

UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO

KARINA DE OLIVEIRA CASTRO

GENERALIZAÇÃO ALGÉBRICA:
UMA ABORDAGEM PRAXEOLÓGICA

SÃO PAULO

2022

KARINA DE OLIVEIRA CASTRO

GENERALIZAÇÃO ALGÉBRICA:
UMA ABORDAGEM PRAXEOLÓGICA

Tese apresentada à banca examinadora da Universidade Anhanguera de São Paulo, como exigência final à obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Sales

SÃO PAULO

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C355g Castro, Karina de Oliveira
Generalização algébrica: uma abordagem
praxeológica / Karina de Oliveira Castro. – São Paulo,
2022.
287 fl.

Orientador: Antonio Sales.
Tese (Doutorado) – Anhanguera-UNIDEREPE,
Doutorado Educação Matemática, 2022.

1. Generalização. 2. Álgebra. 3. Praxeologia. I. Sales,
Antonio. II. Título.

CDU 512

Evelyn Moraes – CRB-8 10289

KARINA DE OLIVEIRA CASTRO

**GENERALIZAÇÃO ALGÉBRICA:
UMA ABORDAGEM PRAXEOLÓGICA**

Tese apresentada à banca examinadora da Universidade Anhanguera de São Paulo, como exigência final à obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Sales

Aprovada em 04 de outubro de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Sales (Orientador)
Universidade Anhanguera de São Paulo

Prof^a Dra. Helenara Regina Sampaio (Examinadora interna)
Universidade Anhanguera de São Paulo

Prof. Dr. Osmar Pedrochi Junior (Examinador interno)
Universidade Anhanguera de São Paulo

Prof^a Dra. Chang Kuo Rodrigues (Examinadora externa)
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Luiz Carlos Pais (Examinador externo)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Para meus alunos que me acompanham nesta trajetória.

Este trabalho é para todos vocês... desde 2002!

AGRADECIMENTOS

Ao professor doutor **Antonio Sales**, pela contribuição tamanha – *obrigada, professor, pela sensibilidade, cuidado nas contribuições e incentivo de sempre.*

Aos professores doutores **Helenara Regina Sampaio, Osmar Pedrochi Junior, Chang Kuo Rodrigues e Luiz Carlos Pais**, pelas valiosas sugestões e comentários, que só fizeram enobrecer o desenvolvimento desta pesquisa – *apoio sem preço.*

À professora doutora **Marlene Alves Dias**, pelas primeiras lapidações neste trabalho – *obrigada, professora, por acreditar no tema desde o princípio.*

Aos **meus alunos dos anos de 2018 a 2022, do 6º ao 9º ano da Escola Estadual Professor Clóvis Salgado**, pela incrível participação nas inúmeras tarefas que pedi a vocês – *jámais vou conseguir agradecer de verdade; em troca, espero melhorar a cada dia como professora e como pessoa... por vocês. Obrigada!*

À **Escola Estadual Professor Clóvis Salgado**, nas pessoas da direção, supervisão e colegas destes anos de 2018 a 2022, pelo imenso incentivo de todos os dias – *vocês terão minha gratidão eterna.*

Aos **professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNIAN**, pelo apoio e troca incessantes durante esses anos.

À **CAPES**, pelo apoio financeiro que viabilizou a realização deste trabalho.

À **espiritualidade amiga**, pelos momentos de inspiração e coragem.

A **você, leitor**, pelo voto de confiança – *espero não o decepcionar.*

Permitam-me, mais uma vez, agradecer aos **meus alunos dos anos de 2018 a 2022, do 6º ao 9º ano da Escola Estadual Professor Clóvis Salgado** – *vocês me mostram que só a educação é capaz de transformar este país! Obrigada!*

*Guerreiros são pessoas
São fortes, são frágeis
Guerreiros são meninos
No fundo do peito
Precisam de um descanso
Precisam de um remanso
Precisam de um sonho
Que os tornem refeitos*

(Guerreiro Menino, Fagner)

RESUMO

Este estudo está ancorado no universo da Didática da Matemática e insere-se no rol de trabalhos que se ocupam de investigar o campo da álgebra escolar. Diversas pesquisas apontam a importância e a urgência de estudos que envolvem conceitos algébricos na educação básica. Por meio da leitura desses trabalhos e levando em consideração aspectos de nossa própria concepção em educação matemática, realizamos esta pesquisa buscando responder à questão: quais são os conhecimentos mobilizados por alunos de 7º e 8º anos no ambiente prático e teórico ao lidarem com a generalização algébrica? Para tanto, o referencial teórico que conduz e sustenta as análises é a Teoria Antropológica do Didático – TAD de Yves Chevallard, mais especificamente as noções de instituição, praxeologia, objetos ostensivos e não ostensivos. Por meio da teoria, focamos nosso exame nos aspectos institucionais que envolvem o conhecimento algébrico, mais precisamente o objeto generalização. Dessa forma, o objetivo geral deste trabalho é: analisar o *corpus* prático e teórico mobilizado por alunos de 7º e 8º anos do Ensino Fundamental no contato com a generalização algébrica. Para atingir nosso intento, a metodologia escolhida é de caráter qualitativo, numa perspectiva de estudo de caso. Para isso, foi feita uma breve revisão literária, uma análise documental do Currículo Referência de Minas Gerais para Matemática do 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental e uma aplicação de tarefas a estudantes de 7º e 8º anos. A análise dos resultados mostra que a generalização é objeto que se comporta ora sustentando uma técnica, ora embasando um discurso teórico. Isso faz com que haja um movimento que une técnica e teoria na perspectiva praxeológica defendida pela TAD, o que nos leva a pensar em níveis que fazem com que discursos teóricos de hoje se tornem técnicas no futuro, num movimento ascendente. Ademais, a análise curricular por meio da escala de níveis de codeterminação mostrou que o professor, conhecendo o currículo de antemão, aplica os conteúdos numa perspectiva que chamamos “de cima para baixo”, enquanto o estudante parece enxergá-lo “de baixo para cima”. Isso faz com que este crie seu próprio ambiente teórico, resgatando, por conta própria, conteúdos pregressos por meio da generalização.

Palavras-chave: generalização; álgebra; praxeologia; ensino fundamental.

ABSTRACT

This study is based on the Didactics of Mathematics universe and it is included in the array of the papers that aim to investigate the school algebra field. Several researches have shown the importance and the urgency of the studies that involve algebraic concepts in elementary education. Through the reading of these papers and taking into consideration aspects of our own conception of education in mathematics, we have performed this research aiming to answer the following question: what kind of knowledge do 7th and 8th graders use in both practical and theoretical environment when dealing with algebraic generalization? In order to do so, the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) by Yves Chevallard is the theoretical reference that leads and supports the analyses, more specifically the notions of institution, praxeology, ostensive and non-ostensive objects. Through the theory, we have focused our analysis on the institutional aspects that involve the algebraic knowledge, more precisely the generalization object. Thus the general goal of this paper is: analyze the practical and theoretical *corpus* used by students from 7th and 8th grades of elementary school when in touch with algebraic generalization. In order to reach our goal, the chosen methodology is the qualitative one, at a case study perspective. So that it could be done, a brief literary review, a documentary analysis of the Reference Curriculum of Minas Gerais for mathematics from the 1st to the 9th grades of elementary and junior school and the assignment of tasks to 7th and 8th graders have been performed. The analysis of results have shown that the generalization is the object that behaves sometimes supporting a technique, sometimes basing a theoretical discourse. This causes a movement that unites technique and theory in the praxeological perspective defended by ATD, which leads us to think about levels that make today's theoretical discourses become techniques in the future, in an upward movement. Furthermore, the curricular analysis through the scale of co-determination levels has shown that the teacher, knowing the curriculum in advance, applies its contents in a so-called top-down perspective, while students seem to see it from a bottom-up perspective. This causes students to create their own theoretical environment and rescue, on their own, previous contents through generalization.

Key words: Generalization. Algebra, Praxeology. Elementary School.

RÉSUMÉ

Cette étude est ancrée dans l'univers de la Didactique de la Mathématique et fait partie de la liste des travaux qui traitent de l'investigation du domaine de l'algèbre scolaire. Plusieurs études soulignent l'importance et l'urgence des études impliquant des concepts algébriques dans l'éducation de base. En tenant compte des aspects de notre propre conception de l'enseignement des mathématiques, nous avons mené cette recherche pour répondre à la question suivante : quelles sont les connaissances mobilisées par les élèves du 7^{ème} et du 8^{ème} dans la pratique et dans la théorie face à la généralisation algébrique ? Par conséquent, le cadre théorique qui conduit et soutient les analyses est la Théorie Anthropologique de la Didactique – TAD, d' Yves Chevallard, plus précisément les notions d'institution, de praxéologie, d'objets ostensifs et non ostensifs. A travers la théorie, nous concentrons notre examen sur les aspects institutionnels qui impliquent les connaissances algébriques, plus précisément l'objet de généralisation. Ainsi, l'objectif général de ce travail est d'analyser le corpus pratique et théorique mobilisé par les élèves de 7^{ème} et 8^{ème} du primaire au contact de la généralisation algébrique. Pour atteindre notre objectif, la méthodologie choisie est de nature qualitative, dans une perspective d'étude de cas. Pour cela, une brève revue littéraire et une analyse documentaire du Curriculum Référence de Minas Gerais pour la Mathématique de la 1^{ère} à la 9^{ème} année de l'école élémentaire et une application de devoirs aux élèves des 7^{ème} et 8^{ème} années ont été faites. L'analyse des résultats montre que la généralisation est un objet qui se comporte soit comme support d'une technique, soit comme support d'un discours théorique. Cela conduit à un mouvement qui unit technique et théorie dans la perspective praxéologique de TAD, ce qui nous permet de penser à des niveaux qui font que les discours théoriques d'aujourd'hui deviennent des techniques dans le futur, dans un mouvement ascendant. De plus, l'analyse curriculaire à travers l'échelle des niveaux de co-détermination a montré que l'enseignant, connaissant à l'avance le programme, applique le contenu dans une perspective qui vient de l'extérieur de l'école à la salle de classe, tandis que l'élève semble le voir dans le mouvement contraire. Cela lui fait créer son propre espace théorique, sauvant, par lui-même, les contenus antérieurs par la généralisation.

Mots clés: generalisation; algebre; praxeologie; école primaire.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – O universo ancorado pela TAD	56
Figura 2 – Níveis de codeterminação didática: visão geral	106
Figura 3 – Níveis de codeterminação didática: componentes básicos e adicionais	107
Figura 4 – Níveis de codeterminação didática: atribuições gerais.....	110
Figura 5 – Níveis de codeterminação e modelo praxeológico	112
Figura 6 – Visão geral da análise da relação institucional no capítulo.	142
Figura 7 – Visão geral da análise da relação institucional na seção	143
Figura 8 – Competências gerais da educação básica.....	146
Figura 9 – Difusão do conhecimento de acordo com a escala de codeterminação didática.....	148
Figura 10 – Da BNCC aos objetos matemáticos	152
Figura 11 – Da BNCC à sala de aula segundo o CRMG.....	153
Figura 12 – Microanálise ecológica do CRMG por meio dos níveis de codeterminação	155
Figura 13 – A generalidade dos textos institucionais	169
Figura 14 – Recorte de como serão apresentadas as análises ano a ano.....	171
Figura 15 – Unidades temáticas por bimestre nas séries iniciais	178
Figura 16 – A árvore das praxeologias.....	184
Figura 17 – Unidades temáticas por bimestre nas séries finais	198
Figura 18 – Tarefa 1 aplicada.....	250
Figura 19 – Tarefa 1: protocolo de uma estudante.....	251
Figura 20 – Esquema ostensivo x não ostensivo	254
Figura 21 – Esquema praxeológico: tarefa 1.....	256
Figura 22 – Discurso de generalização no esquema praxeológico	262
Figura 23 – Tarefa 2 aplicada.....	263
Figura 24 – Tarefa 2: protocolo de uma estudante (a)	264
Figura 25 – Tarefa 2: protocolo de uma estudante (b)	265
Figura 26 – Tarefa 3: protocolo de uma estudante.....	267
Figura 27 – Perspectiva escalar na generalização.....	273

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Elementos da TAD – Símbolos	711
Quadro 2 – Exemplo de momentos didáticos.....	101
Quadro 3 – Objetos ostensivos e não ostensivos nos objetivos gerais do CRMG para a unidade temática álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental	161
Quadro 4 – Domínio e setor para o ensino da álgebra de acordo com o CRMG	162
Quadro 5 – Organizador curricular para álgebra no 1º ano do EF.	173
Quadro 6 – Organizador curricular para álgebra no 2º ano do EF.	174
Quadro 7 – Organizador curricular para álgebra no 3º ano do EF.	175
Quadro 8 – Organizador curricular para álgebra no 4º ano do EF.	176
Quadro 9 – Organizador curricular para álgebra no 5º ano do EF.	177
Quadro 10 – Comparação entre as temáticas curriculares em Minas Gerais	179
Quadro 11 – Abordagem da álgebra por bimestre e ano de escolaridade nas séries iniciais	180
Quadro 12 – Setores para o domínio álgebra nas séries iniciais	181
Quadro 13 – Tópicos para o domínio álgebra nas séries iniciais	187
Quadro 14 – Praxeologias progressivas e paralelas para o domínio da álgebra nas séries iniciais.....	189
Quadro 15 – Organizador curricular para álgebra no 6º ano do EF.	192
Quadro 16 – Organizador curricular para álgebra no 7º ano do EF (Continua).....	193
Quadro 17 – Continuação do Organizador curricular para álgebra no 7º ano do EF	194
Quadro 18 – Organizador curricular para álgebra no 8º ano do EF (Continua).....	195
Quadro 19 – Continuação do Organizador curricular para álgebra no 8º ano do EF	196
Quadro 20 – Organizador curricular para álgebra no 9º ano do EF.	197
Quadro 21 – Abordagem da álgebra por bimestre e ano de escolaridade nas séries finais.....	199
Quadro 22 – Setores para o domínio álgebra nas séries iniciais e finais.	199
Quadro 23 – Tópicos para o domínio álgebra nas séries finais (Continua).....	203
Quadro 24 – Continuação dos tópicos para o domínio álgebra nas séries finais	204

Quadro 25 - Praxeologias progressivas e paralelas para o domínio da álgebra nas séries finais	206
Quadro 26 – Setores e tipos de linguagem algébrica.....	207
Quadro 27 – Praxeologia exclusiva das séries iniciais.....	210
Quadro 28 – Praxeologia em conjunto nas séries iniciais e finais (Continua)	213
Quadro 29 – Praxeologia em conjunto nas séries iniciais e finais (Continua)	214
Quadro 30 – Continuação da Praxeologia em conjunto nas séries iniciais e finais.	215
Quadro 31 – Praxeologia exclusiva das séries finais	216
Quadro 32 – Dimensões da álgebra e setores previstos no domínio algébrico	222
Quadro 33 – Praxeologia longitudinal das séries iniciais e finais	225
Quadro 34 – Tópicos para a análise praxeológica	228
Quadro 35 – Análise praxeológica: tópico do 1º ano.....	229
Quadro 36 – Análise praxeológica: tópico do 3º ano.....	231
Quadro 37 – Análise praxeológica: tópico do 5º ano.....	232
Quadro 38 – Análise praxeológica: tópico do 7º ano.....	234
Quadro 39 – Análise praxeológica: tópico do 8º ano.....	234
Quadro 40 – Análise praxeológica: tópico do 9º ano.....	236

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CBC	Currículo Básico Comum
CNE	Conselho Nacional de Educação
CRMG	Currículo Referência de Minas Gerais
EF	Ensino Fundamental
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics Conselho Nacional de Professores de Matemática
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNE	Plano Nacional de Educação
PPP	Projeto Político-Pedagógico
SEE/MG	Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TTD	Teoria da Transposição Didática
UNDIME/MG	União Nacional dos Dirigentes de Educação de Minas Gerais

SUMÁRIO

PARTE I – Apresentação da pesquisa	17
1. INTRODUÇÃO: PANORAMA GERAL DO ESTUDO	17
1.1. Problemática e hipóteses: primeiras aproximações	22
1.2. A Didática da Matemática	30
1.3. Questão de pesquisa e objetivos	34
1.4. Síntese e considerações finais do capítulo	37
2. METODOLOGIA	38
2.1. Síntese e considerações finais do capítulo	48
PARTE II – O quadro teórico e o objeto da investigação	50
3. QUADRO TEÓRICO	50
3.1. A Teoria Antropológica do Didático – TAD	50
3.1.1 <i>Os elementos fundamentais da TAD</i>	56
3.1.2 <i>A relatividade institucional do conhecimento</i>	72
3.1.3 <i>O modelo praxeológico na TAD</i>	79
3.1.4 <i>Os momentos didáticos</i>	90
3.1.5 <i>Níveis de codeterminação</i>	104
3.1.6 <i>Noção de objetos ostensivos e não ostensivos</i>	113
3.1.7 <i>Noção de topos</i>	116
3.2. Retomando questionamentos à luz da teoria	119
3.3. Síntese e considerações finais do capítulo	120
4. ÁLGEBRA E GENERALIZAÇÃO – ASPECTOS INSTITUCIONAIS	123
4.1. Panorama geral dos estudos envolvendo álgebra e generalização	123
4.2. Síntese e considerações finais do capítulo	131
PARTE III – A investigação	133
5. ANÁLISE DA RELAÇÃO INSTITUCIONAL EM ÁLGEBRA	133

5.1. Considerações iniciais	133
5.2. Considerações sobre as relações institucionais esperadas e existentes.....	139
5.2.1 <i>Análise ecológica do Currículo Referência de Matemática para Minas Gerais</i>	142
5.2.2 <i>Análise praxeológica do Currículo Referência de Matemática para Minas Gerais</i>	220
5.3. Síntese e considerações finais do capítulo	237
6. ANÁLISE DA RELAÇÃO PESSOAL	244
6.1. Os sujeitos e o contexto da experimentação	245
6.2. Análise praxeológica das tarefas aplicadas	246
6.2.1 <i>Tarefa 1</i>	249
6.2.2 <i>Tarefa 2</i>	263
6.2.3 <i>Tarefa 3</i>	266
6.3. Síntese e considerações finais do capítulo	271
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS E FUTURAS.....	274
REFERÊNCIAS.....	280

PARTE I – Apresentação da pesquisa

1. INTRODUÇÃO: PANORAMA GERAL DO ESTUDO¹

Mas repare o leitor nisso, que é importante –
na necessidade que temos de caminhar,
tacteando, entre o que a intuição nos *dá* a
partir da Realidade e o que a razão *nos*
permite com os instrumentos que forja.
(Bento de Jesus Caraça)

Apesar de a proposta deste trabalho juntar-se a tantos outros cuja pretensão é contribuir com o que vem sendo produzido na Educação Matemática, não escondemos a satisfação pessoal ao desenvolver uma pesquisa a respeito do que, de fato, nos incomoda há tanto tempo no fazer docente. Este é um estudo feito, em primeiro lugar, por uma professora. Uma professora de escola pública que já atuou em todos os níveis da Educação Básica. Uma professora que buscou robustecer seu discurso empírico para que ganhasse contornos de discurso científico e assim poder comunicar, a todos quantos chegarem a esse texto, seus achados mais genuínos. Gosto de dizer que esse estudo se iniciou, na verdade, há vinte anos, quando pisamos pela primeira vez numa sala de aula. Quantas observações, quantas anotações e, acima de tudo, quantas perguntas nos fizemos durante todo esse tempo. Livros, artigos e textos garimpados em bibliotecas, reuniões, *sites*, revistas, tudo isso foi muito importante para que pudéssemos, hoje, já de posse de alguma segurança acadêmica, formular questões, hipóteses e objetivos a respeito do que nos interessa. Nos próximos parágrafos, apresentamos, em primeira pessoa do singular, um pequeno relato de como se deu essa busca.

¹Neste capítulo, a autora faz suas considerações por meio de uma linguagem mais fluida, em uma perspectiva dialógica com o leitor.

É conveniente, e talvez necessário, frisar que parti de um primeiro degrau, e que este era, no início, nada mais do que uma ideia! E uma ideia é, antes de tudo, uma aposta. Uma aposta e uma realidade que existe somente para aquele que a detém. Pisei neste degrau há alguns anos, como disse. Mas foi preciso dar validade àquilo que um dia não passou de uma conjectura para mim. Para isso, vali-me dos instrumentos convencionais e institucionalizados na tentativa de moldar aquilo que eu tomava como realidade. Não foi e não é uma tarefa simples! E esse é o desafio que se desenrola daqui em diante e que apresento a você, leitor. A meu ver, a ideia deste trabalho é muito simples e encontra com facilidade em mim seus argumentos e conjecturas, porque é baseada em anos de prática! Adaptar esta ideia aos moldes acadêmicos e conferir um *status* de conhecimento às ideias mais primitivas que tive tornou-se um grande desafio. Mas, ao mesmo tempo, é muito gratificante acreditar que anos de trabalho e observação de uma professora da Educação Básica tem validade no mundo acadêmico! Essa é a minha aposta: aquilo que foi antes de tudo uma ideia será aqui revestida dos aparatos necessários e suficientes para se defender que esses apontamentos serão capazes de levar um pouco mais de compreensão ao universo didático e escolar, realidade à qual pertenço e que, de alguma forma, estou ajudando a construir!

Portanto, nas palavras de Caraça (2010) que abriram este capítulo, a intuição me permitiu formular as hipóteses deste estudo, e a razão, por meio dos instrumentos metodológicos e científicos que forjou através dos tempos, trouxe o problema que será investigado aqui. Para caminhar entre a intuição e a razão, formulei os objetivos que, a meu ver, deram conta de delimitar bem essa estrada por onde andei.

Meus passos se iniciam, conforme disse, pela observação e pela prática na sala de aula. Como professora de matemática e amante da pesquisa, toda aula é para mim um laboratório. Observar as reações dos alunos, suas perguntas e respostas sempre foi minha rotina. Creio que é conveniente destacar o momento da minha prática que considero primordial para que este trabalho fosse concebido. É nesse recorte da minha realidade que está a intuição responsável pelos inúmeros questionamentos que me trouxeram até aqui. Um instante que considero muito rico e

importante para que hoje pudesse chegar à hipótese desta investigação que ora lhes apresento.

Corria o ano de 2012. Eu havia defendido minha dissertação de mestrado logo nos primeiros meses. Foi em março a defesa e, logo a seguir, voltei para a minha rotina na sala de aula, imbuída de muitas ideias e questionamentos. A intenção era partir logo para o doutorado, mas sentia que ainda me faltavam certos aparatos de pesquisa. Ainda não tinha certeza sobre o que investigar. Na verdade, eu sabia – e queria – que minha pesquisa adviesse de uma angústia original, cuja fonte fosse, de fato, minha rotina. Então não havia dúvidas, eu estava certa de que minha prática iria me levar ao rumo certo.

Nesse dia, eu estava numa turma de nono ano. O conteúdo era sobre porcentagem. Resolvi fazer uma experiência. Disse para mim mesma: “Vou ensinar de uma maneira totalmente tradicional e mecânica para ver o que acontece”. Meu objetivo era observar como os alunos iriam abstrair a ideia de porcentagem.

