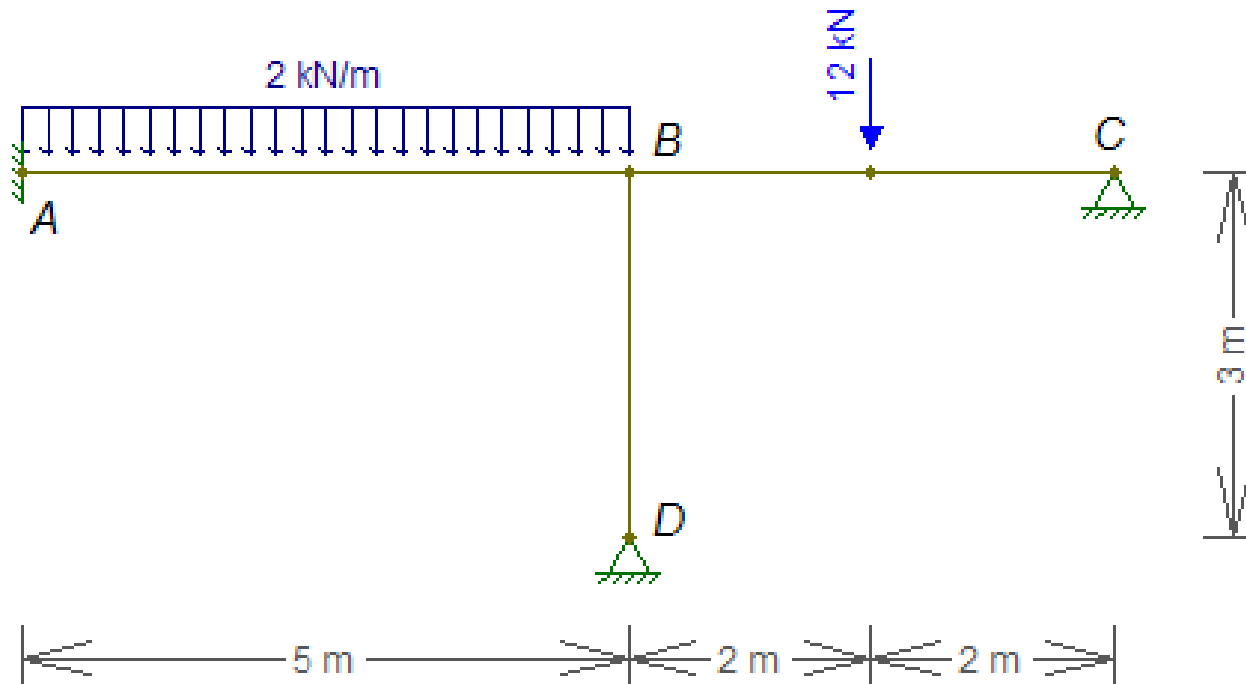
Para encontrar D_1 , basta aplicar o mesmo conceito usado no Método dos Deslocamentos: o nó que possui as deslocabilidades deve estar em equilíbrio. Assim, fazendo-se o equilíbrio das forças horizontais no nó com a deslocabilidade, temos a expressão a seguir, com a qual se encontra o valor de D_1 para determinar o diagrama de momentos fletores M da estrutura:

$$\beta_{10} + K_{11} \cdot D_1 = 0$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

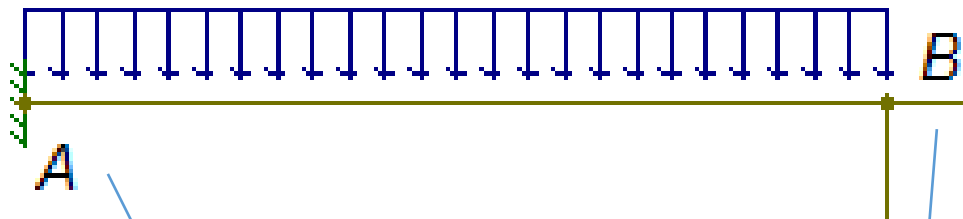
EXEMPLO

Um pórtico hiperestático de uma indústria está submetido ao carregamento indicado na figura a seguir. Todas as barras possuem $E \times I$ constante, determine os momentos engastamento e os coeficientes de distribuição do pórtico abaixo:



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

2 kN/m



Ver figura
4.15.