Assim, comecei apresentando à turma várias porcentagens para que eles transformassem em fração. E disse a eles de forma bem objetiva: “Basta copiar esse número e colocá-lo sobre cem. Assim: 30% é 30 sobre 100; 80% é 80 sobre 100, e assim por diante”. Estávamos no primeiro horário. Todos os estudantes faziam a tarefa tranquilamente. E a aula chegava ao fim sem nenhum acontecimento relevante. Nada que eu pudesse anotar. Nenhum comentário, nenhuma pergunta. Nada.

Fiquei muito frustrada, até que chegou o momento em que eu dava vistos nos cadernos. Olhando a tarefa de uma aluna, nos últimos minutos daquela aula, algo muito interessante me saltou aos olhos. Ela havia feito tudo corretamente, porém, no 25%, ela escreveu 25 sobre 150! Se eu estivesse no início da minha carreira, iria dizer logo para ela que estava errado e que ela deveria apagar e corrigir. Mas para uma professora pesquisadora, esse é um momento fértil e mágico!

Então pedi a ela para olhar e ler a resposta para mim, pois imaginei que ela poderia ter escrito 150 por falta de atenção. E assim nasceu o diálogo que ainda me lembro como se fosse ontem. Eu perguntei: “O que está escrito aqui, A.?” “25 sobre 150, professora.” “Mas é 150?” E ela responde muito segura de si: “Sim, é 150.” “Por que, A.?”, eu pergunto muito curiosa, e a aluna me mostra o caderno apontando com

o lápis: “Porque aqui em cima é 25. Todos os outros terminam em zero. Esse termina em 5, então é 150!” Numa fração de segundo, eu olho para o quadro e percebo duas coisas. Primeiro, realmente eu havia colocado só o 25%, número terminado em 5. Todos os outros que eu pedia terminavam em zero: 30%, 70%, 90%. E a segunda observação: essa aluna, A., havia chegado atrasada na aula, portanto não ouviu minhas instruções. Ela começou a tarefa olhando para o quadro e fazendo de acordo com suas observações, ou seja, de acordo com os exemplos que ela viu no quadro!

Apesar da riqueza desse momento em minhas primeiras buscas, cabe esclarecer que, anos mais tarde, tive contato com as ideias do polivalente filósofo e matemático americano Charles Peirce (1839-1914). Vamos abrir um parêntese necessário. Naquele instante, chamou-me a atenção o raciocínio e a conclusão da aluna, o que, para mim, tratava-se de uma generalização. Porém, de acordo com os estudos de Peirce (1983), o que a aluna fez foi uma abdução. O autor, ao discutir as diferentes espécies de raciocínio, explica que, ao produzir ideias novas, estamos lidando com o raciocínio abdutivo. Ele esclarece que, em termos de raciocínio, há três tipos: a dedução, indução e a abdução. Vale apontar essa diferença nas palavras do próprio autor:

Abdução é o processo para formar hipóteses explicativas. É a única operação lógica a introduzir ideias novas; pois a indução não faz mais que determinar um valor, e a dedução envolve apenas as consequências necessárias de pura hipótese. Dedução prova algo que *deve ser*. Indução mostra que algo *atualmente* é operatório. Abdução faz uma mera sugestão de que algo *pode ser* (PEIRCE, 1983, p. 46, *grifo do autor*).

Àquela época, faltavam-me esses argumentos teóricos, contudo o raciocínio da aluna me foi muito provocativo e, na verdade, deu origem a diversas indagações minhas. Eu já havia observado esse comportamento nos alunos. Sentia que havia uma tendência nas turmas de se basear muito nas observações visuais e tirar suas próprias conclusões. A partir desse dia, eu intensifiquei minhas investigações a esse respeito. Em outra ocasião, numa aula sobre o sinal da função de 1º grau numa turma de Ensino Médio, mesmo após uma extensa explicação, no final da aula, um dos alunos me procurou, mostrou o desenho dos gráficos no quadro e me perguntou:

“Então, professora, se essa reta estiver indo para a direita, o sinal aqui é $>$ (ele me mostrou o sinal). Se estiver indo para a esquerda, é o contrário”. O que eu julgo interessante é que em nenhum momento eu propus uma generalização que levasse em conta esses fatos que ele apontou.

Esse é, resumidamente, o recorte da minha realidade onde estão as primeiras intuições que deram origem a este trabalho. Agora já tinha certeza de que queria investigar sobre o que eu chamava de generalização apressada por parte dos alunos, pela tendência em se basear muito por aquilo que está escrito, preferencialmente no quadro, e não naquilo que é falado pela professora. Essa foi minha intuição. De 2012 até 2018, ano em que ingressei no Doutorado em Educação Matemática, busquei refinar minhas leituras e aproximações teóricas, pois não tinha mais dúvidas a respeito do tema que escolheria.

Creio que fez bem ao leitor conhecer o contexto desta investigação. Gosto de encarar toda produção de conhecimento como o resultado daquilo que um dia não passou de uma ideia, de um pensamento. Somos seres imersos na própria cultura, na própria realidade. E é a partir da observação desta realidade que vamos, pouco a pouco, refinando a intuição e transformando-a em conhecimento digno de ser compartilhado.

Já lhes apresentei a gênese das minhas ideias. Meu esforço de agora em diante, neste texto, é conduzir o meu discurso de forma a produzir bons e fortes argumentos, metodologicamente fundamentados. Mas antes é preciso questionar com um pouco mais de fundamento. As próximas seções pretendem cumprir esse objetivo.

Para fins de introdução, cabe esclarecer que este primeiro capítulo busca apresentar os contornos gerais do estudo: problemática, hipóteses, questão e objetivos da pesquisa. No capítulo 2, situamos a investigação no campo metodológico. O quadro teórico pode ser conferido no capítulo 3. A seguir, no capítulo 4, apresentamos um breve panorama dos estudos que envolvem o campo algébrico. As análises podem ser conferidas nos capítulos 5 e 6, respectivamente: análise institucional e análise das tarefas dos estudantes. Finalmente, apresentamos as conclusões gerais no capítulo 7.

1.1. Problemática e hipóteses: primeiras aproximações

É chegado o momento de adaptar essas observações aos instrumentos científicos que a razão deu conta de forjar – como foi dito anteriormente. O filósofo francês Gaston Bachelard (1884-1962) já enfatizava que a ciência é o oposto da opinião. Que esta é o primeiro obstáculo a ser superado. E, ainda mais, que “o espírito científico proíbe que tenhamos uma opinião sobre questões que não compreendemos, sobre questões que não sabemos formular com clareza” (BACHELARD, 1996, p. 18). Nesse momento, é muito conveniente, após o relato contextualizado que foi feito acima, transcrever um trecho da sua obra *A formação do espírito científico*.

E, digam o que disserem, na vida científica os problemas não se formulam de modo espontâneo. É justamente esse **sentido do problema** que caracteriza o verdadeiro espírito científico. Para o espírito científico, todo conhecimento é resposta a uma pergunta. Se não há pergunta, não pode haver conhecimento científico. Nada é evidente. Nada é gratuito. Tudo é construído (BACHELARD, 1996, p. 18, grifo do autor).

Formular uma questão a respeito do objeto a ser investigado não foi simples. Delimitar com clareza um recorte bem preciso na realidade que estava na nossa frente foi tarefa árdua. Explicando: o fazer pedagógico é complexo, rodeado de microuniversos individuais. Cada aluno é uma fonte limpa e pronta a ser analisada. O tema que nos chamava a atenção era muito claro para mim, pesquisadora: queria investigar a respeito da generalização dos alunos. E isso nos bastava. Malgrado nosso esforço, não é assim que o aparato científico da razão funciona. Bachelard nos alerta no excerto acima: sem pergunta, não há ciência. E ela é o ponto de partida. Maria Cecília Minayo, em seu livro *Pesquisa Social: teoria, método e criatividade*, discorre sobre a importância da delimitação do problema na pesquisa. Vejamos:

A definição do problema ou objeto de pesquisa às vezes é tarefa difícil, mas também a razão da existência de um projeto. A construção de um objeto de estudo científico constitui um verdadeiro exercício contra a ideia de que as

coisas estão dadas na realidade e que basta apenas estar atento ao que acontece no cotidiano (MINAYO, 2018, p. 36).

Notemos que a autora é muito precisa em seu arrazoado. Estar atento à performance do cotidiano – ainda que importante – não é o bastante no funil da ciência. Contextualizando, mais uma vez, de fato o que chamou a atenção na nossa realidade foi o tema generalização – cunhado aqui de forma bem ampla. Mas era preciso se aproximar desse horizonte. E essa aproximação se deu já no cumprimento dos créditos do programa de Doutorado. Por meio de leituras e da devida criticidade, fomos nos embrenhando no assunto e localizamos o que acreditamos ser a fonte adequada para as discussões que virão a seguir. O professor Pedro Demo, na obra *Introdução à Metodologia da Ciência*, mostra que, durante a condução de um trabalho científico, é normal que o pesquisador se veja perplexo, sem saber por onde começar. Mas que o primeiro passo para superar essa perplexidade é ler sobre o tema. Observemos a seguir nas palavras do autor citado:

Em primeiro lugar, vamos à biblioteca ler sobre o tema. Não é bom expediente adiantar, de mão beijada, literatura específica, e muito menos certas páginas, cuja leitura dá uma resposta à questão procurada. **Pesquisador é aquele que descobre por si, que inventa sua saída** (DEMO, 1985, p. 50, grifo nosso).

Nos capítulos 4 e 5, o leitor vai encontrar as devidas análises dos estudos que separamos para inventarmos a nossa saída, para sustentar nossos argumentos. Por ora, creio que já citar alguns desses textos será benéfico para despertar algum interesse em nosso trabalho e mostrar de que forma fizemos a definição do problema e da questão que deram origem a essa investigação. O tema generalização – tratado aqui ainda de forma bem ampla e genérica, à maneira de nossas primeiras concepções – insere-se no campo da álgebra. Portanto, direcionei minhas buscas aos estudos nesta área.

No início, buscamos esses trabalhos numa perspectiva extensa, ou seja, não me preocupei com o ano escolar, com o subtema envolvido na álgebra nem mesmo com o funil teórico. O intento foi nos aproximar do assunto, mais especificamente do

que vinha sendo discutido em álgebra, com possíveis aproximações relativas à generalização.

Na obra *As ideias da álgebra*, um compilado de 33 artigos publicado pela entidade americana *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) em 1988, encontramos excelentes trabalhos (COXFORD; SHULTE, 1995). Já no primeiro estudo, House (1995) mostra que a álgebra sempre teve papel de destaque no currículo e que as atuais reformas (lembrando que esse livro foi publicado originalmente em 1988) não dizem muito sobre a matemática propriamente dita, mas sim sobre as mudanças culturais no mundo que nos rodeia.

Já nessa época, o autor fazia sua defesa pela inserção da tecnologia da computação no currículo, de modo que a ênfase recairia sobre os processos heurísticos em oposição aos analíticos, como simplificar expressões algébricas, por exemplo. O conhecimento de técnicas é importante, segundo o autor, mas “a necessidade maior dos alunos é uma **compreensão sólida dos conceitos algébricos e a capacidade de usar o conhecimento em situações novas e às vezes inesperadas**” (HOUSE, 1995, p. 3, grifo nosso). Fica fácil notar que as ideias do autor revelam, há trinta anos, uma preocupação com a forma como é tratada a álgebra no ensino, e já há um apelo pela inclusão do uso dos computadores como recurso pedagógico. Também despertou minha atenção o fato de o estudo mencionar as reformas no currículo e como essa circunstância está ligada às mudanças do mundo que nos cerca. Vejamos outra abordagem no mesmo livro.

O estudo do professor Zalman Usiskin, na mesma obra, também precisa ser citado logo de início. No seu texto, vemos que é um desafio definir álgebra: ela é uma quando ensinada na escola média, e outra quando ensinada em cursos superiores de matemática. Então o autor delimita uma definição a ser considerada em seu artigo – a compreensão do significado das “letras” (aspas do autor). Sua proposta é definir o que é a álgebra da escola média. Sua tese, muito pertinente, é a de que usamos a álgebra de acordo com a concepção que temos dela. São quatro, na sua visão: álgebra como aritmética generalizada, álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos problemas, álgebra como estudo de relações entre grandezas ou

álgebra como estudo das estruturas. Usiskin (1995) também defende que o processo de manipulação técnica deve ficar a cargo dos computadores. E finaliza:

A álgebra continua sendo um veículo para a resolução de certos problemas, mas também é mais do que isso. Ela fornece meios para se desenvolverem e se analisarem relações. E é a chave para a caracterização e a compreensão das estruturas matemáticas. Dados esses trunfos e a matematização crescente da sociedade, não é de surpreender que a álgebra seja hoje a área-chave de estudo da matemática da escola secundária e que essa posição de destaque provavelmente perdure por muito tempo (USISKIN, 1995, p. 21).

Nesse estudo, nota-se que a álgebra é um campo vasto, que carece até mesmo de definições precisas, já que pode ser encarada sob vários aspectos, como apontou o autor. Ela generaliza a aritmética, fornece uma linguagem precisa que é capaz não só de resolver determinados problemas como, até mesmo, de desenvolver a própria matemática. O autor observa também a posição de destaque ocupada pela álgebra e seu papel na matematização da sociedade. Portanto esse artigo, juntamente com o anterior que destacamos, já nos mostram o poder da álgebra e a importância de tratá-la adequadamente nos processos de ensino. Mas há ainda outro trabalho que gostaríamos de incluir nestas primeiras impressões gerais.

O estudo dos pesquisadores brasileiros Antônio Miguel, Dario Fiorentini e Maria Ângela Miorim, publicado em 1992, chama a atenção por revelar, já nessa época, o que eles chamam de um descaso pela álgebra por parte dos pesquisadores brasileiros em educação matemática. Entre 1972 e 1990, nenhuma tese ou dissertação, dentre as mais de 150 produzidas, tiveram como tema o ensino da álgebra elementar (MIGUEL; FIORENTINI MIORIM, 1992). Vale lembrar que os dois estudos acima foram publicados em 1988, nos Estados Unidos.

Câmara dos Santos (2015) mostra que é a partir dos anos 1990 que há maior interesse dos pesquisadores no modo como os alunos se apropriam dos conceitos e procedimentos algébricos. O autor também destaca que o número de artigos sobre educação algébrica aumentou significativamente nos últimos vinte anos e cita dados do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM): em 2013 foram apresentados vinte e três estudos sobre investigação em álgebra em comparação aos

cinco publicados no ENEM de 2001. Destacamos esse estudo neste momento para realçar que ele nos foi muito útil nessa fase das primeiras leituras, já que apresenta as principais linhas de pesquisa em educação algébrica. Segundo o autor, são quatro: construção de significado em álgebra; uso das TIC no ensino de álgebra; álgebra e formação de professores e representações algébricas. Portanto, o interesse pelos estudos em ensino da álgebra no Brasil têm sido mais frequentes nos últimos dez anos especificamente, levando em conta os dados do ENEM citados no trabalho.

Citamos esses quatro estudos numa tentativa de demarcação do nosso território de pesquisa mais amplo e chamamos a atenção do leitor para os seguintes aspectos: primeiro, a relevância dos trabalhos em relação à álgebra; segundo, a diversidade dos temas que são abordados nessa temática; e, terceiro, a oportunidade que temos ao contribuir com mais um recorte nesse universo de pesquisa ao discutirmos o tema generalização. Os estudos que interessam ao nosso foco serão discutidos no capítulo 4. Por ora, fica delimitado o terreno onde estamos adentrando e a ser explorado de agora em diante.

A partir deste parágrafo, estreitaremos mais a abordagem, ainda numa perspectiva de horizonte, mas já apontando na direção da generalização. No competente trabalho de Carolyn Kieran e colaboradores, *Early Algebra*, publicado em 2016 (KIERAN *et al*, 2016), os autores mostram como os estudos em álgebra evoluíram até se abordar, pela primeira vez, em 2001, o tema “early álgebra” – que deixaremos aqui sem tradução. Nesse estudo, Kieran *et al* mostra que “essas discussões enfatizaram que uma característica fundamental do pensamento algébrico precoce é a expressão da generalidade” (KIERAN *et al*, 2016, p. 4, tradução nossa)². Então eles apontam que, em relação à generalização, os principais temas abordados no início dos anos 2000 eram sobre: generalização relacionada à atividade de padronização e generalização relacionada às propriedades das operações e estruturas numéricas.

Vejamos também quais são as linhas gerais do trabalho de outro autor que se ocupa de estudar a generalização em álgebra: Jonh Mason (MASON, 1996). Em

² Those discussions emphasized that a key characteristic of early algebraic thinking is the expression of generality.

Expressing generality and roots of algebra, de 1996, Mason é enfático ao afirmar que a generalização é o coração da matemática e que o pensamento matemático não está ocorrendo se, primeiro, os professores não estão cientes de sua presença e, segundo, não têm o hábito de fazer com que os estudantes expressem suas generalizações.

Destacamos nesse estudo que, para o autor, a generalização não é apenas o culminar da investigação. Ela é onipresente. Mas, e prestemos um pouco mais de atenção aqui, essa onipresença **tende a ser negligenciada pelo fato de o especialista julgá-la elementar, o que, segundo o autor, não acontece com o estudante**. Continuando: Mason (1996) explicita sua ideia de que os currículos fornecem o conhecimento generalizado e que o professor complementa fornecendo exemplos, os quais, **para o estudante, podem ser interpretados como únicos representantes de determinado conteúdo**, deixando de ser destacada, assim, a generalização que o subsidia (MASON, 1996).

Os grifos anteriores não foram aleatórios. Até esse momento, essas leituras dão conta de encaixar aquelas nossas primeiras intuições num território bem demarcado por estudos que, a nosso ver, convergem para aquelas cenas já descritas aqui: a aluna naquela aula-inconsistente e proposital – de porcentagem – deu pistas sobre seu raciocínio a respeito dos procedimentos ali abordados, cujos passos também se acomodam muito bem na perspectiva desse estudo de Mason. Os exemplos que foram dados naquele dia e a resposta da aluna, se não fossem percebidos por mim, poderiam, sim, ser interpretados por ela como única forma de procedimento. Ou seja, haveria uma generalização a partir dos elementos que foram ofertados (digo haveria, pois essa aula foi reformulada nos próximos dias).

Vamos um pouco mais adiante. Reparemos, antes, que o estudo de Kieran mencionado em parágrafos precedentes fala de generalização em atividades envolvendo padrões. Nessa fase de leitura, de descoberta por nós mesmos, nas palavras de Demo (1985), deparamo-nos com vários e excelentes estudos envolvendo tarefas com padrões.

Seguimos, então, apresentando outro estudo bem conveniente para ser explorado nessa fase. Trata-se do artigo *Layers of generality and types of generalization in pattern activities*, publicado em 2010 por Luis Radford. Esse estudo

traz uma análise bem específica a respeito das atividades envolvendo padrão. Para o autor, nem todas as generalizações que os estudantes fazem são algébricas: ele faz uma distinção entre generalização algébrica e aritmética. No caso da generalização algébrica, os estudantes fazem uso das letras, enquanto na generalização aritmética, mesmo encontrando um aspecto comum no padrão, os estudantes generalizam utilizando números.

Radford (2010) defende que é preciso que o professor se mantenha vigilante para que os estudantes se envolvam com atividades de padrão num sentido algébrico. O autor faz, então, sua aposta nos tipos de generalização que estão presentes nas atividades envolvendo padrões: factual (quando o aluno utiliza gestos, palavras, ritmos para apontar o próximo elemento da sequência); contextual (quando há a utilização de aspectos da própria tarefa, como “a próxima figura”) e simbólica (quando há a utilização da linguagem da própria álgebra).

A escolha, por já mostrar esses três trabalhos no início desta investigação, não foi por acaso. Há um entremeio aqui que queremos destacar: a generalização é aspecto que merece, sim, ser explorado, e há diversas formas de fazê-lo: a análise que fizemos desses estudos mencionados aponta para algumas direções. Vejamos.

A generalização pode ser tratada sob diferentes enfoques: Kieran *et al* (2016) a relaciona com o pensamento algébrico precoce (*early álgebra*) e diz que ela está presente nas primeiras manifestações deste. Mason (1996) mostra que a generalização é onipresente, querendo o professor ou não, e que ela é o cerne do pensamento matemático. Radford (2010) já anuncia o que ele chama de níveis de generalização nas atividades envolvendo padrão – sublinho: nas atividades envolvendo padrão.

O que queremos destacar aqui é que, se nossa intenção é investigar a generalização dos alunos, é preciso ter o cuidado de definir sob qual enfoque vamos abordá-la e, mais ainda, de que forma essa abordagem se encaixa no universo da álgebra. Portanto, nesse sentido, os primeiros estudos que destacamos aqui mostram: (i) a necessidade da compreensão dos conceitos algébricos – o que nos leva a questionar quais são estes conceitos e de que forma se relacionam com a ideia da generalização; (ii) que a álgebra é abordada de acordo com suas diferentes

concepções: destacamos a álgebra como aritmética generalizada e nos perguntamos o quão relevante é abordar a aritmética no estudo algébrico levando em conta as generalizações que os alunos fazem, na visão de Mason (1996); (iii) que nos últimos dez anos foi publicada a maior parte dos estudos que buscam investigar a álgebra no ensino e, por isso, é inevitável não fazer um apanhado do que essas pesquisas têm mostrado em relação ao nosso interesse.

Pois bem. Está aí configurado o panorama maior para este trabalho: generalização é tema relevante, é onipresente, compõe o pensamento algébrico e é muito abordada nos estudos envolvendo atividades de padrão. Esses são apenas aspectos gerais do tema para que o leitor compreenda de que forma se chegou à problemática que conduz este trabalho. Do que já foi exposto até aqui, não nos resta nenhuma dúvida de que o aluno tem contato com a generalização, e, a partir dessas leituras, construímos duas hipóteses embrionárias para este estudo. Primeiro, o estudante pressupõe verdadeira sua generalização e a aplica o tempo todo – por ora, vamos aqui dizer que generalizar é a forma como ele compreende o conceito trabalhado e o utiliza posteriormente. Segundo, essa generalização é, a nosso ver, influenciada pela abordagem presente nos currículos de matemática.

Consideramos os apontamentos de Radford (2010) a respeito dos níveis de generalização mobilizados pelos alunos em tarefas envolvendo padrão e, em nosso estudo, vamos apontar o leme em outra direção: julgamos pertinente investigar o objeto generalização no estudo da linguagem algébrica, uma vez que a aquisição deste registro simbólico é fase importante no desenvolvimento dos alunos em álgebra.

Assim, os estudos apresentados anteriormente nos conduziram ao seguinte ponto: não é de nosso interesse investigar **se** a generalização ocorre ou **quando** isso acontece. Esses trabalhos nos respondem que **sim** e **o tempo todo**. O objetivo geral³ deste estudo será, portanto, reunir dados e evidências para investigar quais são as concepções dos alunos envolvendo a generalização algébrica e se tais concepções

³ O objetivo geral da pesquisa será reformulado logo a seguir. Neste momento, apresentamos ao leitor as primeiras ideias que fizeram parte da construção metodológica e científica do estudo.

podem ser analisadas numa perspectiva escalar. Voltaremos a este objetivo logo a seguir.

Dessa forma, o que temos até esse momento são hipóteses e objetivos construídos de forma embrionária, pois nosso intento é delimitá-los com mais clareza no final deste capítulo. A ideia é mostrar como essa problemática foi sendo construída e lapidada à medida que fomos tomando posse de mais aparato teórico e metodológico. Para tanto, precisamos de outro marco, e ele vem logo a seguir.

1.2. A Didática da Matemática

Como neste capítulo estamos reunindo argumentos que sejam capazes de nos guiar e, principalmente, que nos permitam indagar cada vez mais, já é hora de apresentar outro horizonte eleito nesta investigação – a Didática da Matemática. Isso se faz necessário para que o leitor compreenda a razão dos objetivos selecionados nesta pesquisa (e apresentados logo a seguir). Já foi mostrado de que forma o tema desta pesquisa se fez incômodo em nossa prática. Mas é necessário também frisar que o contato com o universo da Didática da Matemática foi responsável pela maneira como enxergamos a sala de aula. Não é objetivo aqui dar uma visão romanceada de nossa rotina docente. De forma alguma. Mas não é possível redigir este trabalho sem antes afirmar que o contato com este ramo da didática transformou nosso olhar como pesquisadora.

Essa vertente foi “descoberta por acaso” em uma das nossas intermináveis pesquisas e leituras. Tal fato se deu por volta do ano 2008. Com isso, é preciso destacar que, em nossa formação como professora de matemática (1999-2002), não havíamos lido um texto sequer sobre Didática da Matemática. Sublinhamos que, a partir de nosso ingresso no Mestrado em Educação Matemática, nossos estudos se alinharam cada vez mais a esse campo, e hoje é ele que sustenta esta investigação.

A pesquisa em Didática, como afirma D'Amore (2007), se propõe a responder diversas questões como, por exemplo, como aprendem os alunos, mas, para isso, é preciso estar conectado a bases teóricas profundas. O autor fornece duas maneiras de enxergar esta linha de pesquisa: divulgando ideias e pesquisando empiricamente.

A respeito da segunda vertente, D'Amore (2007) defende que a Didática da Matemática possui todas as características para ser considerada uma ciência consolidada e estável (D'AMORE, 2007, p. 71). O autor explicita ainda que a escola francesa forneceu uma contribuição considerável, introduzindo um vocabulário próprio que acabou por ser assimilado pela comunidade dos novos didatas.

Para mostrar de que forma se desenvolveu a Didática da Matemática, o trabalho de Teixeira e Passos (2013) explica que, na tradição de Comenius – Comênio (1592-1670)⁴ –, o que vinha primeiro no ensino eram os princípios gerais da educação, e não o conhecimento do que era de fato ensinado. O importante era adotar um método de ensino de forma que esse método fosse tão natural a ponto de não serem necessárias adaptações ou algum tipo de especialização. Os autores lembram que já se sabe que nem todas as pessoas adquirem seus conhecimentos nas mesmas circunstâncias e que é em oposição à ideia de Comenius que o educador francês Guy Brousseau desenvolveu sua teoria para compreender as relações que envolvem o professor, o aluno e o saber na sala de aula – a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986). Guy Brousseau é considerado um dos pioneiros da Didática da Matemática.

Brousseau (1986, p. 35, tradução nossa⁵) defende que a Didática da Matemática "estuda as atividades didáticas, ou seja, as atividades que têm por objeto o ensino, obviamente no que são específicas da matemática". Pommer (2008) explica:

Para Brousseau [...] a Didática da Matemática estuda as atividades didáticas que têm como objetivo o ensino naquilo que tem de específico dos saberes matemáticos, propiciando explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise, incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos (referência a Piaget), além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber (POMMER, 2008, p. 1).

⁴ Comênio é o nome em português para Comenius, em latim. Ele é considerado o primeiro grande nome da história da educação e fundador da didática moderna.

⁵ La didactique des mathématiques» étudie les activités didactiques, c'est-à-dire les activités qui ont pour objet l'enseignement, évidemment dans ce qu'elle sont de spécifique aux mathématiques.

Dessa forma, o que conta não é apenas o comportamento cognitivo do aluno, mas, principalmente, as situações que são implementadas para ensiná-los e os múltiplos fenômenos que daí decorrem. Essas situações implementadas em sala de aula são de nosso interesse aqui, pois uma de nossas hipóteses é a de que a abordagem da linguagem algébrica no currículo pode influenciar na generalização das ideias dos estudantes. Para o autor, a Didática da Matemática vai muito além do ensinar e do aprender, os quais apontamos aqui como ações estéreis, que se tornam fim em si mesmas.

Brousseau (1986) concebe a Didática da Matemática como a arte de implementar situações que possam levar à aprendizagem de um saber. Brousseau (1986, p. 49, tradução nossa⁶) é veemente ao defender o que chama de intenção didática: “[...] um ambiente sem intenções didáticas é manifestamente insuficiente para induzir no aluno todos os conhecimentos culturais que se deseja que ele adquira”.

A nosso ver, a intenção didática pode ser investigada tanto do ponto de vista do professor quanto do currículo. Algumas questões que já podemos levantar neste momento: existe uma intenção didática prevista no currículo que leve em conta a generalização no estudo da álgebra? Como o professor pode manifestar essa intenção didática? Que consequências isso traz para o ensino da álgebra?

Não apenas professor e aluno fazem parte do processo de aprendizagem, segundo Brousseau (2002). Um elemento importante em sua teoria é o *milieu*⁷. Em seu trabalho publicado em 2002, ele explica:

Pensamos que o conhecimento começa a ser construído em uma gênese da qual Piaget apontou as características essenciais, mas que envolve também relações específicas com o *milieu*, principalmente após o início da escolarização. Portanto, consideramos que, para a criança fazer matemática,

⁶ [...] un milieu sans intentions didactiques est manifestement insuffisant à induire chez l'élève toutes les connaissances culturelles que l'on souhaite qu'il acquière.

⁷ Em português, seria *meio*, é o entorno que interage com o aluno e o desafia a encontrar respostas.

é principalmente uma atividade social e não apenas individual (BROUSSEAU, 2002, p. 15, grifo do autor, tradução nossa)⁸.

Brousseau é baluarte nesta área, mas é no trabalho de Yves Chevallard, *The didactis of mathematics: its problematic and related research*⁹, de 1981, que encontramos uma fundamentação consistente e robusta a respeito deste campo de pesquisa. O autor defende que a especificidade da Didática da Matemática deve ser apontada em contraste com a pedagogia: esta tem caráter puramente pragmático, é pensada como um conjunto de verdades viáveis, de modo que essas verdades são obtidas pela aplicação de ciências já existentes, como a sociologia, a psicologia etc.

O autor explica que a Didática da Matemática não nega os postulados pragmáticos da pedagogia, mas pretende ir além quando busca robustecer um discurso teórico. Nas palavras do autor: “[a Didática da Matemática] pretende dominar o processo didático, tanto no campo teórico quanto prático, **porque o domínio prático não pode ser assegurado a menos que o controle teórico seja alcançado**” (CHEVALLARD, 1981, p. 3, grifo nosso, tradução nossa¹⁰).

Como se já não bastasse tanta clareza e objetividade, Chevallard (1981) vai além e elucida que não há qualquer chance de separação entre teoria e prática na Didática da Matemática, já que, na construção do conhecimento científico, esses dois aspectos se confundem. Aqui consideramos seu ponto fonte. Ela é muito mais que uma ciência seguida de aplicações.

O objetivo da Didática da Matemática “[...] é a construção de uma teoria dos processos didáticos, dando-nos o domínio prático sobre os fenômenos de sala de

⁸ We think that knowledge starts being constructed in a genesis of which Piaget has pointed out the essential features, but which also involves specific relationships with the *milieu*, particularly after the start of schooling. We therefore consider that for the child, making mathematics is primarily a social activity and not just an individual one.

⁹ A Didática da Matemática: sua problemática e pesquisas afins – tradução nossa.

¹⁰ It intends to master the didactic process, both theoretically and practically, because practical mastery cannot be secured unless theoretical control is achieved.

aula¹¹” (CHEVALLARD, 1981, p. 4, tradução nossa¹²). E, além disso, por meio desse trabalho do autor, percebemos que o papel do professor é preponderante na formação da Didática da Matemática como campo científico.

Para Chevallard, é esse o fato que a distingue da pedagogia. Vejamos:

Neste ponto, podemos lembrar a distinção entre a pedagogia e a didática da matemática: é minha opinião que a linha divisória entre elas separa aquelas concepções em que o professor permanece fora do sistema em consideração, e aquelas em que o professor é incluído como uma nova “parte” teórica no sistema didático, junto com o conhecimento e o aluno (CHEVALLARD, 1981, p. 5, aspas do autor, tradução nossa¹³).

O processo de ensino e aprendizagem à luz da Didática da Matemática leva em conta as interações com o meio, o papel do aluno e do professor relacionado ao saber matemático.

Os fenômenos que acontecem na sala de aula têm caráter pragmático e são passíveis de serem analisados por meio de um filtro teórico. O campo da Didática da Matemática é robusto o suficiente para sustentar nossa investigação. Assim, além de delimitarmos o grande tema dessa pesquisa e de localizarmos o assunto (generalização) num dos campos da matemática, também já fincamos outra base no universo da Didática da Matemática e sua interpretação da realidade.

1.3. Questão de pesquisa e objetivos

¹¹ O leitor vai perdoar nosso encanto demasiado, mas opinamos que essa é uma das definições mais bonitas no campo da didática: simples, objetiva, sucinta e ampla ao mesmo tempo; uma teoria que fornece o domínio prático do que acontece na sala de aula.

¹² [...] is the construction of a theory of didactic processes, giving us practical mastery over classroom phenomena.

¹³ At this point we can recall the distinction between pedagogy and the didactics of mathematics: it is my opinion that the dividing line between them separates those conceptions in which the teacher remains outside the system under consideration, and those in which the teacher is included as a new theoretical “part” in the didactic system, together with knowledge and student.

Mencionamos anteriormente o quão desafiador foi para nós formular uma questão que delimitasse com clareza o que queríamos investigar. O problema de pesquisa, de fato, requer algumas concepções prévias do pesquisador a respeito do assunto eleito. Além disso, critérios como criatividade e sensibilidade ao tema facilitam esse processo. Marconi e Lakatos (2019) apontam ainda que um problema bem formulado facilita a construção da hipótese central. As autoras defendem que o problema de pesquisa deve ser analisado sob os seguintes aspectos:

- a) **Viabilidade:** pode ser eficazmente resolvido através da pesquisa?
- b) **Relevância:** é capaz de trazer conhecimentos novos?
- c) **Novidade:** está adequado ao estágio atual da evolução científica?
- d) **Exequibilidade:** com esse problema, é possível chegar a uma conclusão válida?
- e) **Oportunidade:** o problema atende a interesses particulares e gerais? (MARCONI; LAKATOS, 2019, p. 174, grifo das autoras).

Elas ainda mostram que não basta identificar este problema. Já é necessário isolar e compreender fatores específicos relacionados a ele. Portanto, em nossa pesquisa, apresentado já um breve panorama geral envolvendo os estudos relativos à álgebra e as questões sobre generalização que mencionamos anteriormente, vamos configurar o objeto desta investigação na seguinte questão:

- Quais são as concepções de alunos de 7º e 8º anos envolvendo a generalização na aquisição da linguagem algébrica?

Essa questão apresenta o tema de nosso interesse – generalização –, as séries eleitas para investigação e o conteúdo matemático escolhido. Nos moldes de Marconi e Lakatos (2019), ousamos afirmar que esse problema é viável, pois pode e será explorado nesta pesquisa; é relevante porque trata de temática profunda no campo da matemática; é inédito, uma vez que buscamos relacionar o tema generalização em termos ainda não investigados; é problema executável e atende a interesses gerais e particulares na Educação Matemática.

A estrutura deste estudo buscou levar em conta a construção de capítulos que demonstrem um encadeamento de ideias de forma que consigamos explorar bem esse problema nos moldes elencados.

Os estudos que apresentamos na seção 1.1 nos conduziram à definição do problema e das primeiras hipóteses deste trabalho. Ainda nos embasando em Marconi e Lakatos (2019), vemos que as autoras explicam que, embora não existam regras para a formulação das hipóteses em um trabalho científico, “é necessário que haja embasamento teórico e que elas sejam formuladas de tal maneira que possam servir de guia na tarefa da investigação” (MARCONI, LAKATOS, 2019, p. 176). Portanto, apresentamos a seguir a hipótese mais delimitada até aqui:

- No desenvolvimento do estudo da linguagem algébrica, os alunos experimentam diversas concepções no campo da generalização as quais podem estar relacionadas com a estrutura do currículo da Matemática, com a abordagem do professor e com a interpretação do aluno.

Essa hipótese leva em consideração alguns pontos abordados na pequena apresentação que fizemos da Didática da Matemática. Arrematamos com mais uma proposição de Marconi e Lakatos (2019): “[...] a utilização de uma hipótese é necessária para que a pesquisa apresente resultados úteis, ou seja, atinja níveis de interpretação mais altos” (MARCONI, LAKATOS, 2019, p. 176). Portanto, nossa conjectura será retomada durante todo o desenvolvimento deste trabalho. O intento maior é confrontar ideias, analisar argumentos, construir novos conhecimentos, ou seja, galgar esses níveis mais altos de interpretação, conforme dito.

Estreitando um pouco mais, o objetivo geral desta pesquisa é:

- Analisar o *corpus* prático e teórico mobilizado por alunos de 7º e 8º anos do Ensino Fundamental no contato com a generalização algébrica.

E para chegarmos a esse ponto, elegemos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar as concepções de alunos de 7º e 8º anos do Ensino Fundamental (EF) envolvendo a generalização algébrica numa perspectiva escalar.
- Caracterizar as formas de generalização presentes no currículo de matemática em Minas Gerais.
- Descrever o processo de generalização percorrido por alunos de 7º e 8º anos do Ensino Fundamental.

1.4. Síntese e considerações finais do capítulo

O capítulo que inaugura este trabalho buscou apresentar os contornos gerais que moldam o contexto que trouxe à tona a problemática desta pesquisa. Neste momento, a autora apresenta sua trajetória como professora, pontua aspectos gerais de sua formação e inquietações que culminaram no presente estudo. Hipóteses e objetivos foram apresentados em sua forma embrionária para, logo após, serem apresentados já de posse de alguma segurança teórica.

Foi pontuado que a Didática da Matemática é o recorte mais amplo da realidade que abriga este trabalho, além da delimitação do grande tema que conduz a pesquisa: a generalização.

A questão de pesquisa foi formulada seguindo parâmetros como criatividade e sensibilidade ao tema. Vale lembrar que tais questões serão retomadas ao final do estudo teórico. O intento é delimitar essas diretrizes à luz da teoria abraçada.

O próximo capítulo é dedicado à metodologia escolhida. Até aqui foram mencionados os caminhos percorridos para que se chegasse à elaboração da questão deste estudo. Vamos, agora, mostrar de que forma encontramos os meios que julgamos convenientes para nos aproximarmos das hipóteses e cumprirmos os objetivos eleitos.

2. METODOLOGIA

Se tudo depende de tudo, como fixar a
nossa atenção num objecto particular de
estudo? Temos que estudar tudo ao mesmo
tempo? Mas qual é o cérebro que o pode
fazer?

(Bento de Jesus Caraça)

De início, já vamos afirmar que nossas ideias fluem para a direção apontada por Sales (2010, p. 54) quando o autor defende que método é uma escolha pessoal e que leva em conta parâmetros como objetivos, experiência do pesquisador e a sua postura diante do mundo. Acrescentamos a visão do professor Pedro Demo esclarecendo que, enquanto a ciência tem o objetivo de captar e manipular a realidade, é a metodologia quem se preocupa em como chegar lá (DEMO, 1985). Minayo (2018) explica que o caminho do pensamento e da prática na realidade é a metodologia. E, para Gil (2008), o método é o que possibilita verificar se um conhecimento pode ser considerado científico. Atividades sistemáticas que permitem alcançar o intento de produzir conhecimentos válidos – é assim que Marconi e Lakatos (2019) definem método. Bem, essas autoras foram citadas não apenas com o objetivo de mostrar um aparato teórico, mas, principalmente, para deixar clara a visão adotada por nós neste trabalho.

Há alguns aspectos demonstrados nessas definições de método que apresentamos e que serão retomadas algumas vezes daqui em diante: sensibilidade, caminho, validade e ciência. Talvez não tenha sido dada a ênfase necessária, por isso frisamos aqui: desde o início deste trabalho, o esforço maior é explicitar estas quatro vertentes na condução desta investigação – o modo como o tema de estudo é sensível à realidade da professora que ora escreve, o caminho percorrido pela agora pesquisadora e o caráter válido e científico do assunto eleito.

Tanto a metodologia quanto a teoria, ou seja, as ferramentas de cientificidade adotadas aqui, foram selecionadas com base nesses quatro aspectos, contudo o

primeiro deles será sempre a nossa sensibilidade. Adotamos a visão de que, embora haja tais instrumentos de estudo da realidade, cada um de nós se apropria deste ou daquele método devido à sua percepção pessoal. É preciso, antes, pertencer ao mundo para, percebendo-o, explicá-lo. E o fato de fazermos parte dessa realidade educacional a qual pretendemos estudar tem impacto não só na escolha do método, como da teoria e, ainda, na interpretação dos resultados. Essa visão foi construída não só devido à nossa interpretação da realidade, mas também com o auxílio de um texto que se tornou muito caro à nossa formação enquanto pesquisadora: trata-se do belo material de Bento de Jesus Caraça – *Conceitos fundamentais da Matemática* (CARAÇA, 2010).

Por ocasião dos estudos no mestrado, tivemos contato com essa obra e chamou-nos a atenção a maneira como o autor explica o desenvolvimento das leis naturais até que a Matemática se aproprie delas¹⁴. Caraça (2010) admite uma Matemática que, primeiro, pertence à realidade para, depois, emergir com *status* de ciência independente até chegar ao ponto de explicar essa realidade da qual nasceu. O modo como o autor encara o mundo real tem suas bases na interdependência e na fluência das coisas. Não é justo que exponhamos aqui o método deste trabalho sem antes mencionar o quão importante foi (e ainda é) esta obra em nossa formação.

Este é um dos momentos em que o tema deste estudo se torna sensível a nós, como dito anteriormente. Não é possível continuar sem antes citar as próprias palavras de Caraça (2010) quando ele explica a forma como encara a ciência e sua atitude adotada na escrita de *Conceitos Fundamentais de Matemática*. É longo, mas faz jus à sensibilidade e competência do autor.

A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é

¹⁴ Trata-se do capítulo I – Estudo matemático das leis naturais, na Parte II da referida obra, página 99. Recomendamos a leitura deste material do autor, sempre gentil e rigoroso nas palavras (CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 7. ed. Lisboa: Gradiva, 2010).

totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento conseguem eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições.

[...]

Será esta a atitude que tomaremos aqui. A Matemática é geralmente considerada como uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete, um gabinete fechado, onde não entram os ruídos do mundo exterior, nem o sol nem os clamores dos homens. Isto, só em parte é verdadeiro.

Sem dúvida, a Matemática possui *problemas próprios*, que não têm ligação imediata com os outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos mergulham *tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência*, na vida real; uns e outros entroncam na mesma *madre* (CARAÇA, 2010, p. xxiii, grifo do autor).

A maneira do autor de encarar a construção do conhecimento científico como algo turbulento, cheio de idas e vindas, incertezas e contradições é também nossa concepção de realidade. O conteúdo matemático condensado nos currículos de maneira ordeira e bem encaixada nada diz a respeito do que de fato ocorreu. Como professora, sempre constatamos que o estudante parece não compactuar com uma linha de desenvolvimento tão uniforme como presente no currículo. Isso é percepção para ser discutida mais adiante, porém pressupomos que fincamos a primeira estaca que explica a adoção do método deste trabalho – a desordem original das ideias que posteriormente farão parte de um quadro muito bem formatado pela ciência.

A segunda base está em considerarmos a realidade fluente e interdependente – na concepção de Caraça (2010). Nos próximos parágrafos, há uma descrição desse aspecto (sempre na visão do autor citado).

O homem, mergulhado na natureza desde os primórdios de sua existência, teve como dificuldade primeira o domínio do desconhecido e das forças naturais. Como consequência desse domínio, seguiu-o, desde o início, o desejo de compreensão e previsão. Ora, o homem que pode prever, pode defender-se com mais facilidade. Assim, Caraça (2010) mostra que, pela observação e encadeamento dos estudos, foi-se constituindo a *ciência*, cujo objetivo final é a formação de um quadro ordenado e explicativo dos fenômenos naturais. Dessa forma, pode-se distinguir dois tipos de conhecimentos: enquanto o conhecimento científico pergunta *por que*, o conhecimento vulgar ou primário satisfaz-se com o resultado imediato do fenômeno.

Assim, por este último tipo de conhecimento, podemos afirmar que uma pedra largada à altura de um prédio de três andares cai, e, pelo conhecimento científico, uma pedra cai de um prédio porque é atraída pela gravidade.

Para dominar seu meio, Caraça (2010) explica que o homem necessita compreender a realidade na qual está inserido. E esta realidade apresenta duas características essenciais. A primeira é a **interdependência**: todas as coisas do mundo estão interligadas e relacionadas umas com as outras. Assim, ao analisarmos, por exemplo, uma planta de determinada região, verificaremos que sobre ela incidem vários aspectos e características. Podemos citar o tipo de solo que favorece seu crescimento, os animais que dela se alimentam e aqueles que dela sobrevivem. Ainda podem ser considerados os aspectos da região onde ela está inserida, de que forma o homem se aproveita de seu surgimento, sua posição numa cadeia de outras plantações. Este é apenas um exemplo fornecido por Caraça (2010) para se falar da interdependência das coisas na realidade.

A segunda característica é a **fluência**: assim como a realidade está impregnada de interdependência, também todas as suas coisas fluem, evoluem, desenvolvem-se. Se analisarmos bem, veremos que tudo possui um ciclo de nascimento, crescimento e morte. E que esta morte origina outros nascimentos. Esta característica não vale, contudo, para os minerais, mas verifica-se no mundo vegetal e animal. Assim, é fácil observar que o ferro enferruja, que as placas tectônicas se movem, que o fruto apodrece etc.

Contudo, Caraça (2010) mostra que as características da realidade apresentadas anteriormente colocam-nos em sérios embargos. Como aventurar-se no estudo deste mundo que flui a todo instante? Como fixar a atenção num determinado objeto de estudo se estão todas as coisas interligadas, dependentes? Sobre esta última característica, o observador encarregou-se de definir uma maneira de contornar este pequeno impasse, como veremos a seguir.