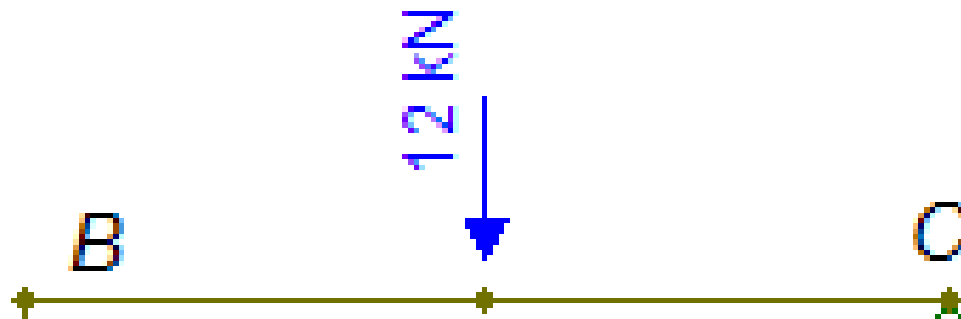
$$M_a = q \cdot L^2 / 12 = 2 \cdot (5)^2 / 12 = 4,17 \text{ KN.m}$$

$$M_b = - q \cdot L^2 / 12 = - 2 \cdot (5)^2 / 12 = - 4,17 \text{ KN.m}$$

$$K_{AB} = 4 EI / L = 4 EI / 5 = 0,8 EI$$

Extremidade da barra
é engastada

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



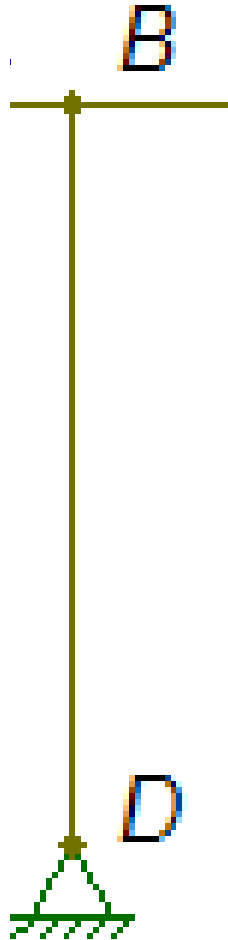
Ver figura
4.15.

$$M_b = + \frac{P \cdot a \cdot b}{2 \cdot L^2} \cdot (L + b) = (12 \cdot 2 \cdot 2 / 2 \cdot 16) \cdot (4 + 2) = 9 \text{ kN.m}$$

$$K_{BC} = 3 EI / L = 3 EI / 4 = 0,75 EI$$

Extremidade da barra
é engastada

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



$$K_{BC} = 3 EI / L = 3 EI / 3 = EI$$

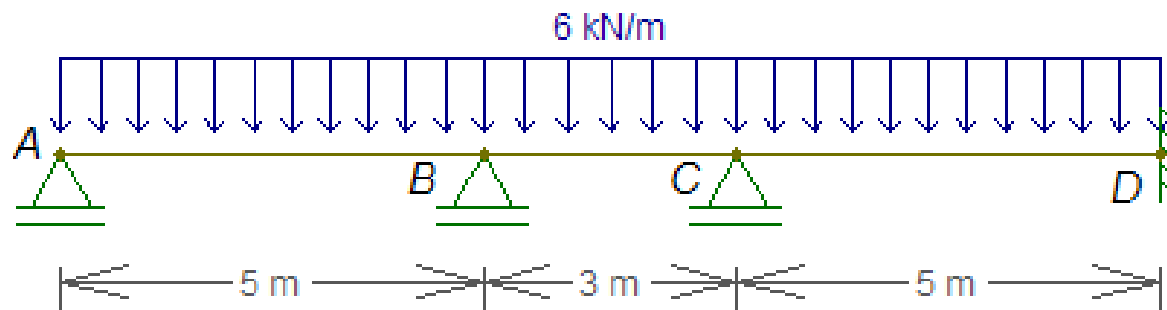


Extremidade da barra
é articulada

TRAÇADO DO DIAGRAMA DE FORÇA CORTANTE .

EXEMPLO

Traça o diagrama de força cortante para a viga da Figura 4.13.



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

O diagrama ilustra a análise de uma estrutura hiperestática com 3 apoios e 2 pilares. Os valores são apresentados em tabelas e diagramas de linha.

Diagrama de Linhas (Forças e Momentos):