Na impossibilidade de abraçar todo o universo, o pesquisador recorta, faz uma seção da realidade que pretende observar. A esse conjunto de seres e fatos que foi destacado, dá-se o nome *isolado*. Não é difícil, porém, notar que esse afastamento do resto da realidade trará influências no resultado do estudo. Temos aí, na visão de

Caraça (2010), um erro inicial que implicará consequências, e o bom observador estará ciente de seu aparecimento. Assim, há que se recortar um isolado que compreenda nele todos os fatores dominantes. Sabemos, no entanto, que nem sempre isso acontece, pois quantas vezes o pesquisador se depara com fatos que fogem de seu objetivo inicial, são *inesperados*. Ora, o inesperado nada mais significa que o isolado não foi bem definido. E sabe-se que o progresso da ciência encontra terreno fértil no aparecimento de fatos inesperados, porque tal fato exige um cuidadoso exame das condições iniciais na determinação do isolado.

Não é tarefa das mais fáceis propor-se a estudar a realidade fluente e interdependente na qual estamos inseridos. Para tanto, faz-se necessário, muitas vezes, determinar um isolado superior no qual se encontra nosso objeto de pesquisa. Assim, por exemplo, se o estudo diz respeito a algum órgão de uma árvore, é do bom senso que se inclua este isolado num outro, superior – a árvore e seu terreno, por exemplo, que, por sua vez, podem ser tomados em um outro isolado mais largo – a floresta, e assim sucessivamente. Fica fácil – e necessário – observar que o estudo da Realidade carece da constante construção de cadeias, e a cada elo da cadeia corresponde a um nível de isolado.

Está aí exposta a maneira como o autor julga fluência e interdependência. cremos não ser necessário explorar mais este aspecto. Vamos, então, condensar o que foi defendido até aqui: admitimos um mundo real fluente e interdependente e uma ciência construída de forma hesitante e contraditória, como disse anteriormente Caraça (2010). Julgamos necessário colocar o leitor a par de nossas concepções iniciais uma vez que “[...] a pesquisa traz consigo, inevitavelmente, a carga de valores, preferências, interesses e princípios que orientam o pesquisador” (LÜDKE; ANDRÉ, 2018, p. 3).

Cabe agora recordar nossa questão de pesquisa: *quais são as concepções de alunos de 7º e 8º anos envolvendo a generalização na aquisição da linguagem algébrica?* Convém notar que o uso do vocábulo “quais” não será tratado aqui de forma quantificável, passível de medição. Numa abordagem quantitativa, falaríamos aqui de fenômenos que poderiam ser isolados, como num laboratório. Mas valemos, mais uma vez, de Lüdke e André (2018, p. 4) para sublinhar que “[...] em

educação, as coisas acontecem de maneira tão inextricável que fica difícil isolar as variáveis envolvidas e, mais ainda, apontar claramente quais são as responsáveis por determinado efeito”.

Além disso, pela nossa concepção de realidade fluente e interdependente, nos moldes de Caraça (2010), tratamos aqui das concepções dos alunos numa perspectiva de isolado, de recorte necessário ao estudo. Ou seja, dada a impossibilidade da análise de um universo amplo e complexo, delimitamos um espaço que, de alguma forma, está conectado a um todo. Portanto, assumimos que a generalização algébrica pode ser analisada numa perspectiva particular para que possa, ainda, trazer algumas revelações em relação ao universo ao qual está conectada: a álgebra, num primeiro plano.

Este estudo traz uma abordagem qualitativa, nos parâmetros de Bogdan e Biklen (1994). Acreditamos que os autores são muito assertivos ao defender e explicar esse tipo de pesquisa, a qual se encaixa perfeitamente aos nossos objetivos. Vamos, portanto, utilizar o modo como eles a esclarecem e nos valer de seus apontamentos para justificar os nossos. Os autores salientam, então, que essa metodologia possui cinco características. Vejamos a seguir cada uma delas.

De início, na pesquisa qualitativa, a fonte dos dados é o ambiente natural, e o investigador é o instrumento principal. Nada mais conveniente ao caso tratado aqui. Estamos conduzindo um estudo na condição de pesquisadora e professora. A posição do investigador na pesquisa qualitativa é, sim – a nosso ver – condição preponderante não só no direcionamento do estudo, mas também na interpretação dos resultados. De fato, os dados interpretados não são meras colheitas fortuitas desvinculadas de sua realidade. Essa análise diz muito a respeito do investigador e da maneira com a qual ele se relaciona com o ambiente. De nada nos valerá observar, anotar, transcrever, se não estivermos inseridos no contexto educativo.

Aqui voltamos na concepção de realidade que expusemos acima com o auxílio dos apontamentos de Caraça (2010): o recorte da realidade (isolado) vem imbuído de características outras que, a nosso ver, somente o olhar do pesquisador completamente inserido nesse ambiente poderá fornecer uma interpretação cada vez mais fiel à realidade que se propôs interpretar. As palavras a seguir de Bogdan e

Biklen (1994, p. 48) dão conta de resumir e encerrar esta primeira característica da pesquisa qualitativa: “Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudos porque se preocupam com o contexto”. Muito adequado aqui.

O segundo tópico mostra que o estudo qualitativo é descritivo: ou seja, não basta replicar falas e comportamentos, é preciso descrevê-los em toda sua extensão, toda sua riqueza. Esse é nosso intento. Aliás, a ideia deste trabalho partiu, juntamente com outras intenções, do desejo de mostrar o processo dos alunos no desenvolvimento de tarefas envolvendo a generalização. Portanto, não nos interessa apenas a resposta final dos estudantes, mas o modo de seus procedimentos. E para atingir este objetivo, apenas um estudo profundo e descritivo, já que a pesquisa qualitativa “[...] exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 49)

A terceira característica da pesquisa qualitativa que estamos expondo aqui diz muito sobre o que viemos discorrendo desde o início com a apresentação deste estudo: nesse método de pesquisa, os investigadores estão mais interessados no processo do que simplesmente nos resultados. Ora, dado nosso problema e objetivos já expostos, apenas nos debruçando no processo desenvolvido pelo aluno vamos poder circundar a hipótese do trabalho aqui. Investigar de que forma o aluno lida com a generalização prevê uma gama de análises que vão desde as concepções iniciais dos alunos, o papel das tarefas propostas, a apreciação das respostas de todos os participantes, e outras circunstâncias. Portanto, falamos aqui de interação, de intercâmbio, de processos que se complementam, que não são estáticos. Isso tudo é processo.

A próxima característica na visão de Bogdan e Biklen (1994) para estudos qualitativos diz respeito à análise dos dados. Os autores defendem que a análise nesse método é indutiva, no sentido de que não sabemos nada a respeito do estudo de antemão, e que não basta confirmar ou refutar as hipóteses construídas previamente. O resultado é construído passo a passo. Coadunamos com os autores quando eles dizem que essa análise se assemelha a um funil: de início, tudo está mais

aberto e, com o desenvolvimento, tornam-se mais fechadas. Esta perspectiva é muito adequada aos estudos em educação, já que boa parte das questões são levantadas e checadas durante a análise dos dados, diferentemente de estudos com viés quantitativo, em que tudo gira em torno de uma hipótese, bastando refutá-la ou não. Esse não é nosso objetivo. A hipótese aqui levantada é aberta o suficiente para que possamos gerar outras perguntas e ainda colocá-las em xeque. A riqueza, e pertinência, dos trabalhos qualitativos em educação é esta: um estudo é capaz não só de trazer luz às suas questões, mas também de enxergar outros problemas e situações de modo que possamos ir, pouco a pouco, nos embrenhando nesse universo investigativo.

Para encerrar, a quinta especificidade do método qualitativo diz respeito ao significado, à perspectiva que o participante atribui ao objeto de estudo. Isso, de acordo com os autores, faz com que tenhamos contato com mais uma abordagem específica da pesquisa qualitativa: a dinâmica interna das situações, aquela que é invisível ao observador exterior. Mais um ponto grandioso para nós: queremos aqui jogar luz em raciocínios e comportamentos que, a nosso ver, são muito específicos da sala de aula, da aula de matemática mesmo, que se afastam um pouco do que é previsto no currículo, que pode escapar do controle do professor¹⁵. Ou seja, que só pode vir à tona por meio de um estudo qualitativo, já que, neste método, os pesquisadores “[...] estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 51).

Fica assim pontuada nossa metodologia como qualitativa descritiva, nos moldes dos já citados Bogdan e Biklen (1994) e Lüdke e André (2018). Na verdade, o que fizemos até aqui foi trazer argumentos de cientificidade para este tipo de pesquisa. A partir daqui, vamos descrever com mais liberdade os passos metodológicos que serão adotados nesta pesquisa em consonância com o que foi descrito anteriormente.

¹⁵ Não falamos aqui de controle no sentido de rigidez, de papel preponderante apenas do docente, mas no sentido de que determinados fenômenos da sala de aula são tão específicos que podem passar despercebidos ou serem taxados de mero comportamento natural do aluno.

Dividimos este estudo em três etapas. Na primeira delas, faremos uma breve revisão literária dos estudos que se ocupam da generalização algébrica. O intento é investigar de que forma o tema está presente nos estudos já publicados. Ao final dessa parte, esperamos ter argumentos a respeito da concepção de generalização em consonância com a linguagem algébrica. Essa etapa pode ser conferida no capítulo 4.

Como tratamos aqui de um estudo cujos contornos estão inseridos na realidade escolar, separamos para a segunda etapa uma análise documental para identificar as relações institucionais¹⁶ existentes e esperadas para o campo algébrico e a noção de generalização. Para isso, vamos analisar o documento oficial Currículo Referência de Minas Gerais. O capítulo 5 dá conta dessa parte.

Nossa pesquisa sofreu os reflexos das consequências da pandemia do COVID-19. Em nosso projeto, a previsão era que aplicássemos a terceira etapa do estudo com os alunos no ano de 2020. Devido à quarentena e à suspensão das aulas de forma presencial, tal fato não se deu. Era nosso intento realizar uma engenharia do tipo PEP – Percurso de Estudo e Pesquisa, em português. Brevemente explicamos que essa denominação vem da expressão em francês *parcours d'étude et de recherche* (PER).

Um PEP é construído por meio de uma questão Q com forte poder gerador, provavelmente para impor muitas questões derivadas e, assim, levar a encontrar um grande número de conhecimento para ensinar – e alguns outros, que marcará o limite temporário do local de construção. O ideal é que todas as PERs de um ano letivo possibilitem "cobrir" o programa sem lacunas, mas não sem um certo número de redundâncias úteis para a aprendizagem. (CHEVALLARD, 2005, p. 14, tradução nossa¹⁷).

¹⁶ Relação institucional é um dos conceitos da Teoria Antropológica do Didático, a qual será analisada no próximo capítulo.

¹⁷ Un PER est engendré par une question Q à fort pouvoir générateur, susceptible d'imposer de nombreux questions dérivées et de conduire ainsi à rencontrer un grand nombre de savoirs à enseigner – et quelques autres, qui marqueront la limite provisoire du chantier. L'ensemble des PER d'une Anne scolaire doit idéalement permettre de «couvrir» le programme sans lacune, mais non sans un certain nombre de redondances utiles aux apprentissages.

Essa abordagem de Chevallard corrobora com nossa visão de pesquisa e muito teria a acrescentar em nossas análises. Não sendo possível construir uma dinâmica com as turmas, lançamos mão de tarefas isoladas que foram construídas pela pesquisadora e enviadas aos alunos participantes por meio do aplicativo de troca de mensagens *WhatsApp*. Portanto, a terceira fase de nosso estudo será a análise dessas tarefas enviadas por meio do aplicativo e de outras colhidas já no retorno das aulas presenciais. No capítulo 6, voltaremos a essa questão com a devida ênfase.

Para finalizar, julgamos conveniente agregar ao nosso filtro metodológico a perspectiva de Yin (2001) que trata do estudo de caso. O autor mostra que este método possui uma vantagem distinta, e isso ocorre quando se faz “uma questão do tipo ‘como’ ou ‘por que’ sobre um conjunto contemporâneo de acontecimentos sobre o qual o pesquisador tem pouco ou nenhum controle” (YIN, 2001, p. 28). Tal abordagem é muito conveniente ao nosso estudo, uma vez que os dados colhidos junto aos estudantes serão analisados não pela perspectiva de “o que estão fazendo?” mas, ao contrário, nos interessa “como foi desenvolvida” tal tarefa e “por que” tal raciocínio ou estratégia foram empregados. De fato, Yin (2001) não apenas fundamenta este método de pesquisa, mas também é muito assertivo ao dizer que a parte mais importante da pesquisa é determinar suas questões, e que é a partir desta formulação que se define a metodologia mais adequada.

Sobre o estudo de caso, Yin (2001) o define como uma investigação de um fenômeno contemporâneo, no seu contexto da vida real, de modo que os limites entre esse fenômeno e o contexto não estão muito bem definidos. Além disso, a situação estudada possui muito mais variáveis de interesse do que propriamente os dados colhidos, e, inclusive, há um desenvolvimento prévio de aspectos teóricos os quais conduzem essa coleta e análise. Parece-nos que todos esses argumentos estão em completa harmonia com a circunstância do nosso estudo, cujo contexto é o universo da sala de aula e seus múltiplos aspectos e especificidades.

Assim, sempre levando em conta nossa consideração da realidade fluente e interdependente, fundamentamos nossa opção pela pesquisa qualitativa descritiva e dividimos este estudo em três etapas: análise do campo algébrico por meio de revisão

literária; estudo de documentos oficiais e aplicação de tarefas aos alunos por meio da abordagem de estudo de caso (na perspectiva de Yin, 2001).

É tempo de sintetizarmos este capítulo, já que se torna cada vez mais difícil continuar sem abordar, com a devida profundidade, o quadro teórico que adotamos.

2.1. Síntese e considerações finais do capítulo

Nosso esforço neste capítulo foi apresentar este trabalho buscando fundamentá-lo em nível de ciência e de sensibilidade. Admitimos que este foi o momento em que tivemos maior liberdade para dialogar com voz de professora em primeiro lugar. Também foi o tempo de mostrar de que forma o assunto aqui abordado se relaciona com a nossa rotina da sala de aula e com o que é produzido em nível de pesquisa. Vamos retomar alguns apontamentos que serão úteis não só para sintetizar o capítulo, mas também preparar o leitor para as próximas ideias a serem desenvolvidas.

Já de início, buscou-se situar este estudo entre a intuição e a razão. A intuição veio da nossa observação e prática diárias no nosso fazer e ser pedagógico, das leituras, vivências, dúvidas e constatações. Essa intuição nos levou a questionar a respeito das generalizações feitas pelos alunos e observadas por nós durante uma trajetória de quase vinte anos dedicados à educação. A razão nos levou a buscar os filtros de cientificidade necessários, a elaborar questão e hipótese de pesquisa e a situá-las no que vem sendo produzido e discutido em álgebra, generalização e Didática da Matemática.

Trabalhos como os de Coxford e Shulte (1995); Miguel, Fiorentini e Miorim (1992); Kieran e outros (2016); Mason (1996); e Radford (2010) nos auxiliaram na construção da questão de pesquisa que orienta este estudo: *Quais são as concepções de alunos de 7º e 8º anos envolvendo a generalização na aquisição da linguagem algébrica?* Partindo da hipótese de que essas concepções existem, o objetivo geral será, portanto, investigá-las.

Para cumprir o intento, este estudo se propõe a identificar as concepções desses alunos, caracterizar as formas de generalização presentes no currículo de

matemática do Ensino Fundamental em Minas Gerais e descrever o processo de generalização percorrido pelos participantes da pesquisa.

Sempre levando em conta nossa consideração da realidade fluente e interdependente em consonância com Caraça (2010), fundamentamos nossa opção pela pesquisa qualitativa descritiva e dividimos este estudo em três etapas: análise do campo algébrico por meio de revisão literária, estudo de documentos oficiais e aplicação de um conjunto de tarefas aos estudantes na perspectiva de estudo de caso fundamentado em Yin (2001).

Agora é tempo de apresentar o caminho que escolhemos: no próximo capítulo, faremos a abordagem teórica que vai conduzir este trabalho. O leitor vai perceber que retomaremos alguns apontamentos já demonstrados, porém, desta vez, já revestidos de aparato mais robusto e validados teoricamente. Nossa ideia é retomar os objetivos da pesquisa revestidos de conceitos e vocabulários próprios da Didática da Matemática e da Teoria Antropológica do Didático – nosso filtro teórico.

PARTE II – O quadro teórico e o objeto da investigação

3. QUADRO TEÓRICO

Entendamo-nos bem. A Ciência não tem, *nem pode ter*, como objetivo descrever a realidade *tal como ela é*. Aquilo a que ela aspira é construir quadros racionais de *interpretação e previsão*; a legitimidade de tais quadros dura enquanto durar o seu acordo com os resultados da observação e da experimentação.
(Bento de Jesus Caraça)

Na visão de Caraça (2010), as teorias são quadros explicativos cujo objetivo é fornecer interpretação e previsão da realidade. Para o autor, essas são as duas exigências fundamentais para o homem da ciência. Além disso, nunca será possível, no seu dizer, atingir a última essência do mundo real. No máximo, uma teoria consegue fornecer uma descrição, uma imagem que nos dê capacidade de interpretar e prever fenômenos do mundo real.

Neste capítulo, vamos expor o filtro teórico, o quadro explicativo, que julgamos adequado para explicar a realidade que é objeto do estudo tratado aqui.

3.1. A Teoria Antropológica do Didático – TAD

Para Chevallard (1991), uma teoria não é uma mera cópia da realidade, mas um artefato capaz de produzir um conhecimento relativo a seus objetos de estudo. Aquela realidade fluente e interdependente apresentada no capítulo 1 deste trabalho, segundo Caraça (2010), precisa ser recortada, precisa de limites e de contornos precisos, visíveis e analisáveis.

Yves Chevallard construiu sua teoria tomando por base os estudos de Guy Brousseau (1986), a Teoria das Situações Didáticas. Chevallard fundamentou seu trabalho na análise dos fenômenos didáticos. Na década de 1980, ele apresentou à comunidade científica o então conceito da transposição didática (CHEVALLARD, 1982). Vamos dedicar alguns parágrafos a ela. Essas ideias são de grande valia para nossa interpretação.

Ao fundamentar a transposição didática, Chevallard (1982)¹⁸ preocupa-se em, primeiro, admitir que há uma ciência denominada Didática da Matemática. Para tanto, é necessário definir bem o objeto dessa ciência. Ele, então, descreve o objeto de estudo da Didática da Matemática, ou seja, aquele que justifica a inclusão desta no campo do conhecimento científico:

O que exatamente é esse objeto? O educador matemático está interessado no jogo que se desenrola – como ele pode observá-lo e depois reconstruí-lo, em nossas aulas concretas – entre professor, alunos e conhecimento matemático. Três lugares, portanto: este é o sistema didático. Uma relação ternária: esta é a relação didática (CHEVALLARD, 1982, p. 3, tradução nossa¹⁹).

Portanto, temos aqui uma visão que rompe com as perspectivas que vigoravam até então no campo educacional: a famosa “relação professor-aluno” é um exemplo citado pelo autor que, segundo ele, “[...] obscureceu por pelo menos duas décadas a abordagem dos fatos didáticos mais imediatamente transparentes” (CHEVALLARD, 1982, p. 3).²⁰ Ao relacionar professor, aluno e saber, o autor eleva o patamar da

¹⁸ Na escola de verão de Didática da Matemática em Chamrousse, em julho de 1980, Chevallard apresentou a transposição didática como um conceito que mais tarde seria tratada como teoria. Nesse artigo de 1982, o autor explica que esse conceito seduziu a comunidade científica de então e se espalhou para além do universo dos educadores matemáticos.

¹⁹ Quel est au juste cet objet ? Le didacticien des mathématiques s'intéresse au jeu qui se mène – tel qu'il peut l'observer, puis le reconstruire, en nos classes concrètes – entre un enseignant, des élèves, et un savoir mathématique. Trois places donc : c'est le système didactique. Une relation ternaire: c'est la relation didactique.

²⁰ Maria Isabel da Cunha, em seu trabalho *O tema da formação de professores: trajetórias e tendências do campo na pesquisa e na ação*, de 2013, mostra que, na década de 1970, as pesquisas no campo educacional levam em conta os processos cognitivos do ensino e aprendizagem e aqueles em que o

Didática da Matemática a uma teorização que pertence não só ao campo da ciência mas também ao das didáticas.

A relação entre professor, aluno e conhecimento compõe o núcleo dessa abordagem, mas o pilar do conceito da transposição didática é o que Chevallard (1982) chama de passagem do saber acadêmico para o saber ensinado.

O conceito de transposição didática, somente por isso, refere-se à passagem do saber acadêmico para o saber ensinado, portanto, a eventual distância obrigatória que os separa atesta a necessidade de questionamento, enquanto ao mesmo tempo é a primeira ferramenta. Para o didático, é uma ferramenta que permite dar um passo atrás, questionar o óbvio, corroer ideias simples, livrar-se da familiaridade enganosa de seu objeto de estudo, em suma, exercer vigilância epistemológica (CHEVALLARD, 1982, p. 3, tradução nossa²¹).

Chevallard (1982) é enfático ao afirmar que o conhecimento ensinado é diferente do conhecimento inicialmente designado a ser ensinado. Esta abordagem do autor permite um questionamento a respeito da distância entre a “pureza” do conhecimento matemático e as possíveis lacunas que podem ser encontradas nas adequações impostas ao objeto de ensino. Uma abordagem do autor nos parece muito pertinente:

O conhecimento ensinado pressupõe um processo de naturalização, o que lhe confere a evidência indiscutível das coisas naturais; sobre essa natureza “dada”, a escola amplia então sua jurisdição, fundando valores que,

foco era professor, mas numa perspectiva psicológica. Ademais, já na década de 1980, os estudos norte-americanos eram inspirados na organização industrial, produtividade e controle e foram muito divulgados aqui no Brasil. O valor do docente era dado pela capacidade de fazer os alunos compreenderem as informações. Aos poucos, a investigação desloca-se do professor para o ato de ensinar. Portanto, notamos que o objeto de investigação situava-se num dos polos, professor ou aluno, ou, no máximo, na relação entre eles. O conhecimento não era tema considerado.

²¹ Le concept de transposition didactique, par ce la seulement qu’il renvoie au passage du savoir savant au savoir enseigné, donc à l’éventuelle, à l’obligatoire distance qui les sépare, témoigne de ce questionnement nécessaire, en même temps qu’il en est l’out il premier. Pour le didacticien, c’est un outil qui permet de prendre du recul, d’interroger les évidences, d’éroder les idées simples, de se déprendre de la familiarité trompeuse de son objet d’étude, bref, d’exercer savigilance épistémologique.

doravante, administram a ordem didática (CHEVALLARD, 1982, p. 4, tradução nossa²²).

De fato, expusemos anteriormente em nossa hipótese que a generalização parece acontecer o tempo todo. Na visão de Mason (1996), ela é onipresente, e o professor tende a negligenciar esse processo. E Chevallard (1982) aqui nos fala de conhecimentos naturalizados, inquestionáveis, de valores que são fundados e assumem uma determinada ordem didática. Embora não seja nosso escopo analisar a distância que separa o saber acadêmico envolvido na generalização e aquilo que é ensinado, será levado em consideração os apontamentos do autor sobre esse processo de naturalização do conhecimento ensinado.