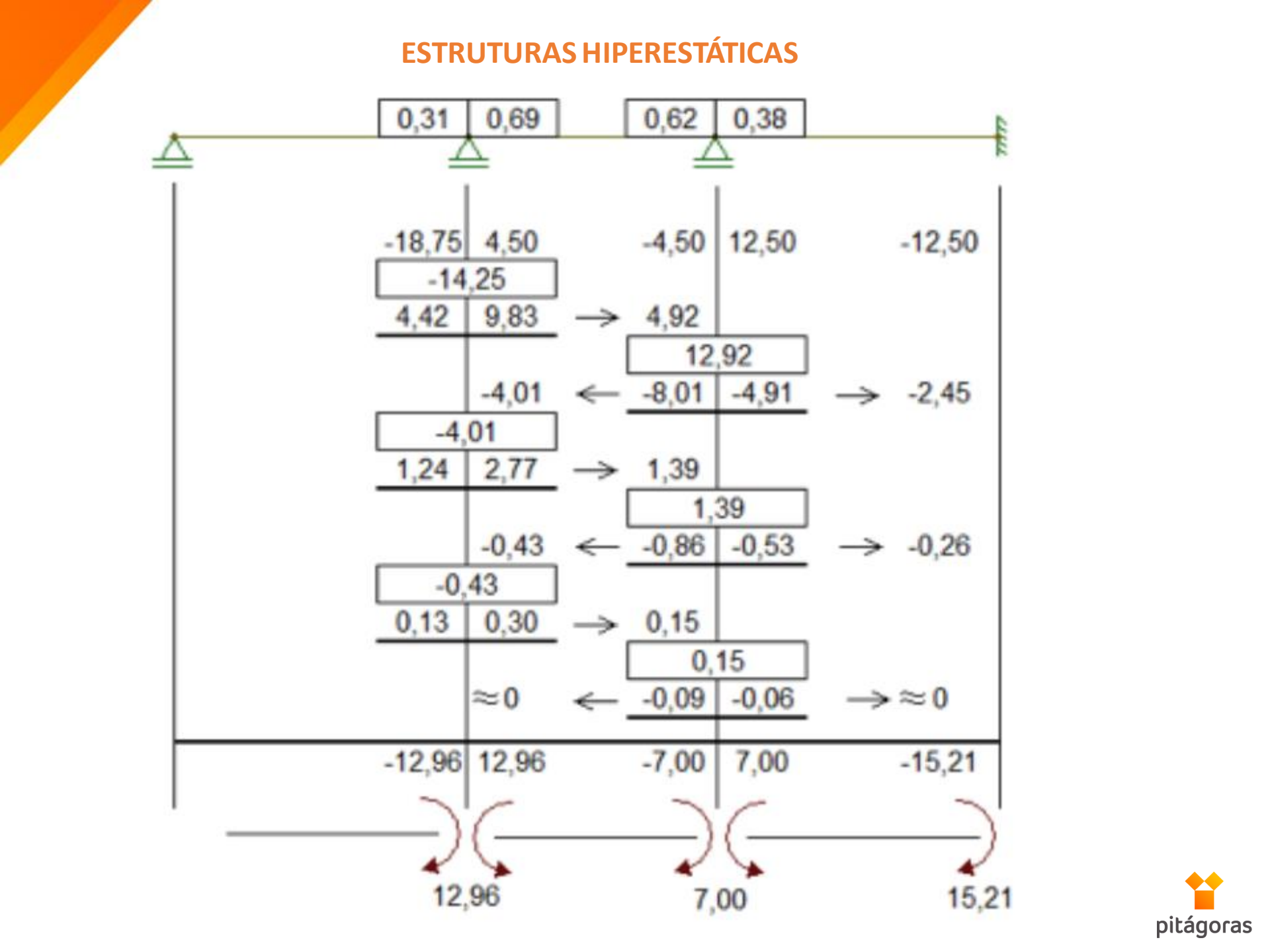
- Forças Verticais (kN):**
 - Forças de apoio: 0,31 e 0,69 no primeiro apoio; 0,62 e 0,38 no segundo apoio.
 - Forças de reação: -18,75 e 4,50 no primeiro pilar; -4,50 e 12,50 no segundo pilar; -12,50 no apoio final.
- Momentos (kNm):**
 - Momentos de reação: -14,25 e 4,42 no primeiro pilar; 4,92 e 12,92 no segundo pilar; -2,45 no apoio final.
 - Momentos de reação: -4,01 e 1,24 no primeiro pilar; 1,39 e 1,39 no segundo pilar; -0,26 no apoio final.
 - Momentos de reação: -0,43 e 0,13 no primeiro pilar; 0,15 e 0,15 no segundo pilar; ≈ 0 no apoio final.

Diagrama de Linhas (Deslocamentos):

- Deslocamentos (mm): -12,96 e 12,96 no primeiro pilar; -7,00 e 7,00 no segundo pilar; -15,21 no apoio final.