A partir dos anos 1990, o autor revisita e amplia essa abordagem dando origem à Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1992). O autor explica que noções da transposição didática foram desdobradas e articuladas de modo a permitir que os fenômenos didáticos pudessem ser pensados de maneira unificada (CHEVALLARD, 1992, p. 86). Assim também esclarecem Kluth e Almouloud (2018): a TAD retoma elementos básicos da Transposição Didática, mas dessa vez apontando para uma Didática da Matemática que eles chamam de “antropologizada”, que se preocupa com “[...] as ligações orgânicas tecidas pelos homens em torno da ação do ensinar e do aprender [...] tornando-as prioridades legítimas, epistemologicamente significativas e potencialmente férteis” (KLUTH; ALMOULoud, 2018, p. 4).

De fato, uma das primeiras ocupações do autor ao expor as ideias iniciais da TAD é explicar que toda teoria deve sua construção a desenvolvimentos culturais precedentes, de forma que o primeiro passo será sempre reaproveitar e reordenar materiais existentes de acordo com um fim específico (CHEVALLARD, 1991). Nesse sentido, ele faz um entremeio entre Didática da Matemática e antropologia. Essa visão do autor corrobora com nossos apontamentos iniciais (os quais serão sempre

²² Le savoir enseigné suppose un processus de naturalisation, qui lui confère l'évidence incontestable des choses naturelles; sur cette nature «donnée», l'école étend sa juridiction, fondatrice des valeurs qui, désormais, administrent l'ordre didactique.

lembrados aqui) a respeito de uma interpretação da realidade que permite recortes sucessivos, ordenados e sempre em consonância com um universo muito amplo que vai sendo afunilado aos poucos. Caraça (2010) também nos fala da necessidade (e dificuldade) que é fazer recortes precisos do objeto de estudo.²³ Nossa interpretação é a de que o pesquisador deve manter-se em vigilância constante a respeito das relações que envolvem o objeto isolado de estudo e o meio do qual foi retirado.

Ao construir a base da sua teoria, Chevallard (1991) mostra que a TAD leva em consideração que a Didática da Matemática é parte da antropologia. Essa abordagem antropológica marca o lugar desse campo no universo do conhecimento, pois situa a Didática da Matemática num espaço muito amplo. Chevallard apresenta as primeiras ideias da TAD no posfácio de seu livro *La transposition didactique. Du savoirs avant au savoir enseigné*, originalmente publicado em 1991 (aqui referenciado na edição em espanhol *La transposición didáctica – del saber sábio al saber enseñado* do ano 2000). Nessa obra, o autor apresenta pela primeira vez o enfoque antropológico. Nas palavras do autor: “Onde situar, então, a Didática da Matemática? Em poucas palavras, minha resposta é a seguinte: ‘a didática’, as didáticas situam-se no campo da *antropologia*” (CHEVALLARD, 2000, p. 147, tradução nossa²⁴). Mais adiante, uma vez definida a antropologia²⁵ como lugar onde se situam as didáticas, o autor explica que o objeto de estudo da antropologia didática é o que ele chama de didático.

Desde o início da sua teorização, Chevallard (2002) preocupa-se em conferir à Didática da Matemática uma posição significativa e robusta no terreno das ciências. Ele desenvolve a TAD a partir de uma abordagem potente deste campo. E ele faz isso por meio da visão antropológica. Segundo o autor, a abordagem antropológica mostra que a Didática da Matemática é muito mais que um elo entre a didática e a matemática, apenas. Ela tem suas bases num universo muito mais vasto. Por isso,

²³ Essa abordagem do autor, que ele dá o nome de isolado, foi explorada no capítulo 1.

²⁴ ¿Dónde, entonces, colocar la didáctica de las matemáticas? En pocas palabras, mi respuesta es la siguiente: la ‘didáctica’, las didáticas, se situa en el campo de la antropología.

²⁵ O universo antropológico considerado por Chevallard é aquele que estuda o Homem, o Homem e a Sociedade e o Homem na Sociedade.

em nossas interpretações, dizemos que a TAD coloca num patamar superior a Didática da Matemática, pois a considera como campo intrincado de relações.

Se a Didática da Matemática é parte da antropologia, há dois caminhos que permitem alcançá-la nesse universo. O primeiro deles é a antropologia da matemática. Chevallard (1991) esclarece:

A didática da matemática surge então como um subcampo, de recente emergência, da antropologia da matemática: nada mais é do que a antropologia da matemática, que se dedica especificamente ao estudo da matemática. O homem ensinando e aprendendo matemática (CHEVALLARD, 1991, p. 161, tradução nossa²⁶).

Portanto, é nesse momento que a Didática da Matemática se torna “antropologizada”. É conveniente sublinhar que essa visão antropológica aparece mais como uma localização no vasto campo do conhecimento do que propriamente como uma forma de interpretação dos fenômenos.

Vejamos como explicam Kluth e Almouloud (2018):

[...] o autor não trata deste âmbito antropológico que diz respeito ao homem produzindo Matemática no sentido de estudar a constituição da Matemática propriamente dita. Mas situa a Didática da Matemática como sendo um subdomínio da Antropologia da Matemática, que se refere ao homem em contato com a Matemática, ao considerar a Didática da Matemática numa abordagem antropológica como estudo do homem ensinando e aprendendo Matemática (KLUTH; ALMOULOU, 2018, p. 12).

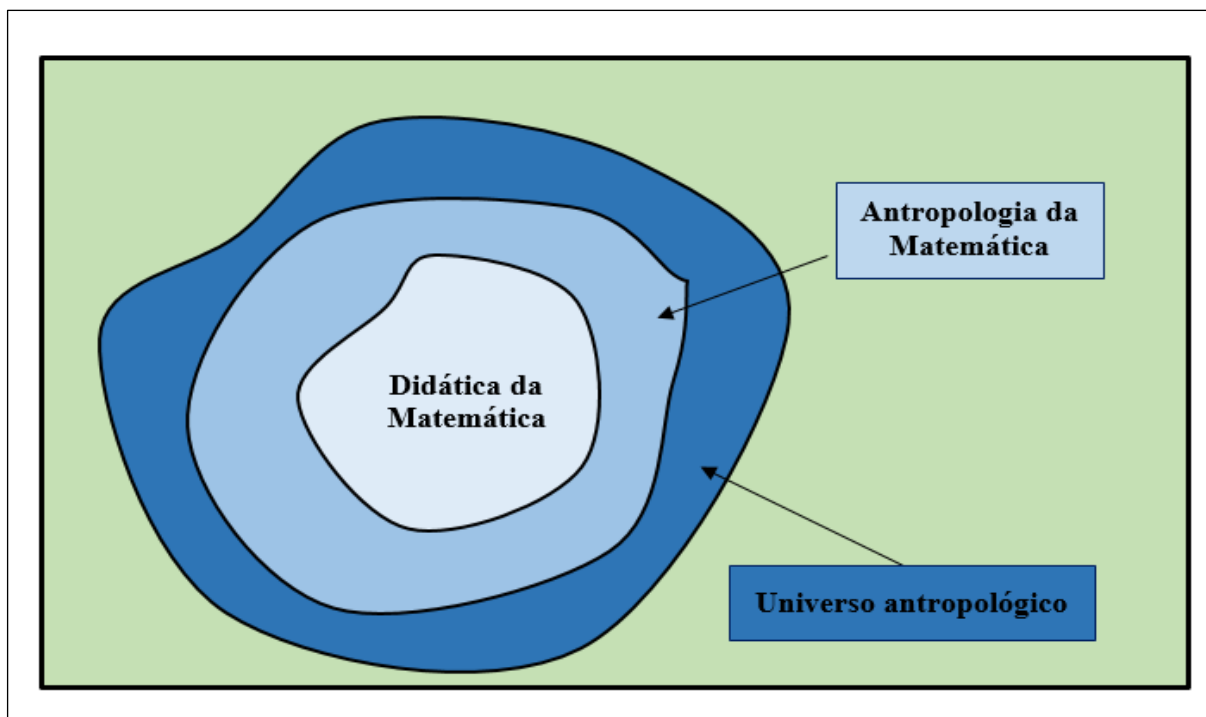
O outro caminho que permite alcançar a Didática da Matemática são os próprios elementos fundamentais da TAD. Na próxima seção, tratamos desses elementos. Até esse ponto, discorremos sobre como o autor define o local onde se ancoram as bases da sua teoria: universo antropológico e Didática da Matemática.

Para finalizar esta seção, forjamos um rudimentar modelo da concepção de realidade defendida pela TAD: figura 1. É aquele recorte que viemos destacando até aqui. Nele, enxergamos um universo antropológico capaz de sustentar outras

²⁶La didactique des mathématiques apparaît alors comme un sous-domaine, d'émergence récente, de l'anthropologie des mathématiques: elle n'est pas autre chose que l'anthropologie didactique des mathématiques, qui se voue spécifiquement à l'étude de l'Homme enseignant et apprenant des mathématiques.

construções em si: a Antropologia da Matemática dando origem ao campo Didática da Matemática. Ou seja, a TAD é teoria de vulto construída por meio de percepções que admitem outras construções que embasam e dão fundamento a seus elementos.

Figura 1 – O universo ancorado pela TAD



Fonte: Construção nossa.

3.1.1 Os elementos fundamentais da TAD

Como já foi dito anteriormente, Chevallard (1982) teoriza que o objeto de estudo da Didática da Matemática é o sistema didático: aquela relação entre professor, aluno e conhecimento matemático. Por meio do conceito da transposição didática, o autor nos explica a natureza desse conhecimento: para Chevallard (1982), conhecimento ensinado é diferente do conhecimento que foi originalmente designado para ser ensinado. A nosso ver, esse é o primeiro momento em que sua abordagem teórica vai

se caracterizando como única, pois o autor admite certa relatividade desse conhecimento.²⁷

Ora, se admitimos que há uma distância entre o conhecimento acadêmico e o conhecimento que de fato é passado aos alunos por seus professores, essa lacuna só pode ser estudada se considerarmos esse saber relativo. Então, Chevallard (2000), ao explicitar os elementos fundamentais da TAD, busca construir um modelo teórico que dê conta de estudar essa propensa relatividade do conhecimento dentro da relação didática, ou seja, levando em conta a relação entre professor, aluno e esse conhecimento. Vamos ver adiante que essa é a base da sua teoria²⁸.

Interessante notar até aqui como a abordagem do autor parte de considerações iniciais que foram sendo ampliadas. Ou afuniladas se considerarmos o universo da Didática da Matemática como pano de fundo mais amplo. Vejamos.

Ao apresentar as noções da TAD no posfácio do seu livro *La transposition didactique. Du savoirs avant au savoir enseigné*, como dissemos anteriormente, Chevallard (2000) explica que os termos primitivos de sua teoria são as **instituições**, os **sujeitos** e os **objetos**. Além disso, há também a relação que deriva da interação entre esses entes: **relação pessoal** do sujeito com o objeto e **relação institucional** entre a instituição e o objeto. O conceito de **relação**²⁹ é tão forte na TAD que, segundo o autor, é só por meio dela que o objeto passa a existir para o sujeito (CHEVALLARD, 2000). Da mesma forma, a instituição só reconhece o objeto, só o considera existente, se existe uma relação institucional entre eles. Julgamos necessário expor essas ideias nas palavras do próprio autor:

Um objeto O *existe* para o sujeito X se X tem uma relação com o objeto O: designarei esse objeto, a relação X com O, como R (X, O). Da mesma forma,

²⁷ Essa abordagem é o núcleo do conceito da transposição didática a qual, referindo-se à passagem do saber erudito ao saber ensinado, pressupõe uma distância entre eles. Ao expor esse conceito, Chevallard (1982) explica que existe um conhecimento produzido longe da origem acadêmica e que o que é ensinado é naturalizado e inquestionável.

²⁸ Dedicamos a próxima seção para abordarmos com a devida profundidade a ideia de relatividade institucional.

²⁹ *rapport*, em francês. Em alguns artigos, os autores preferem não traduzir para o português e lidar com a palavra no idioma original, dada a profundidade do conceito.

o objeto O existe para a instituição I – é um objeto *institucional para I* – se existe uma relação institucional de I com O, RI (O). Notemos a esse respeito que um objeto existe – é um objeto – se é um objeto ao menos para um sujeito X ou uma instituição I. Isto posto, diremos que X *conhece* O se X tem uma relação com O (o que significa dizer, pois, que O existe para X). (CHEVALLARD, 2000, p. 148-149, grifo do autor, tradução nossa³⁰).

Essa visão da TAD é muito peculiar e lhe confere uma abordagem ímpar dos fenômenos didáticos. Transferir o foco da análise desses fenômenos para a relação que existe entre os personagens do universo didático traz consequências. Já dissemos na abertura deste capítulo que a ciência se ocupa não só da interpretação da realidade, mas também da previsão dos fenômenos. Apenas com essa abordagem inicial da TAD, já podemos afirmar que levar em conta a análise da relação entre objeto, sujeito e instituição permite que façamos interpretações que vão além da mera descrição dos fenômenos. De fato, se consideramos em nossa pesquisa o panorama da relação pessoal entre o sujeito e o objeto, algumas questões já nos parecem pertinentes: no campo da álgebra, que objetos já existem para o sujeito? De que forma o sujeito se relaciona com eles? Há objetos que já são reconhecidos pelos alunos? A instituição reconhece (ou conhece) essa relação? Antes de mais questionamentos, precisamos nos aprofundar na noção desses elementos fundamentais da TAD.

Em um trabalho publicado em 1992, Chevallard explora mais um pouco o significado de objeto, sujeito e instituição. E segundo ele, a noção de objeto é fundamental na sua teoria e se sobressai em relação às demais noções.³¹

³⁰Existe un objeto O para el sujeto X si X tiene una relación con el objeto O: designaré este objeto, la relación X con O, como R(X, O). Así mismo, el objeto O existe para la institución I _ es un objeto institucional para I _ si existe una relación institucional de I con O, RI (O). Anotemos al respecto que un objeto existe _ es objeto _ si es objeto al menos para un sujeto X o una institución I. Dicho esto, diremos que X conoce a O si X tiene relación con O (es decir, ya que, que O existe para X).

³¹ No seu trabalho sobre transposição didática (CHEVALLARD, 2000), o autor tratou de objetos de maneira mais ampla: objetos matemáticos (aqueles os quais o professor toma como conteúdos a serem ensinados e que passam pelo crivo e estudo dos matemáticos, por exemplo, funções); objetos paramatemáticos (noções que estão mais a nível didático, a nível de ensino, por exemplo, noção de igualdade) e objetos protomatemáticos (instância mais profunda que diz respeito a noções implícitas e que são necessárias na manipulação dos outros objetos. Por exemplo, a noção de padrão, de similaridade).

O alargamento do quadro exigido pelas necessidades da análise levou-me a propor uma teoria onde qualquer "objeto" pode aparecer: a função logarítmica é, obviamente, um objeto ("matemático"), mas também existe o objeto "escola", o objeto "professor", o objeto "aprender", o objeto "saber" "objeto, o objeto" dor de dente", o objeto "xixi" etc. (CHEVALLARD, 1992, p. 86-87, tradução nossa³²).

Interessante observar que objeto assume a forma de tudo e “qualquer coisa”, uma vez que sua existência está condicionada ao reconhecimento, à relação que mantém com o sujeito e com a instituição. O autor considera a noção de objeto “[...] o ‘material básico’ da construção teórica pretendida” (CHEVALLARD, 1992, p. 14, tradução nossa³³). A nosso ver, essa preocupação do autor ao definir que tudo é objeto deve-se ao fato de a teoria estar ligada ao universo antropológico, como foi dito antes. Dessa forma, ele explica que ampliar o escopo na definição de objeto faz com que passemos de uma “máquina” que pensa o universo didático de uma forma restrita para uma máquina com capacidade mais abrangente, e isso permite situar o didático dentro do antropológico (CHEVALLARD, 1992).

Aqui podemos fazer outras considerações e questionamentos ao nível da nossa pesquisa. Não nos aprofundarmos muito por ora, mas já queremos fazer algumas provocações a respeito das consequências dessa interpretação teórica para nosso objeto de estudo. É muito importante frisar que, para a TAD, o objeto é um ente que precisa ser reconhecido, precisa estar de alguma forma se relacionando com o sujeito e a instituição (que vamos explorar mais adiante). Dado que nosso universo maior é o campo da álgebra, que objetos compõem essa área em nível matemático, da instituição? E no nível da sala de aula? Esses objetos recebem alguma denominação especial? De que forma se relacionam com a generalização algébrica? Seria a generalização um objeto reconhecido pelos alunos? E pela escola?

Cabe aqui mais um esforço na tentativa de explicar ainda a noção de objeto. É um exemplo fornecido pelo próprio Chevallard: ele nos fala a respeito daquela

³² L'élargissement du cadre appelé par les besoins de l'analyse m'a conduit à proposer une théorisation où *tout* «objet» puisse apparaître: la fonction logarithme est, bien sûr, un objet («mathématique»), mais il y a aussi l'objet «école», l'objet «professeur», l'objet «apprendre», l'objet «savoir», l'objet «mal aux dents», l'objet «faire pipi» etc.

³³ [...] le «matériau de base» de la construction théorique envisagée.

sensação de, ao atingir o último degrau de uma escada, imaginarmos que há mais um abaixo. Essa impressão, segundo ele, não existe, não tem um nome, até que alguém, por exemplo, sofra uma entorse ou leve um susto. Pois bem, essa sensação, ou o incidente, é um objeto, pois pode existir para a instituição médica ou para a instituição da vida diária (CHEVALLARD, 1992). Portanto, os objetos são entidades materiais ou imateriais que têm sua existência validada pelo sujeito ou pela instituição. E o que é, pois, a instituição?

A palavra instituição parece ser autoexplicativa, mas o próprio autor mostra que, na sua teoria, instituição pode assumir outro rótulo além de escola, por exemplo.

Na prática, por causa do significado cotidiano da palavra, alguns de vocês podem se surpreender ao ver a quais objetos eu gostaria de anexar este rótulo. Uma escola é uma instituição, assim como uma sala de aula; mas há também a instituição "tutorial", a instituição "curso", a instituição "família". A vida cotidiana é uma instituição (em um determinado ambiente social), e assim é com o estado de amor (em uma determinada cultura), etc. (CHEVALLARD, 1992, p. 88, tradução nossa³⁴).

As instituições são, portanto, as instâncias que validam, que reconhecem algo, reconhecem alguma entidade que passará, então, a ser denominada objeto. Podem assumir, pela visão do autor, qualquer personagem. Chevallard (2003) explica que as instituições permitem (e impõem) que os sujeitos ocupem as variadas posições que ela oferece, numa espécie de jogo entre o fazer e o pensar.

Assim a turma é uma instituição (cujos dois cargos essenciais são o de professor e o de aluno), bem como o estabelecimento onde surgem outros cargos: os de creche, enfermeiro assessor de saúde etc., bem como esta instituição que inclui classes e estabelecimentos e que abrange cargos de todos os tipos, o sistema educacional (CHEVALLARD, 2003, p. 2, tradução nossa³⁵).

³⁴ Là encore, une institution peut être à peu près n'importe quoi. En pratique, à cause du sens courant du mot, certains d'entre vous pourront être surpris de voir à quels objets je pourrai être amené à accoler cette étiquette. Une école est une institution, de même qu'une classe; mais il y a aussi l'institution «travaux dirigés», l'institution «cours», l'institution «famille». La vie quotidienne est une institution (dans un milieu social donné), et il en est encore ainsi de l'état amoureux (dans une culture donnée), etc.

³⁵ Ainsi la classe est-elle une institution (dont les deux positions essentielles sont celles de professeur et d'élève), de même que l'établissement (où d'autres positions apparaissent: celles de CPE, d'infirmière conseillère de santé, etc.), de même encore que cette institution qui englobe classes et établissements et qui voit son être en positions de toutes sortes, le système éducatif.

No contexto deste trabalho, consideramos, por enquanto³⁶, como instituições a escola e a sala de aula. Mas vale colocar nesse momento a interpretação da ideia de instituição por Michèle Artigue. Ela coloca esse conceito como básico na TAD, já que, a seu ver, é a instituição que revela e compreende o indivíduo: “Para a TAD, os objetos básicos são as instituições. O indivíduo emerge de suas várias subjugações institucionais, ele é visível através de seus efeitos. Serve primeiro para revelá-los e entendê-los” (ARTIGUE, 2010, p. 42, tradução nossa³⁷). Voltando ao nosso contexto, que indivíduo a sala de aula pode revelar em nosso estudo? Nessa mesma publicação, Artigue (2010) já tinha explicado que uma das abordagens essenciais na TAD é “[...] o enfoque na noção de instituição e a consequente sensibilidade às questões de normas e valores institucionais e **como estes moldam os processos de ensino e aprendizagem**” (ARTIGUE, 2010, p. 37, grifo nosso, tradução nossa³⁸). Portanto, outro questionamento que também já podemos fazer é: que normas e valores das instituições escola e sala de aula moldam os processos de ensino e aprendizagem com relação à generalização no pensamento algébrico? Vamos adiante.

O outro elemento básico da TAD é sujeito. Chevallard o constrói a partir da noção de indivíduo. Curioso aqui! Já podemos notar que o conceito de sujeito é diferente do conceito de indivíduo. Indivíduo é um ser da espécie humana. Sujeito tem o sentido de um ser da instituição, alguém relacionado a uma instituição, ou a ela subordinado. Explica o autor: “Que eu seja uma instituição. Uma pessoa X torna-se sujeito de I quando se torna ‘sujeito’ de I. Metaforicamente, podemos dizer que X

³⁶ A ideia é incorporar os elementos da TAD ao nosso estudo à medida que forem sendo expostos.

³⁷ Pour la TAD, les objets de base sont les institutions. L'individu émerge de ses différent assujettissements institutionnels, il est visible à travers leurs effets. Il sert d'abord à les révéler et les comprendre.

³⁸ Sa centration sur la notion d'institution et la sensibilité qui en résulte aux questions de normes et valeurs institutionnelles sa insiqu'à la façon dont celles-ci façonnent les processus d'enseignement et d'apprentissage.

torna-se sujeito de I ‘ao entrar em I’” (CHEVALLARD, 1992, p. 89, tradução nossa³⁹). Muito interessante. Podemos, sim, partir da premissa de que o sujeito é um indivíduo, pois é um ser humano, mas, na perspectiva da TAD, não é sujeito se não estiver ligado a uma instituição. Ou seja, um indivíduo torna-se sujeito ao sujeitar-se às regras da instituição. Para Douglas (2007), as instituições são compostas de sujeitos. São os indivíduos que estão dispostos a sofrer em favor de um grupo e se organizam para ajudar o grupo a resolver os seus problemas.

Num trabalho publicado mais tarde, em 2003, Chevallard explora mais essa noção e diz que, primeiro, existe o indivíduo e que, depois, aparece a pessoa – o autor utiliza essa denominação. A pessoa é aquela que se submete a uma instituição. Entendemos que o autor usa a palavra pessoa⁴⁰ no sentido mais amplo, de sujeito. Esses vocábulos não são empecilhos aos objetivos deste trabalho. Estamos enunciando-os como forma de mostrar a profundidade desses termos e o cuidado do autor ao retomar seus apontamentos. Ele explica:

Em particular, o bebê está sujeito desde o início a esta instituição que é a linguagem, e mais precisamente a esta linguagem, embora ainda não fale: não pode fugir dela e, ao mesmo tempo, é ela quem vai permitir que ele fale, que lhe dará seu “poder” linguístico. Em geral, é pela sua subjugação, pelo fato de ser sujeito de uma multiplicidade de instituições, que o indivíduo X se constitui em pessoa (CHEVALLARD, 2003, p. 2, tradução nossa⁴¹).

Agora vamos tentar um entroncamento entre esses três elementos a partir das definições que vimos até aqui: pessoas tornam-se sujeitos de determinadas instituições. Sujeitos estão submetidos a essas instituições. Instituições, além de imporem suas regras aos sujeitos, o fazem também aos objetos quando o reconhecem como existentes. Objetos são entes que apenas adquirem vida após serem notados

³⁹ Soit I une institution. Une personne X devient un *sujet de I* quand elle devient «assujettie» à I. Métaphoriquement, on pourra dire que X devient un sujet de I «en entrant dans I».

⁴⁰ *Personne*, em francês.

⁴¹ En particulier, l’infans est assujetti d’emblée à cette institution qu’est le langage, et plus précisément à cette langue, bien qu’il ne la parle pas encore : il ne peut y échapper, et, emmême temps, c’est elle qui lui permettra de parler, qui lui donnera la «puissance» linguistique. D’une manière générale, c’est par ses assujettissements, par le fait qu’il est le sujet d’une multitude d’institutions, que l’individu x se constitue en une personne.

por sujeitos e instituições. Bem, é possível perceber que é praticamente impossível manter o foco em cada um desses elementos em separado, pois que é no enredamento entre eles que esses elementos ganham vida, ganham importância e, além disso, podem ser estudados em toda sua significância⁴². Muito intrincado tudo isso, reconhecemos. Mas o autor dá conta dessa ideia quando nos apresenta a noção de relação, e é ela que vai unir esses elementos.

Não foi por acaso que se optou por apresentar, primeiro, as noções de objeto, instituição e sujeito. A ideia foi mesmo mostrar que a noção de relação é de suma importância aqui. Sem ela, não é possível enxergar a grandeza e o alcance dessas três noções. Chevallard, no seu trabalho de 1992, ao apresentar esses elementos básicos, introduz essa noção logo após apresentar as ideias de objeto e instituição. Ele afirma que esses dois elementos se encaixam por meio da relação institucional. É por meio da relação institucional que um objeto passa a ser reconhecido pela instituição. Nas palavras do autor:

A cada instituição I está associado um conjunto de objetos, O_i , denominado conjunto de objetos institucionais (para I), que é o conjunto de objetos O que conhecemos, ou seja, para os quais existe uma relação institucional $R_i(O)$. Um objeto O é institucional para I , em outras palavras existe para I , se estiver definida uma relação (institucional) com O (CHEVALLARD, 1992, p. 88, tradução nossa⁴³).

Portanto, de uma forma muito breve e sem a pretensão de esgotar o assunto, pode-se dizer que, na relação institucional, emergem todas as práticas que envolvem o objeto O dentro de uma instituição I . O autor apresenta, logo depois, outra noção importante: a de relação pessoal, e a coloca nestes termos:

⁴² Impossível não voltarmos aqui, uma vez mais, nas palavras de Caraça (2010, p. 105): “Se tudo depende de tudo, como fixar nossa atenção num objecto particular de estudo? Temos que estudar tudo ao mesmo tempo?” Chevallard resolve essa questão ao focar as bases da TAD no estudo das relações entre três elementos principais. É o seu recorte da realidade, o seu isolado.

⁴³ A chaque institution I est associé un ensemble d'objets, O_i dit ensemble des objets institutionnels (pour I), qui est l'ensemble des objets O que connaît I , c'est-à-dire pour les quels existe un rapport institutionnel $R_i(O)$. Un objet O est institutionnel pour I , autrement dit existe pour I , si I a défini un rapport (institutionnel) à O .

Suponha, portanto, que a pessoa X entre na instituição I, e seja O um objeto institucional para I. O objeto O passará a "viver" para X sob a restrição da relação institucional $R_I(O)$. Em outras palavras, uma relação pessoal $R(X, O)$ será construída, ou mudará, sob a restrição $R_I(O)$ [...]. O objeto O pode ou não existir para X antes de entrar em I. De qualquer maneira, $R(X, O)$ (que pode ser igual ao conjunto vazio quando ele não existe) mudará. Direi então que há aprendizagem (em relação a O) (CHEVALLARD, 1992, p. 89-90, tradução nossa⁴⁴).

Alguns pontos a serem considerados são: enquanto a relação institucional aparece condicionando a vida dos seus objetos por meio de condições e restrições, a relação pessoal une sujeito e objeto segundo essa restrição $R_I(O)$. O sujeito (ou a pessoa) se apropria do objeto O segundo a relação que esse objeto mantém com a instituição I. O conceito de relação pessoal – $R(X, O)$ – é, então, conforme visto, muito abrangente. Ele define o que é a aprendizagem dentro da TAD⁴⁵ e tipifica como o sujeito conhece o objeto.

Toda a dinâmica cognitiva do indivíduo ocorre quando a relação pessoal de X com o objeto O muda. Para a TAD, o universo cognitivo do sujeito é formado pelo objeto e a relação pessoal que o sujeito mantém com ele. Fica muito difícil tratar da relação pessoal longe do conceito de relação institucional, pois os objetos que compõem a relação pessoal estão sob a regência de I. Por isso, à medida que o autor vai desenvolvendo suas ideias, esses conceitos ficam cada vez mais intrincados e relacionados entre si. Nos seus trabalhos publicados em 1992 e 2003, Chevallard vai explicitando suas ideias à medida que outros elementos passam a ser considerados. Vejamos.

Não há, segundo Chevallard (1992), uma relação única entre o objeto e a instituição. A posição ocupada pelo sujeito em I é que vai definir sua relação com o objeto. O autor simboliza essa situação como $R_I(p, O)$. Assim, cada instituição possui

⁴⁴ Supposons donc que la personne X entre dans l'institution I, et soit O un objet institutionnel pour I. L'objet O va se mettre à «vivre» pour X sous la contrainte du rapport institutionnel $R_I(O)$. En d'autres termes, un rapport personnel $R(X, O)$ va se construire, ou va changer, sous la contrainte $R_I(O)$ [...] L'objet O pouvait ou non exister pour X avant son entrée dans I. Dans tous les cas, $R(X, O)$ (que l'on peut poser égal à l'ensemble vide quand il n'existe pas) va changer. Je dirai alors *qu'il y a apprentissage* (relatif à O).

⁴⁵ Abordaremos a ideia de aprendizagem na TAD logo a seguir com a devida profundidade que nos interessa.

sua gama de objetos, os quais ganham vida – emergem, nascem – para o sujeito “[...] sob a restrição da relação institucional $R_I(O)$. Em outras palavras, uma relação pessoal $R(X, O)$ será construída, ou mudará, sob a restrição $R_I(O)$ ” (CHEVALLARD, 1992, p. 89, tradução nossa⁴⁶). Daí o autor mostra que não só a ideia de instituição é base na teoria, mas também o que ele vai chamar de relação institucional.

A teoria do conhecimento delineada até agora sobre os indivíduos é transferida para instituições. Dado um *objeto* O , uma instituição I , e uma posição p em I , chamamos *relação* institucional para O em posição p , e escrevemos $R_I(p, O)$, a relação com o objeto O , que idealmente deveria ser a dos sujeitos de I na posição P (CHEVALLARD, 2003, p.2, grifo do autor, tradução nossa⁴⁷).

Vemos que o autor vai se aprofundando nesses elementos primitivos de tal forma que vai havendo quase uma reformulação do seu *status* teórico. Considerando que a TAD começou a ser desenvolvida em 1991, o trabalho de 2003 citado acima é produto de um amadurecimento da teoria. Portanto, é possível perceber que o autor vai retomando esses apontamentos revestindo-os de definições mais amplas e ancoradas em outros elementos. A noção de relação institucional que ora era simbolizada por $R_I(O)$ ganha uma ampliação no seu escopo com um novo elemento: a posição p da pessoa dentro da instituição. Ainda em 1991, o autor já traz essa definição.

[...] às noções previamente enumeradas são adicionadas aqui as de sujeito (de uma instituição) e de posição (dentro de uma instituição). A noção de relação institucional emerge modificada: ao invés de relação institucional de I para O , ou $R_I(O)$, é necessário especificar a relação institucional para O para a posição p , ou $R_I(p, O)$. Uma pessoa X torna-se sujeito, na posição p , de uma instituição I ao passar a ocupar a posição p em I , na qual submete suas relações pessoais $R(X, O)$ à pressão das relações institucionais $R_I(p, O)$. Na realidade, a pessoa X nada mais é do que o surgimento de um

⁴⁶ [...] sous la contrainte du rapport institutionnel $R_I(O)$. En d'autres termes, un rapport personnel $R(X, O)$ va se construire, ou vachanger, sous la contrainte $R_I(O)$.

⁴⁷ La théorie de la connaissance es quis sée jusqu'ici à proposdes individus se transfere aux institutions. Étant donné un objet o , une institution I , et une position p dans I , on appelle rapport institutionnel à o en position p , et on note $RI(p, o)$, le rapport à l'objet o qui devrait être, idéalement, celui des sujets de I en position p .

complexo de subjugações institucionais (CHEVALLARD, 1991, p. 162, tradução nossa⁴⁸).

Se a pessoa é um complexo de subjugações institucionais, de fato a posição p ocupada por ela vai definir não só o conjunto de objetos que ela faz vir à tona como também explica a maneira como essa pessoa lida com O . Mas essa relação é bem complexa e dá origem a uma série de fenômenos. Chevallard (1991) explica que o fato de X se submeter ao “campo de força” das relações institucionais, pelo menos duas situações derivam daí. Primeiro, as relações pessoais $R(X, O)$ se veem constrangidas a seguir o que determina a instituição, fazendo com que esta busque um sujeito puro, um sujeito “bom”, o que na maioria das vezes não acontece. E, além disso, o que se observa é que as intervenções específicas que ocorrem em I têm o objetivo de transformar as relações pessoais de acordo com a conformidade de I .

Além disso, em cada instituição I , existe o que o autor chama de tempo institucional t_i :

[...] a cada “instante” t , novos objetos institucionais aparecem, enquanto outros desaparecem (para serem, por exemplo, apenas institucionalmente visíveis a partir de I). O mesmo se aplica às relações institucionais, $R_i(O, t)$. Em geral, todas as noções relacionadas a I dependem de t_i (CHEVALLARD, 1992, p. 89, tradução nossa⁴⁹).

Dessa forma, percebe-se que a relação entre o sujeito e o objeto muda de acordo com o tempo. E para modelar essa situação, Chevallard (1992) define o conceito de contrato institucional – $C_i(t)$: é aquele que vai lidar com a relação institucional no tempo. Vem assim simbolizado: $(O, R_i(O, t))$. O contrato institucional

⁴⁸ [...] aux notions précédemment énumérées viennent s'ajouter ici celles de sujet (d'une institution) et de position (au sein d'une institution). La notion de rapport institutionnel en ressort modifiée: plutôt que de rapport institutionnel de I à O , soit $R_i(O)$, il convient de spécifier alors le rapport institutionnel à O pour la position p , soit $R_i(p, O)$. Une personne X devient le sujet, en position p , d'une institution I en venant occuper la position p dans I , en quoi elle soumet ses rapports personnels $R(X, O)$ à la pression des rapports institutionnels $R_i(p, O)$. En réalité, la personne X n'est rien d'autre que l'émergent d'un complexe d'assujettissements institutionnels.

⁴⁹ [...] à chaque «instant» t , de nouveaux objets institutionnels apparaissent, tandis que d'autres disparaissent (pour n'être plus, par exemple, qu'institutionnellement visibles depuis I). Il en va de même des rapports institutionnels, $R_i(O, t)$. D'une manière générale, toutes les notions relatives à I dépendent de t_i .

dá origem a um subconjunto, nas palavras de Chevallard (1992), chamado de meio institucional – $M_I(t)$. Nesse subconjunto, os elementos do contrato institucional assumem uma performance estável, ou seja, aparecem como óbvios, transparentes e não problemáticos para os sujeitos (CHEVALLARD, 1992).

Perceba o leitor que toda a teoria está sendo construída sob uma teia gigante de relações e que o papel da instituição vai ganhando notoriedade explícita. Condensando essas noções até aqui, de maneira bem superficial podemos dizer que os objetos passam a existir por meio da relação que o sujeito mantém com eles, mas sob restrições institucionais. Objeto, sujeito e instituição, portanto, apresentam-se num emaranhado de relações que ora contribuem para dar vida a esses entes, ora restringem sua existência sob suas regras. Ou seja, o conceito de relação é também notório aqui.

O papel da instituição é tão manifesto na TAD que, segundo o autor,

[...] uma pessoa nada mais é do que o surgimento de um complexo de subjugações institucionais. O que é chamado de “liberdade” da pessoa aparece então como o efeito obtido por jogar uma ou mais subjugações institucionais contra as outras (CHEVALLARD, 1992, p. 91, tradução nossa⁵⁰).

Além disso, o fato de os sujeitos ocuparem posições p diversas em I faz com que esta não seja um espaço homogêneo, o que torna, segundo o autor, a definição de instituição bem mais complexa (CHEVALLARD, 1992).

No presente estudo, vamos, portanto, estudar a relação institucional $R_I(p, O)$ nestes moldes: o sujeito aluno e suas relações com a generalização no campo algébrico e o sujeito professor na mesma situação. Portanto, as ferramentas de análise da TAD nos permitem pressupor que essa posição do sujeito em I determina essas relações com os objetos. Podemos, então, já falar aqui de comportamentos

⁵⁰ [...] qu'une personne n'est en fait rien d'autre que l'émergent d'un complexe d'assujettissements institutionnels. Ce qu'on nomme «liberté» de la personne apparaît alors comme l'effet obtenu en jouant un ou plusieurs assujettissements institutionnels contre d'autres.

esperados institucionalmente. Os professores submetem-se a determinadas condições da instituição escola e submetem os alunos a essas condições.

Dessa forma, o conceito generalização em álgebra (ainda tratada aqui de forma bem ampla) chega à sala de aula por meio de programas institucionais, livros didáticos e, ainda, por meio da organização didática do professor. Um dos objetivos da pesquisa consiste em analisar de que forma tais tratados atingem o conceito generalização, ou seja, descrever a relação institucional que envolve esse tema. Além disso, os alunos lidam com ele por meio de tarefas que são propostas. É necessário, então, descrever essa relação pessoal $R(X, O)$ dos alunos com o objeto generalização. A TAD desenvolveu uma ferramenta metodológica que permite modelar essas interações entre o sujeito e o objeto⁵¹, mas isso é assunto para um pouco mais adiante. Ainda há alguns conceitos da teoria que necessitam ser abordados.

A ideia de aprendizagem na TAD e como ela está envolvida com o conceito de instituição precisa ser explorada com destaque. Foi dito anteriormente que, segundo esse modelo teórico, a aprendizagem ocorre quando há uma mudança na relação pessoal do sujeito com o objeto. Ora, se falamos que há uma mudança, isso pressupõe que sujeito e objeto já se “conheciam” de alguma forma. Em parte. Chevallard (1992) nos fala que a relação pessoal entre X e O , após sua entrada na instituição, será construída ou será alterada, sempre sob as restrições $R_i(O)$ e C_i . Ou seja, temos que o sujeito pode ou não conhecer o objeto antes de se submeter a I . Mas que, independentemente disso, haverá uma mudança nessa relação⁵² e, portanto, haverá uma aprendizagem.

⁵¹ Trata-se do conceito de praxeologia (CHEVALLARD, 1998).

⁵² Aqui supomos que o autor fala em mudança na relação mesmo para objetos antes desconhecidos para o sujeito, pois a instituição acaba impondo suas restrições e condições de forma que o sujeito, caso não conheça O de antemão, acaba tendo contato com ele sob a forma institucionalmente prevista. Mas é, na visão da TAD, uma aprendizagem. A consequência aqui, em termos do nosso estudo, é que os objetos matemáticos são apresentados paulatinamente e há uma gama deles que já foram apresentados no decorrer do Ensino Fundamental, e daí alguns questionamentos podem ser feitos: de que forma o aluno se apropria desse objeto e em que medida essa apropriação influencia na construção de conceitos futuros? Além disso, se a relação pessoal pode mudar, ela muda em relação a quê? De que instrumentos a instituição dispõe para reconhecer essas mudanças?

Alguns constructos muito interessantes derivam da noção de aprendizagem pelo viés da TAD. Vimos como o elemento instituição é peso na teoria. De fato, pressupõe-se que o objeto de que o sujeito deve se apropriar está sob a regência de I, ou seja, existe uma relação institucional entre O e I - $R_I(O)$. Portanto, o sujeito X relaciona-se com um objeto institucionalmente reconhecido, validado pelas cláusulas do contrato institucional C_I . Se essa relação de X estiver de acordo com $R_I(O)$, ou seja, se o sujeito se apropria do objeto da maneira que a instituição prevê e reconhece, diz-se que X é um “bom sujeito” de I (CHEVALLARD, 1992). Notamos então que, pela aprendizagem, ocorre uma mudança no sujeito, na pessoa (aquela que “vive” na instituição) e não no indivíduo. Portanto, aprendizagem na TAD é uma mudança que ocorre sob a jurisdição da instituição. E se não ocorre, é porque a relação pessoal não está conforme seus postulados. Assim, aprendizagem sob esse enfoque não tem relação com fatores cognitivos e biológicos. Ela está estritamente ligada ao que prevê a instituição e seus contratos.

Em Chevallard (2003), vemos que a relação pessoal $R(X, O)$ vem de uma gama de relações institucionais $R_I(p, O)$; $R_I(p', O)$; $R_I(p'', O)$, uma vez que o sujeito já está submetido (e influenciado) a diversas relações institucionais ao longo do tempo. Como já mencionamos anteriormente, isso faz com que, primeiro, a relação pessoal $R(X, O)$ nunca estará perfeitamente em conformidade com a institucional $R_I(p, O)$ – o que faz de X quase sempre um mau sujeito de I – e, ainda, dificilmente teremos uma relação pessoal no sentido puro, original, pois o sujeito reflete as relações institucionais a que esteve submetido. A impressão é a de que quanto mais se adentra na noção de instituição, outros desdobramentos parecem ser necessários na análise dos fenômenos. O próprio autor levanta questões e as deixa em aberto para nós. Observemos essa provocação que ele faz ao enunciar o conceito de instituição:

Eu acrescentaria que certas análises pedem uma noção adicional: a de um objeto institucionalmente visível de I, e que não é, entretanto, um objeto institucional para I, e que não é por tudo isso um objeto institucional para I.

Não vou me alongar mais sobre esse ponto nesta apresentação (CHEVALLARD, 1992, p. 88, tradução nossa⁵³).

O que seriam objetos visíveis da instituição, mas que não são objetos para a instituição? Convidamos o leitor a pensar conosco. Aqui, em nosso estudo, portanto, faz-se oportuno analisar cuidadosamente de que forma a instituição escola prevê o estudo do tema generalização e em que medida ocorre essa aprendizagem. Vamos procurar relacionar como é o “sujeito bom” nesse sentido e que elementos contribuem para isso. Além disso, vamos analisar se há elementos que não estão previstos nessa relação e de que forma eles aparecem⁵⁴.

Outro ponto da teoria que gostaríamos de destacar (ou retomar) aqui quando o autor constrói a ideia de aprendizagem na TAD é este: “O objeto O pode ou não existir para X antes de entrar em I” (CHEVALLARD, 1992, p. 89). Aqui o papel da instituição torna-se sobremaneira relevante. É ela que dá a vida ao objeto. A gênese de todos os objetos no universo didático que estamos considerando nessa pesquisa depende da instituição; só ocorre sob sua jurisdição. Portanto, vamos também elencar que objetos são esses e se eles, de fato, já existem para o sujeito aluno.⁵⁵

Antes de encerrarmos esta seção, trazemos, no quadro 1, um pequeno compilado dos elementos mencionados até aqui dada a complexidade do que foi exposto.

⁵³ J'ajoute encore que certain es analyses appellent une notion supplémentaire: celle d'objet institutionnellement visible depuis I, et qui ne soit pas pour autant un objet institutionnel pour I. Je ne m'arrêterai pas davantage sur ce point dans cette présentation.

⁵⁴ Haverá um momento em que retomaremos todas essas pontuações e questionamentos.

⁵⁵ Nesse caso, precisamos levar em conta o tempo institucional t_i , já que, conforme foi visto, as relações se modificam em função desse tempo, o que acarreta o aparecimento e o desaparecimento de objetos institucionais (CHEVALLARD, 1992).

Quadro 1 – Elementos da TAD - Símbolos

Elemento da TAD	Símbolo	Breve descrição
Objeto	O	Elemento básico da teoria. Tudo é objeto. Sua existência está condicionada ao seu reconhecimento pela instituição ou pela pessoa.
Instituição	I	Instância que reconhece e valida a existência dos objetos e das pessoas.
Pessoa, Sujeito	X	É o indivíduo que se submete a uma instituição.
Relação Institucional	$R_i(O)$	Prática que reconhece o objeto naquela instituição e o coloca sob sua restrição.
Relação Institucional	$R_i(p, O)$	Prática em que o sujeito numa posição p da instituição reconhece o objeto.
Relação Pessoal	$R(X, O)$	Prática que permite ao sujeito reconhecer o objeto.
Objetos Institucionais	O_i	Conjunto de objetos de determinada instituição.
Tempo Institucional	t_i	Parâmetro temporal em que os objetos podem aparecer ou desaparecer numa instituição.
Contrato Institucional	C_i	Define a validade do tempo institucional.
Meio Institucional	M_i	Subconjunto de C_i que tem uma performance estável, óbvia e previsível para I.

Fonte: Construção nossa, 2022.

Até aqui, já temos noções que nos permitem compor o pilar de nosso estudo. Antes de interpretarmos a realidade pretendida por nós e responder aos questionamentos feitos inicialmente, foi preciso pavimentar bem essa via. Daqui em diante, pois, nossas ferramentas de análise irão assumir os conceitos previstos pela TAD. Todas essas construções com os elementos fundamentais da teoria (objeto, sujeito, instituição e relação) que expusemos anteriormente são “traduzidas” pelo autor de maneira simbólica e axiomática. Como ele mesmo diz: “Acrescento apenas que tornarei minha apresentação um tanto formal, quase axiomática, mesmo que não me preocupe em enumerar explicitamente os “axiomas” em que se baseia a teoria” (CHEVALLARD, 1992, p.14, tradução nossa⁵⁶).

⁵⁶J'ajoute seulement que je donnerai à mon exposé une allure quelque peu formelle, quasi axiomatique, même si je ne prends pas la peine d'énumérer explicitement les «axiomes» sur les quels repose la théorie.