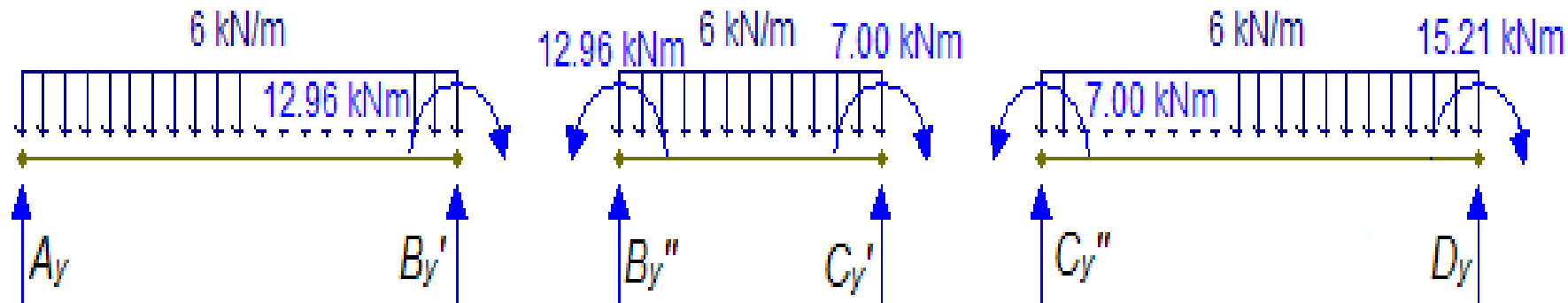
Diagrama de Linhas (Forças de Reação):

- Forças de reação: 12,96 e 7,00 no primeiro pilar; 7,00 e 15,21 no segundo pilar; 15,21 no apoio final.

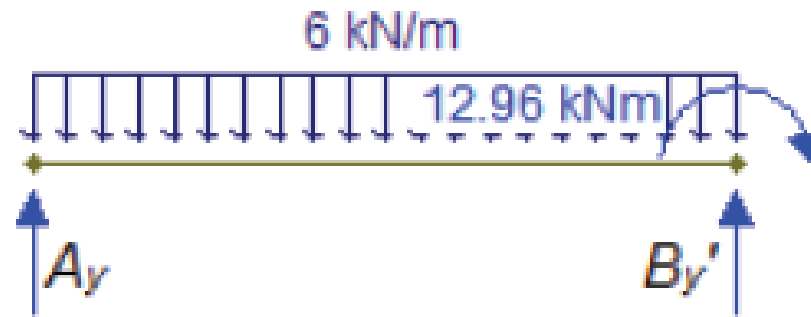


ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Momentos mostrados na estrutura de acordo com o equilíbrio dos nós:



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

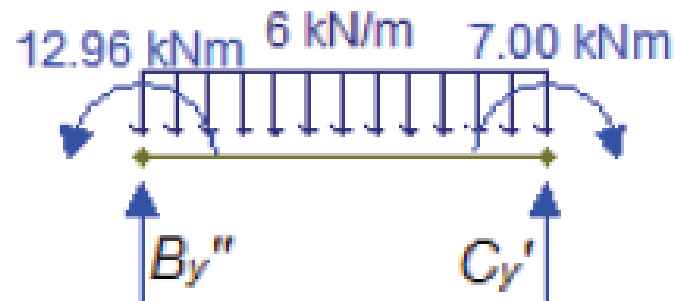


- Trecho AB

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -6 \cdot 5 \cdot 2,5 - 12,96 + B_y' \cdot 5 = 0 \Rightarrow B_y' = 17,59 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 6 \cdot 5 + 17,59 = 0 \Rightarrow A_y = 12,41 \text{ kN}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

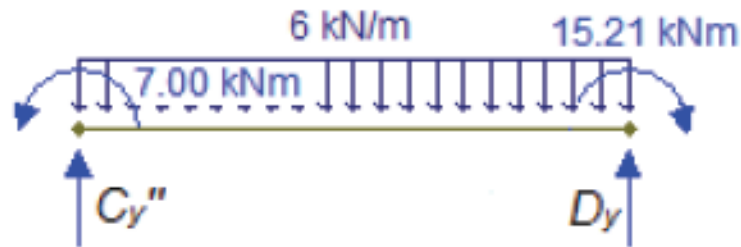


- Trecho BC

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 12,96 - 6 \cdot 3 \cdot 1,5 - 7 + C_y' \cdot 3 = 0 \Rightarrow C_y' = 7,01 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y'' - 6 \cdot 3 + 7,01 = 0 \Rightarrow B_y'' = 10,99 \text{ kN}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



- Trecho CD

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 7 - 6 \cdot 5 \cdot 2,5 - 15,21 + D_y \cdot 5 = 0 \Rightarrow D_y = 16,64 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y'' - 6 \cdot 5 + 16,64 = 0 \Rightarrow C_y'' = 13,36 \text{ kN}$$

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Reações verticais totais em **B** e **C**:

$$B_y = B_y' + B_y'' = 28,58 \text{ kN}$$

$$C_y = C_y' + C_y'' = 20,37 \text{ kN}$$

Uma vez encontradas as reações de apoio verticais, podemos traçar o diagrama de força cortante, conforme a Figura 4.26, obtido pelo Ftool, com os valores exatos. Assim, é possível determinar os pontos de cortante nula e encontrar os valores dos momentos fletores máximos.

Figura 4.26 | Diagrama de força cortante (kN) (valores exatos pelo Ftool)