3.1.2 A relatividade institucional do conhecimento

Como já foi dito, Chevallard desenvolve sua teoria paulatinamente e traz outras noções que vão dando sentido e profundidade aos elementos básicos da TAD. Podemos dizer com segurança que a obra de Chevallard, uma ampliação da Teoria da Transposição Didática (CHEVALLARD, 1982), é de uma envergadura tal que o próprio autor sente a necessidade de desenvolvimentos nas suas abordagens. Assim, no seu estudo publicado em 2003, ele traz a abordagem sobre a **relatividade institucional do conhecimento**. Optamos por tratar esse tópico em seção separada, pois ele é bem abrangente e, além disso, há algumas questões que gostaríamos de levantar aqui também.

É necessário, primeiro, explorar outro conceito presente na TAD: universo cognitivo. Na seção anterior, vimos que o indivíduo X interage com o objeto O por meio da relação pessoal $R(X, O)$. Se essa relação existe, Chevallard (2003) afirma que essa interação é “não-vazia”. Usando sua abordagem axiomática, isso significa que $R(X, O) \neq \emptyset$, ou seja, o indivíduo manipula, usa o objeto O, logo essa é uma relação não-vazia. Além disso, dizer que existe uma relação pessoal entre X e O significa, na visão do autor, especificar o caminho que X sabe O.

Nesse ponto, enxergamos um desdobramento gigante no conceito de relação pessoal, pois ela não nos fala de um lugar específico, de um movimento previsível. Falar de caminhos em que o indivíduo sabe o objeto significa pode indicar infinitas possibilidades. E, para a TAD, isso é chamado de universo cognitivo de X, $U(x)$, ou seja, é o conjunto formado pelo objeto e a relação pessoal que o indivíduo mantém com ele. Na linguagem axiomática, é assim representada: $U(x) = \{(O, R(X, O)) / R(X, O) \neq \emptyset\}$. Chevallard (2003) explica que “[...] o adjetivo cognitivo não é levado aqui em seu significado intelectualista: eu tenho uma relação pessoal com a minha escova de

dentes, com a máquina de café no refeitório, com o pedal de freio do meu carro etc.⁵⁷” (CHEVALLARD, 2003, p. 1, tradução nossa⁵⁸).

Nesse estudo de 2003, Chevallard argumenta que a noção de instituição aparece para explicar a formação e a evolução desse universo cognitivo $U(x)$ do sujeito.⁵⁹ E nesse trabalho, ele deixa claro que a característica da instituição, quase seu *modus operandi*, é permitir e impor a seus “súditos” não só ocupar posições p diversas, mas, principalmente, colocar em jogo maneiras claras de fazer e de pensar. Além disso, o universo cognitivo de X forma-se e evolui a partir do momento em que o indivíduo entra em certas obras de I, obras essas constituídas de objetos. Portanto, ao ocupar essas posições diversas nas instituições, o indivíduo relaciona-se com os objetos de I, constituindo $R(X, O)$, pavimentando seu caminho na direção de O e, ainda, formando seu universo cognitivo sujeitando-se a I. Além disso, é por meio dessa subjugação que o indivíduo se constitui em pessoa⁶⁰. Nas palavras de Chevallard (2003, p. 2, tradução nossa⁶¹), “desde o nascimento, todo indivíduo está, portanto, sujeito – isto é, sujeito e apoiado por – instituições múltiplas, como a sua família, das quais ele se torna o sujeito”.

Mais uma vez está claro aqui o peso da noção de instituição no desenvolvimento da TAD. Chevallard defende que o universo cognitivo das relações pessoais é uma teoria do conhecimento, e a transfere, então, para as instituições. A relação institucional do indivíduo na posição p com o objeto O – $R_I(p, O)$ – dá origem

⁵⁷ Como bem colocam Kluth e Almouloud (2018, p.5), apesar de explicar que o adjetivo cognitivo não tem relação com uma abordagem intelectualista, Chevallard (2003) não esclarece a qual concepção o adjetivo está relacionado.

⁵⁸ [...] l’adjectif cognitif n’est pas pris ici dans son acception intellectualiste courante: j’ai un rapport personnel à ma brosse à dents, à la machine à café de la cafétéria, à la pédale de frein de mavoiture, etc.

⁵⁹ Tal concepção não estava no seu trabalho de 1992, o qual usamos na fundamentação teórica na seção anterior, o que mostra como a TAD foi sendo revista, reformulada e ampliada em seus conceitos fundamentais.

⁶⁰ Aqui usamos também a expressão sujeito, pois está no seu trabalho de 1992, o primeiro de Chevallard sobre os elementos da TAD. Já dissemos que esses dois termos não são empecilhos a nossas abordagens, e acreditamos que tanto pessoa quanto sujeito designam o indivíduo que já está sob a regras de I, essa sim uma abordagem mais robusta e de nosso interesse aqui.

⁶¹ Dès sa naissance, tout individu est ainsi as sujetti à – c’est-à-dire à la fois soumis à et soutenu par – de multiples institutions, telle sa famille, dont il devient le sujet.

ao universo cognitivo da posição p da instituição. É, portanto, o conjunto formado pelo objeto O e a relação institucional que o envolve. De forma simbólica, representa-se: $U_i(p) = \{(O, R_i(p, O)) / R_i(p, O) \neq \emptyset\}$. Se existir uma relação institucional entre p (ou seja, o sujeito na posição p) e O , diz-se que I sabe O . Uma observação muito importante dessa relação é que esses sujeitos em p não precisam saber todos os objetos O da instituição. Assim, $R_i(p, O) = \emptyset$.

A consequência do fato de X , com seu universo cognitivo $U(X)$, submeter-se a I é que suas relações pessoais serão remodeladas e, para Chevallard (2003), essa relação pessoal $R(X, O)$ tende a assemelhar-se à relação institucional $R_i(p, O)$. Se isso não acontece, fala-se que X é um mau sujeito de I , conforme abordado na seção anterior. Daqui, depreende-se que o conjunto de relações pessoais surge das múltiplas relações institucionais a que o indivíduo está submetido. “Em geral, nossas relações pessoais são, portanto, o resultado da história de nossas subjugações institucionais do passado e do presente” (CHEVALLARD, 2003, p. 3, tradução nossa⁶²). É tudo tão intrincado que o próprio autor diz haver uma dialética entre instituição, suas obras (o conjunto de objetos que vive em I) e os sujeitos.

O universo cognitivo, portanto, nos fala das maneiras de “saber” o objeto O . Chevallard explica que é necessário ampliar o significado desse verbo: saber pode indicar várias maneiras de conhecer. E é dessa forma que ele nos apresenta a ideia de relatividade institucional. Sinteticamente, a relatividade institucional do conhecimento nos fala que há infinitas maneiras de conhecer um objeto. Nas palavras do autor:

Eu conheço um ator de cinema tão famoso no sentido de que todos o conhecem; mas não o conheço como seus filhos o conhecem, o que por si só difere da maneira como seus pais o conhecem, ou seus amigos de infância, ou seus colegas de trabalho etc. A relatividade institucional do conhecimento é marcada tanto pela existência de uma diversidade praticamente ilimitada de modos de “conhecer” um objeto O quanto pela inexistência de uma “boa

⁶² D'une manière générale, nos rapports «personnels» sont ainsi le fruit de l'histoire de nos assujettissements institutionnels passés et présents.

relação" universal, reconhecida como tal em qualquer instituição. (CHEVALLARD, 2003, p. 3, tradução nossa⁶³).

O autor também nos diz que pode haver uma equivalência entre $R(X, O)$ e $R_I(p, O)$ e não haver entre $R(X, O)$ e $R_{I'}(p', O)$, ou seja, a relação pessoal de X pode estar em conformidade com a instituição I e a mesma relação não estar "adequada" em I'. Mas isso depende da posição p ocupada pela pessoa na instituição. Assim, o julgamento de conformidade da relação depende de um roteiro pré-definido que serve de padrão na análise dessas relações. O assunto é bem complexo e depende de várias considerações. Vamos levantar algumas situações possíveis dentro do que prevê a teoria.

Quando uma pessoa (na posição p de I) diz que X conhece O, X está em conformidade com o que preveem os acordos institucionais entre X, I e O. Ou seja, tudo é perfeito, e X é um sujeito bom de I. Porém, queremos aqui argumentar que X pode não conhecer O de fato, mas apenas os acordos previstos, os combinados de I, ou seja, X se sujeita de tal forma que sabe o que I quer, sabe quais são as regras, o contrato de I. Portanto, sujeita-se a I, mas não se apropria de O em toda sua extensão. A nosso ver, nem a instituição nem o sujeito na posição p dispõem de meios de verificar com profundidade se X de fato conhece O, já que os meios disponíveis são rapidamente absorvidos por X. Isso só vem à tona quando outra instituição, I', trata do mesmo objeto O. De fato, já que I' é outra instituição, ela tem outras regras, outros contratos, e nem sempre o mesmo objeto O recebe a mesma abordagem em instituições diferentes.⁶⁴

Por outro lado, quando uma pessoa em I diz que X não conhece O, ela também está se baseando num relatório de condutas institucionais. Assim, X não está de

⁶³ Je connais le célèbre acteur de cinéma au sens où tout le monde le connaît; mais je ne le connais pas à la manière dont le connaissent ses enfants, qui diffère elle-même de la manière dont le connaissent ses parents, ou ses amis d'enfance, ou ses camarades de travail, etc. La relativité institutionnelle de la connaissance est marquée à la fois par l'existence d'une diversité pratique ment limitée de façons de «connaître» un objet o et par l'inexistence d'un «bon rapport» universel, reconnu en toute institution.

⁶⁴ Chevallard (2003) trata desse assunto quando mostra como os professores de física e de matemática lidam com o cálculo. Por vezes, espera-se que determinado conteúdo tenha sido adquirido em outra disciplina, em outra instituição I'. Quando isso não ocorre, pode-se dizer que I' não fez seu trabalho, por exemplo.

acordo com os pressupostos de I. Portanto, não conhecer O pode significar, no viés da TAD, que X não se apropriou de O conforme determina a instituição I. Desse modo, a nosso ver, duas situações derivam daí: ou X se apropriou de O conforme outra instituição I' (que pode ser até reconhecida por I), ou X se apropriou de O de uma forma não reconhecida por nenhuma instituição (a não ser o próprio sujeito). Trazendo para o contexto da escola, a nosso ver, o único modo de X não conhecer o objeto O é quando ele ainda não foi, de forma alguma, apresentado a ele.

Se buscarmos o campo da álgebra, de forma muito superficial aqui, na introdução da linguagem algébrica, o aluno é, de fato, colocado em contato com muitos termos e conteúdos novos. Contudo – e aqui trazemos algumas hipóteses já de acordo com esses elementos da TAD – a forma como o aluno se relaciona com esses conteúdos pode nos revelar alguns aspectos. Por ora, mencionamos três: pode-se conhecer os contratos institucionais dominantes a que o estudante está submetido até então, pode trazer à tona formas de conhecer o objeto reconhecidas por outras instituições e, ainda, pode revelar uma relação pessoal não institucionalizada. Isso tudo nos leva a crer que não podemos abandonar em nossas análises, de forma alguma, o caráter relativo do conhecimento institucional.

Explorando um pouco mais esse conceito, vejamos o que diz o autor:

Em outras situações, a referência exclusiva, que se tornou natural para y, a uma relação institucional dominante pode mascarar a existência prática de outros modos de conhecimento do objeto, o que levará y a uma visão empobrecida da realidade cognitiva, sob risco de enganá-lo (CHEVALLARD, 2003, p. 5, tradução nossa⁶⁵).

Aqui ele está chamando de Y um examinador que deverá avaliar o conhecimento de X em uma determinada relação institucional. O que o autor nos fala é que se Y toma por referência a prática dominante em I, quase sempre terá uma visão de X que pode enganá-lo. Mas aqui questionamos: existe a possibilidade de Y avaliar o conhecimento de X de outra forma que não seja por meio dos parâmetros

⁶⁵En d'autres situations, la référence exclusive, devenue naturelle pour y, à un rapport institutionnel dominant peut lui masquer l'existence pratique d'autres modes de connaissance de l'objet, ce qui conduira y à une vision appauvrie de la réalité cognitive, au risque de l'induire en erreur.

balizados de I? É importante insistir nesse aspecto, dado que a forma como Y avalia X também diz respeito à forma como o conteúdo, o objeto, será colocado para X.

Uma última consideração neste momento: Chevallard (2003) chama de não conformidade a I aqueles casos em que o sujeito não sabe manejar o objeto O pelos parâmetros de I, mas a seu modo (o que parece ser a modo específico de outra instituição). Então, pode-se questionar: o aluno produz algum tipo de conhecimento que não é validado institucionalmente? Portanto, se neste trabalho pressupomos que o aluno no contato com a linguagem algébrica pode revelar determinados níveis de conhecimento com relação à generalização em álgebra, isso significa que precisamos analisar:

- de que forma o conteúdo é abordado nos contratos institucionais;
- de que forma o conteúdo é abordado pelo professor;
- de que forma a abordagem institucional e do professor aparecem na relação do aluno com o objeto investigado.

Nota-se que instituição é realmente conceito chave na TAD. Nas palavras de Wosniak; Bosch e Artaud (2016, p. 1, tradução nossa⁶⁶), a originalidade dos estudos de Chevallard está em “[...] levar em conta a relatividade institucional do conhecimento, na qual fundamenta sua análise dos fenômenos didáticos”. Para as autoras, associar a análise do pensamento matemático ao estudo das práticas institucionais é o grande diferencial na teoria de Chevallard (WOSNIAK; BOSCH; ARTAUD, 2016, p. 1, tradução nossa).

Assim, neste estudo, estamos agora diante de uma nova perspectiva. O que foi apresentado no capítulo 1 precisa de contornos mais específicos ao nível da TAD. O que estamos nomeando como uma perspectiva escalar na generalização nos parece tratar-se de modos particulares de conhecimento. Ou seja, o aluno, ao lidar com o pensamento algébrico, pode não corresponder à relação institucional $R_i(p, O)$ ideal. De fato, ele já se submeteu a inúmeras outras instituições, e a forma como se relaciona com o objeto generalização – $R(X, O)$ – nem sempre faz dele um bom sujeito

⁶⁶ [...] to take into account the institutional relativity of knowledge, on which he bases his analysis of didactical phenomena.

de I. Por isso, julgamos que este estudo precisa ser tratado aqui como uma investigação a respeito da relatividade institucional que envolve o campo algébrico e sua relação com o sujeito aluno, com o objeto generalização e com a instituição escola.

Assim, de forma bem ampla, já podemos dizer que a TAD vai nos auxiliar nos seguintes momentos:

- Na análise da relação institucional $R_I(p, O)$ esperada pela escola, aquela considerada ideal e que faz, ou faria, de X um sujeito “bom”, onde p é a posição ocupada pelo professor e também pelo aluno, e O é o objeto generalização.
- Na análise da relação pessoal $R(X, O)$ do aluno com o objeto generalização para investigarmos se X se comporta como um “bom ou mau sujeito”.
- Na investigação da relatividade institucional que envolve o campo algébrico⁶⁷.

A análise da relação institucional $R_I(p, O)$ pressupõe que tenhamos acesso aos documentos oficiais que regulam o currículo no tocante ao campo algébrico. São esses documentos que são a referência para que o aluno se “institucionalize”. Quando esse aluno estuda tópicos em álgebra, o que ele faz é conhecer o objeto por meio de uma relação com ele. Essa relação leva em conta interações entre X e O e entre p e O que precisam ser descritas.

Bosch e Chevallard (1999) explicam que o saber matemático é o resultado de uma ação humana institucional, pois que esse saber se transpõe em instituições. Mas é preciso um método para analisar essas práticas institucionais, pois, assim, têm-se meios de descrever e estudar as condições da realização dessas práticas. Já que vamos tratar da análise de práticas institucionais, vamos utilizar também esse filtro

⁶⁷ Conforme já dissemos, estamos refazendo os questionamentos do capítulo 1 à medida que novos instrumentos teóricos são apresentados. No final deste capítulo, o leitor poderá conferir hipótese, questão de pesquisa e objetivos reformulados à luz da TAD.

metodológico. É dessa ferramenta que trataremos na próxima seção: o modelo praxeológico.

3.1.3 O modelo praxeológico na TAD

Do que foi exposto até aqui em termos de construção teórica, fica destacado que a espinha dorsal da TAD é a noção de instituição e relação institucional. Os entes básicos objeto (O) e sujeito (X) ganham vida pela validação institucional, e o conceito de relação – *rapport* – faz uma ligação quase dialética entre eles. Assim, Chevallard (1998, 1999) dá continuidade à sua teoria buscando desenvolver um método que desse conta de descrever e analisar essas práticas institucionais. Mais uma vez o autor busca fundamentar suas ideias em concepções que fogem de uma visão particularista do mundo. Ou seja, ele almeja, a todo instante, localizar sua teoria num espaço amplo, sem perder de vista aquele apanhado antropológico que já foi exposto aqui. E o autor desenvolve, então, o modelo praxeológico, a praxeologia: “[...] admite-se, de fato, que toda atividade humana regularmente desempenhada pode ser resumida em um único modelo, que aqui se resume pela palavra praxeologia” (CHEVALLARD, 1998, p. 1, tradução nossa⁶⁸).

O modelo praxeológico é composto por quatro elementos, que, juntos, são capazes de modelar a atividade humana, as práticas sociais, a atividade matemática, na visão de Chevallard (1999)⁶⁹. Vamos abordá-los separadamente, dada a sua importância na análise dos dados deste estudo.

Constrói-se a noção de praxeologia começando pelo conceito de **tarefas e tipos de tarefas**. A ideia é que toda a prática institucional pode ser analisada por meio de um sistema de tarefas. Quando levamos em conta o universo metodológico da matemática numa sala de aula, por exemplo, fala-se em tarefas de estudo. Mas, ao construir o conceito, o autor fornece alguns exemplos e frisa que toda tarefa é

⁶⁸ [...] on y admet en effet que *toute* activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle *unique*, que résume ici le mot de *praxéologie*.

⁶⁹ Tarefa, técnica, tecnologia, teoria.

expressa por um verbo: varrer uma sala, cumprimentar o vizinho, desenvolver uma expressão matemática dada etc. (CHEVALLARD, 1998).

Usando sua abordagem simbólica e axiomática, o autor mostra que há **tarefas τ** e **tipos de tarefas T**⁷⁰. Os tipos de tarefas T são expressos por verbos e objetos bem precisos. Por exemplo: calcular a raiz da equação é um tipo de tarefa, mas calcular não é. Entende-se que a noção de tarefa τ é a mais ampla e abrangente. E daí depreende-se a ideia de tipos de tarefas T. Além disso, Chevallard (1998) também fala em gêneros de tarefas, que seria uma tarefa composta por um verbo sem uma especificação. Por exemplo: calcular. Temos, portanto, uma linha hierárquica: tarefas τ , gêneros de tarefas τ e tipos de tarefas T.

O que interessa a este estudo, no entanto, é que as tarefas e os tipos de tarefas não existem por conta própria, não são entes a serem encontrados, descobertos. Ao contrário, eles são produtos e construções institucionais. Além disso, Chevallard (1998) é enfático ao dizer que o objeto essencial da didática é a reconstrução em tal ou tal instituição desses artefatos, dessas obras. Portanto, neste estudo vamos utilizar a noção de tipos de tarefas T na análise da relação pessoal dos alunos no trato com a linguagem algébrica. Já cabe aqui dizer que tais tarefas visam, portanto, à reconstrução de determinada obra institucionalmente prevista e, por que não, validada.

O segundo elemento do modelo praxeológico é aquele que explicita o modo de realizar os tipos de tarefas T: é o que o autor chama de **técnica τ** . O autor explica que a palavra técnica vem do grego *tekhnê* e significa saber fazer. Mais uma vez, Bosh e Chevallard (1999) esclarecem que a palavra **técnica** na sua abordagem teórica vem de um conceito bem amplo cuja ideia é a de uma maneira de resolver determinada situação. Assim sendo, no modelo praxeológico, técnica não quer dizer em primeira mão algoritmo, método específico⁷¹. É algo mais abrangente, sobre o qual se situam,

⁷⁰ Os símbolos são a letra grega *tau* minúscula τ e maiúscula T.

⁷¹ Na visão de Bosh e Chevallard (1999), um algoritmo é um tipo específico de técnica. Ao nosso ver, o autor tem o cuidado de construir sua teoria sob um pano de fundo bem amplo, como já dissemos, o qual sempre terá por base a visão antropológica. Essa é sua construção teórica base. A partir desses elementos e seus significados, vamos interpretando o universo da Didática da Matemática, o qual será sempre, na concepção do autor, parte da antropologia, conforme abordado anteriormente.

por exemplo, as técnicas para resolver uma equação, para instalar um aplicativo, para abrir uma porta, etc.

O conceito de técnica τ compõe o que o autor chama de bloco técnico-prático no modelo praxeológico, simbolizado por $[T / \tau]$. É o que costumeiramente chama-se de saber-fazer. Temos, portanto, “[...] um certo tipo de tarefa, T , e uma certa técnica, τ , para realizar tarefas desse tipo” (CHEVALLARD, 1998, p. 2, tradução nossa⁷²). Há três considerações muito importantes a respeito do conceito de técnica na abordagem praxeológica, as quais devem ser abordadas aqui. Vejamos a seguir.

Primeiro, uma técnica τ pode não ser suficiente para realizar uma tarefa do tipo T em sua totalidade. Isso significa que pode haver desde técnicas que abordem parte de T , que abordem sua totalidade e, ainda, técnicas que sejam superiores a outras. Chevallard (1998) mostra que, por exemplo, qualquer técnica de cálculo em $\mathbb{N}$ não é suficiente para certo tamanho de números. Aqui, de acordo com o foco deste estudo, temos que determinadas tarefas em linguagem algébrica podem ser realizadas por meio de certas técnicas. Portanto, ficaremos atentos às possibilidades de análise que essa abordagem nos trará.

Segundo, nem toda técnica τ pode ser classificada como algorítmica. Por exemplo, pintar um desenho e expor os axiomas de determinado campo da matemática são técnicas que não dependem de algoritmos, de passos a serem seguidos e executados. Chevallard (1998) argumenta, contudo, que parece haver certa tendência algorítmica na realização das tarefas.

Finalmente, ainda a respeito do conceito de técnica na abordagem praxeológica, Chevallard (1998) postula que geralmente há um pequeno número de técnicas τ relacionadas a um tipo de tarefa T . Ou seja, institucionalmente falando, somente algumas são reconhecidas. Isso faz com que determinadas técnicas alternativas sejam excluídas ou, ainda, passem a existir em outras instituições⁷³.

⁷²[...] un certain type de tâches, T , et une certaine manière, τ , d’accomplir les tâches de ce type.

⁷³ De fato, em determinados momentos podemos assistir a coexistência de técnicas diferentes na resolução de algumas equações. Por exemplo, nas disciplinas de química e física, o aluno pode ser apresentado a alguma técnica de cancelamento de termos semelhantes cujos passos são diferentes daqueles demonstrados pelo professor de Matemática.

Esse primeiro par de elementos do modelo praxeológico, [T / τ], o bloco saber-fazer, é o que estabelece uma ligação com a noção de relação, objetivo da praxeologia. Ou seja, Bosh e Chevallard (1999) modelam a relação institucional e pessoal por meio do conceito de tarefas e técnicas. Nas palavras do próprio autor:

O vínculo com a noção de relação pode agora ser estabelecido: a relação institucional com um objeto, para uma determinada posição institucional, é moldada e remodelada pelo conjunto de tarefas que devem ser cumpridas, por técnicas específicas, pelas pessoas que ocupam essa posição. É assim a realização das diferentes tarefas que a pessoa se vê levada a desempenhar ao longo da sua vida, nas diferentes instituições de que é sujeito sucessiva ou simultaneamente, que levará à emergência da sua relação pessoal com o objeto considerado (BOSH; CHEVALLARD, 1999, p. 6, tradução nossa⁷⁴).

Portanto, é por meio da realização de técnicas e tarefas que o indivíduo estabelece sua relação com a instituição. No entanto, há um fenômeno que deriva daí. Bosh e Chevallard (1999) explicam que essa relação emerge por meio do que chamamos de “conhecimento” e “saber”, quase uma descrição reducionista. Ou seja, o que aparece de fato é uma espécie de naturalização do par tarefa/técnica. Isso faz com que a instituição conviva com tarefas rotineiras, naturalizadas e, quase sempre, não questionadas.

A maioria das tarefas institucionais são, de fato, tarefas rotineiras: a técnica usada para realizá-las, embora tenha sido construída um dia, foi rotinizada, a ponto de não mais aparecer como tal – usar essa técnica para realizar tal tarefa agora é autoaplicável, evidente e já não apresenta qualquer problema (BOSH; CHEVALLARD, 1999, p. 6, tradução nossa⁷⁵).

⁷⁴ Le lien avec la notion de rapport peut maintenant être établi: le rapport institutionnel à un objet, pour une position institutionnelle donnée, est façonné et refaçonné par l'ensemble des tâches que doivent accomplir, par des techniques déterminées, les personnes occupant cette position. C'est ainsi l'accomplissement des différentes tâches que la personne se voit conduit à réaliser tout au long de sa vie dans les différentes institutions dont elle est le sujet successivement ou simultanément qui conduira à faire émerger son rapport personnel à l'objet considéré.

⁷⁵ La plupart des tâches institutionnelles sont, en effet, des tâches routinières: la technique utilisée pour les accomplir, bien qu'ayant été construite un jour, a été routinisée, au point de ne plus apparaître comme elle – utiliser cette technique pour accomplir une telle tâche va désormais de soi et ne pose plus aucun problème.

Enxergamos aqui dois desdobramentos: pelos postulados de Bosh e Chevallard (1999), chega-se ao conhecimento institucional por meio de tarefas e técnicas que são, na maioria das vezes, rotineiras; segundo, entendemos que analisar os tipos de tarefas em determinada instituição pode nos levar ao tipo de conhecimento que é produzido. Cabe aqui, também, expor o pensamento de Casabò (1994)⁷⁶. Em sua tese, ela argumenta que só será possível descrever parcialmente uma relação pessoal ou institucional, visto que haverá sempre uma espécie de evolução em que as técnicas se articulam entre si formando uma técnica de nível superior. Além disso, a autora explica que uma técnica parcial pode ser descrita como um “momento” de uma técnica mais ampla (CASABÒ, 1994).

Chevallard (1998) também fornece um exemplo de como uma técnica que já foi utilizada no ensino secundário da França seria hoje alvo de inúmeros julgamentos.

Assim podemos determinar o símbolo de um binômio $ax + b$ reescrevendo esta expressão sob a forma $a[x - (-b/a)]$, permitindo o raciocínio segundo o qual $2-3x = -3(x - 2/3)$ é negativo se $x > 2/3$, positivo para $x < 2/3$; $5x+3 = 5[x - (-0,6)]$ é positivo para $x > -0,6$, negativo para $x < -0,6$; etc. Mas esta maneira de fazer, incomum no ensino secundário francês hoje, provavelmente receberia uma enxurrada de críticas (CHEVALLARD, 1998, p. 3, tradução nossa⁷⁷).

Bem, os apontamentos já enunciados até aqui com relação à praxeologia parecem indicar que, em nosso estudo, será necessária uma análise adequada das tarefas do campo algébrico. Continuemos, portanto, com a exposição do último par de elementos da praxeologia e com as considerações sobre a forma como eles orientarão a análise dos dados neste trabalho.

Bosh e Chevallard (1999) explicam que existe um conjunto de postulados que ditam as condições e restrições das tarefas e técnicas de uma instituição. O objetivo

⁷⁶ Trata-se da tese da pesquisadora mais conhecida como Marianna Bosch. Nesse trabalho, ela indica como sobrenome Casabò, o qual adotamos como referência.

⁷⁷ Ainsi on peut déterminer le *signe* d'un binôme $ax+b$ en récrivant cette expression sous la forme $a[x - (-b/a)]$, ce qui permet de conclure moyennant un petit raisonnement: $2-3x = -3(x - 2/3)$ est négatif si $x > 2/3$, positif pour $x < 2/3$; $5x+3 = 5[x - (-0,6)]$ est positif pour $x > -0,6$, négatif pour $x < -0,6$; etc. Mais cette manière de faire, à peu près inconnue dans l'enseignement secondaire français d'aujourd'hui, y recevrait sans doute un flot de critiques.

desses postulados é tornar a técnica compreensível, justificada. Dessa forma, faz parte da praxeologia, enquanto modelo da atividade humana, não só enunciar, mostrar as técnicas e tarefas de uma instituição, mas apresentar um discurso que seja capaz de descrevê-las. Esse discurso, ou restrição, é chamado por Chevallard (1998, 1999) de **tecnologia**.

Trata-se de uma restrição institucional mínima para possibilitar o controle e garantir a eficácia das tarefas realizadas, que geralmente são tarefas cooperativas, assumindo a colaboração de vários atores. Essa restrição ecológica implica, então, a existência de um discurso descritivo e de apoio de tarefas e técnicas chamadas tecnologia da técnica (BOSH; CHEVALLARD, 1999, p. 6, tradução nossa⁷⁸).

A tecnologia é simbolizada por θ ⁷⁹. É, portanto, aquele postulado que torna a técnica válida. O autor também destaca três considerações muito pertinentes a respeito da tecnologia (CHEVALLARD, 1998).

Ele começa frisando que toda técnica τ traz sempre algum vestígio de uma tecnologia θ . Há casos em que a tecnologia é integrada à técnica. Como, por exemplo, no caso de um problema que envolve proporção. Segue um exemplo do próprio autor:

Este é o caso tradicionalmente da aritmética elementar, onde o mesmo pequeno discurso tem uma dupla função, técnica e tecnológica, na medida em que permite encontrar o resultado solicitado (função técnica) e justificar que este é o resultado esperado (função tecnológica), como quando dizemos: "Se 8 pirulitos custam 10 F, 24 pirulitos, ou 3 vezes 8 pirulitos, custam 3 vezes mais, ou 3 vezes 10 F" (CHEVALLARD, 1998, p. 3, tradução nossa⁸⁰).

Na situação acima, o discurso tecnológico que faz a técnica ser válida e compreensível é a multiplicação, a qual pode ser também uma técnica. A próxima

⁷⁸ Il s'agit là d'une contrainte institutionnelle minima le pour permettre le contrôle et garantir l'efficacité des tâches accomplies, qui sont généralement des tâches coopératives, supposant la collaboration de plusieurs acteurs. Cette contrainte écologique implique alors l'existence d'un discours descriptif et justificatif des tâches et techniques qu'on appelle la technologie de la technique.

⁷⁹ É a letra grega *teta* minúscula θ .

⁸⁰ Ainsi en va-t-il traditionnellement en arithmétique élémentaire, où le même *petit discours* a une double fonction, technique et technologique, en ce qu'il permet tout à la fois de *trouver* le résultat demandé (fonction technique) et de *justifier* que c'est bien là le résultat attendu (fonction technologique), comme lorsqu'on dit: «Si 8 sucettes coûtent 10 F, 24 sucettes, soit 3 fois 8 sucettes, coûteront 3 *fois plus*, soit 3 fois 10 F»

consideração do autor é lembrar que, enquanto a primeira função da tecnologia é justificar a técnica, a segunda é explicar essa justificativa. Contudo, segundo ele, esse último passo dá lugar a uma demonstração.

Notar-se-á que estas duas funções são assumidas de forma desigual por uma dada tecnologia. Desse ponto de vista, em matemática, a função de justificação tradicionalmente vence, por meio da exigência demonstrativa, a função de explicação (CHEVALLARD, 1998, p. 3, tradução nossa⁸¹).

Isso significa que, em matemática, as tecnologias mais utilizadas são aquelas de cunho demonstrativo, as quais usam o próprio campo e linguagem matemática para explicar determinada técnica. O autor dá um exemplo: a tecnologia dos números complexos justifica o fato de não se trabalhar com raízes quadradas negativas no campo dos reais numa equação do 2º grau⁸².

Finalmente, Chevallard (1998) explica que as tecnologias têm também a função de produzir técnicas. Curiosamente, segundo o autor, há tecnologias que aguardam suas técnicas. Entendemos, nesse ponto, que há temas em matemática que podem ser explorados de outra forma, servindo de justificativa para outros campos. O autor cita o caso dos números fracionários. Eles podem ser utilizados para justificar técnicas de resolução que envolvam proporção e princípio multiplicativo. Segue o exemplo nas palavras do teórico:

É assim que a tecnologia dos números fracionários (quocientes de decimais) permite gerar uma técnica que supera a vista anteriormente no que diz respeito ao preço dos pirulitos, e que concretiza o seguinte diagrama discursivo: "Se uma coisa vale b francos, então x coisas, ou x/a vezes a coisas, valerão x/a vezes mais, ou x/a vezes b francos". Então podemos dizer: "11 pirulitos custam 11/8 vezes mais (do que 8 pirulitos), ou 11/8 vezes 10 F (= 13,75 F)"; e, por uma extensão ousada do significado da expressão: "3 pirulitos custam 3/8 vezes mais (que 8 pirulitos), ou 3/8 vezes 10 F (= 3,75 F)". (Observe que temos: $\frac{3}{8} \times 10 F = \frac{11}{8} \times 10 F - \frac{8}{8} \times 10 F = 13,75 F - 10 F$).

⁸¹ On notera ainsi qu'il existe des technologies potentielles, en attente de techniques, qui ne sont encore technologies d'aucune technique ou de très peu de techniques.

⁸² Interessante observar que técnicas utilizadas pelos alunos da educação básica só terão uma justificativa no Ensino Médio.

F = 3,75 F.) Mais corretamente, diremos simplesmente que "x coisas são x / as vezes tem coisas", etc., (CHEVALLARD, 1998, p. 4, tradução nossa⁸³).

Finalmente, há um último elemento na praxeologia cuja função é explicar e justificar a tecnologia (da mesma forma que esta justifica a técnica), ou seja, existe um discurso que dá embasamento e vida às tecnologias. Esse elemento é a **teoria**, Θ ⁸⁴. Com isso, Chevallard (1998, p. 4) expõe que a teoria é uma espécie de "[...] nível superior de justificação-explicação-produção [...]". Um comentário interessante do autor é quando ele mesmo se questiona se poderíamos pensar num movimento infinito em que existiria uma teoria da teoria etc. Ele explica que os três níveis técnica/tecnologia/teoria parecem ser suficientes para analisar a atividade institucional pretendida. E Chevallard (1998) comenta ainda que a teoria – o último nível – dá mostras de estar desaparecendo, de forma que algumas justificativas são tratadas como uma referência a outras instituições.

[...] a justificação de uma determinada tecnologia é, em muitas instituições, tratada pela simples referência a outra instituição, real ou suposta, supostamente portadora de tal justificação. Este é o significado do clássico "Nós demonstramos na matemática..." do professor de física, ou o "Nós vimos na geometria..." do ex-professor de matemática (CHEVALLARD, 1998, p. 4, tradução nossa⁸⁵).

É fácil notar que a praxeologia é uma construção teórica de vulto e que demonstra ser muito útil aos objetivos deste trabalho. Sobre isso, há uma afirmativa

⁸³C'est ainsi que la technologie des nombres fractionnaires (quotients de décimaux) permet d'engendrer une technique qui sur classe celle vue précédemment à propos du prix de sucettes, et que concrétise le schéma discursif suivant: «Si a choses valent b francs, alors x choses, soit x/a fois a choses, vaudront x/a fois plus, soit x/a fois b francs.» Ainsi dira-t-on: «11 sucettes coûtent 11/8 fois plus (que 8 sucettes), soit 11/8 fois 10 F (=13,75 F)»; et, par une extension hardie du sens de l'expression: «3 sucettes coûtent 3/8 fois plus (que 8 sucettes), soit 3/8 fois 10 F (= 3,75 F)». (On notera que l'on a: $\frac{3}{8} \times 10 \text{ F} = \frac{11}{8} \times 10 \text{ F} - \frac{8}{8} \times 10 \text{ F} = 13,75 \text{ F} - 10 \text{ F} = 3,75 \text{ F}$.) Plus correctement, on dira simplement que «x choses, c'est x/a fois a choses», etc.

⁸⁴ Letra grega *teta* maiúscula Θ .

⁸⁵ la justification d'une technologie donnée est, en bien des institutions, traitée par simple renvoi à une autre institution, réelle ou supposée, censée détenir une telle justification. C'est là le sens du classique «On démontre en mathématiques...» du professeur de physique, ou encore du «On a vu en géométrie...» du professeur de mathématiques d'autre fois.

do autor que será transcrita aqui na íntegra, dada sua profundidade e pertinência a este estudo.

Em grego, *theôria* tirou de Platão o significado moderno de “especulação abstrata”. Mas originalmente referia-se simplesmente à ideia de contemplar uma performance, sendo o *theôros* **o espectador que assiste à ação sem dela participar**. De fato, as afirmações teóricas frequentemente parecem abstratas, muito distantes das preocupações dos tecnólogos e técnicos “simples”. Esse efeito de abstração está correlacionado com o que funda a **grande generalidade dos enunciados teóricos** – sua capacidade de justificar, explicar, produzir (CHEVALLARD, 1998, p. 5, tradução e grifo nosso⁸⁶).

Dessa colocação do autor, chama a atenção o fato de ele lembrar que há um espectador que assiste à exposição teórica, mas não participa da sua exposição. Infere-se que tal fato decorre de momentos construídos para esse fim. Trazendo para o ambiente escolar, pode-se questionar: há momentos de exposição teórica? O aluno assiste ou participa dessa construção? Toda teoria exposta na escola é feita dessa forma? Quais são esses momentos teóricos?

E a outra afirmativa do autor nesse excerto que mais chama a atenção é o fato de ele mostrar que os enunciados teóricos possuem a característica de grande generalidade. Ora, é impossível não fazer algumas inter-relações entre o que viemos questionando a partir daí: se a teoria abraça propriedades de generalização, será possível afirmar que o aluno, ao generalizar, está construindo seu ambiente teórico? E, se ele constrói um ambiente teórico, é possível verificar quais são os elementos técnicos, do bloco saber-fazer, que ele toma por base? Além disso, se direcionarmos o foco para o currículo de matemática, quais tópicos são tratados como teoria, como técnica? De que forma o tema deste estudo pode ser investigado a partir desses elementos da praxeologia? Antes de encerrarmos esta seção, cabe mais alguns apontamentos que o autor traz a respeito da abordagem praxeológica.

⁸⁶ En grec, *theôria* a pris à partir de Platon le sens moderne de «spéculation abstraite». Mais à l'origine, il renvoyait simplement à l'idée de contemplation d'un spectacle, le *theôros* étant le spectateur qui regarde l'action sans y participer. De fait, les énoncés théoriques apparaissent fréquemment comme abstraits, éloignés des préoccupations des «simples» technologues et techniciens. Cet effet d'abstraction est corrélé à ce qui fonde la grande généralité des énoncés théoriques – leur capacité à justifier, à expliquer, à produire.

Como foi colocado, Chevallard (1998, 1999) busca desenvolver um método que seja capaz de analisar as práticas institucionais. Para isso, apresenta o modelo chamado de praxeologia. O objetivo da praxeologia é, portanto, descrever a relação institucional. Nesse modelo, há dois blocos fundamentais: um bloco técnico e um bloco teórico. Dessa forma: $[T, \tau]$ e $[\theta, \Theta]$. Mas Chevallard (1998) traz outros desdobramentos a partir daí e afirma que, em torno de um único tipo de tarefas T , diz-se que há uma praxeologia pontual, cujo conjunto praxeológico é denotado por $[T, \tau, \theta, \Theta]$. Toda tarefa implica, pelo menos, um trio formado pela técnica, tecnologia e teoria.

Um desdobramento interessante dessa abordagem é o fato de o conjunto $[T, \tau, \theta, \Theta]$ ser identificado por um saber, em sentido amplo, ou seja, aquilo que se chama de conhecimento parece desconsiderar sua parte técnica, o bloco saber-fazer. De fato, por esse modelo, entende-se que toda teoria é vista como um discurso capaz de validar a parte técnica. Tem-se a impressão, portanto, de que conhecimento é tudo aquilo que é abstrato. A consequência é que, segundo Chevallard (1998), as instituições acabam eliminando as praxeologias específicas, em que uma teoria responde por um único tipo de tarefa. Assim, o que mais se vê são organizações praxeológicas: uma tecnologia atendendo a vários tipos de técnicas – organizações locais – ou uma teoria que dá conta de várias tecnologias – as organizações regionais. Há, ainda, as organizações globais: complexo praxeológico formado por várias organizações regionais.

Uma consequência importante que deriva dessa ideia de organização em nível local, global e regional é o fato de que, quando uma praxeologia pontual passa para uma praxeologia local, o que fica em destaque é a tecnologia. Da mesma forma, quando se passa para a praxeologia regional, o que vem à tona é a teoria. Ou seja, segundo Chevallard (1998), em ambos os casos o conhecimento teórico aumenta, em detrimento do bloco saber-fazer. Além disso, segundo o autor, o saber, o bloco teórico, também permite gerar uma técnica, por isso o discurso de que o bloco saber-fazer seria uma simples aplicação da teoria.

Há, portanto, diferenças na abordagem dos entes [prática] e [teoria] levando-se em conta a abordagem praxeológica. Aqui, também, enxergamos uma existência

dialética entre o bloco técnico e o teórico. Fica claro que é preciso considerar o fato de que, no ensino da matemática, pode-se levar o aluno a construir um ambiente teórico por meio da exploração de tarefas e técnicas e que, além disso, algumas abordagens teóricas podem ser justificadas pela abordagem técnica. Aliás, a esse respeito, Chevallard (1998) afirma que alguns temas em matemática são apresentados em seu discurso teórico enquanto outros aparecem na forma de tarefas.

No ensino da matemática, um tópico de estudo ("Pitágoras", "Tales" etc.) é frequentemente identificado com uma determinada tecnologia θ (teorema de Pitágoras, teorema de Tales) ou melhor, implicitamente ao bloco do saber $[\theta / \Theta]$ correspondente, tecnologia esta que permite produzir e justificar, como também aplicar técnicas relativas a vários tipos de tarefas. No entanto, deve-se notar que outros temas de estudo ("fatoração", "desenvolvimento", "solução de equações", etc.) são expressos, muito classicamente, em termos de tipos de tarefas (CHEVALLARD, 1998, p. 6, tradução nossa.⁸⁷).

Muito interessante o que é colocado pelo autor: o teorema de Pitágoras é uma tecnologia que justifica a técnica utilizada na resolução das tarefas, já o tema equações pode aparecer como um tipo de tarefa.

Do que expusemos até aqui, precisamos localizar o tema generalização na linguagem algébrica dentro da abordagem praxeológica. Estamos considerando, com o apoio deste filtro teórico, que há um bloco técnico, mais prático, e um bloco teórico, abstrato. Há, portanto, muitas tarefas empregadas no ensino da álgebra, de forma geral. Por isso, precisamos apontar quais temas em álgebra possuem configurações técnicas e quais são aqueles cuja abordagem assume papel teórico. A partir dessa delimitação, poderemos analisar de que forma a generalização está presente.

O leitor vai se recordar de que, no primeiro capítulo deste texto, já foi dito que o objetivo maior do trabalho é investigar as concepções dos alunos que envolvem a generalização algébrica. Já de posse dos argumentos teóricos que a TAD foi nos

⁸⁷ Dans l'enseignement des mathématiques, un *thème d'étude* («Pythagore», «Thalès», etc.) est souvent identifié à une *technologie* q déterminée (théorème de Pythagore, théorème de Thalès), ou plutôt, implicitement, au bloc de savoir $[\theta, \Theta]$ correspondant, cette technologie permettant de produire et de justifier, à titre d'applications, des techniques relatives à divers types de tâches. On notera cependant que d'autres thèmes d'étude («factorisation», «développement», «résolution d'équations», etc.) s'expriment, très classiquement, en termes de types de tâches.

apresentando, definimos que essa investigação precisa considerar os dois blocos que o modelo praxeológico traz. Portanto, o tema será investigado da seguinte forma: na abordagem algébrica, de que forma a instituição escolar explora os temas no bloco prático e teórico? Na parte curricular, quais são os níveis hierárquicos na abordagem algébrica? E, o que mais interessa aqui, na resolução das tarefas propostas, como o aluno generaliza a partir do que desenvolve no bloco prático?

Com mais esses questionamentos, encerramos esta seção, que abordou o conceito de praxeologia de acordo com a TAD. Foi necessária uma explanação mais vagarosa neste tópico. Há muitos desdobramentos possíveis na praxeologia, e o intento foi explorá-los ainda que de forma breve em relação ao original.

É conveniente, agora, trazer algumas considerações de Chevallard (1997a,1998) a respeito do papel do professor como condutor das organizações praxeológicas. Não é demasiado recordar que a pesquisadora é a professora dos alunos cujos dados serão analisados. Portanto, é necessário explicitar muito bem qual é seu papel na sala de aula tanto como docente quanto investigadora, e como isso influencia na coleta e análise dos dados⁸⁸.

Assim, será abordada na seção a seguir a noção de momentos didáticos apresentada por Chevallard (1997a, 1998), por meio de outras considerações a respeito do modelo praxeológico.

3.1.4 Os momentos didáticos

Na seção anterior foi abordada a noção de praxeologia e como seus elementos foram sendo construídos pelo autor. Esse modelo pretende descrever as relações institucionais, base da TAD, como já foi aqui mencionado. Assim, pode-se agora questionar: de que forma o modelo praxeológico se manifesta nas instituições? Como aparece? No caso da instituição escolar, em que momentos o professor se vê frente

⁸⁸ De fato, neste trabalho não observamos um ambiente e traçamos as considerações por meio de uma teoria e, de certa forma, à distância. Neste caso, a professora é a pesquisadora, está de posse das considerações teóricas ao levar as tarefas a seus alunos, e tal fato precisa ser levado em consideração.

à praxeologia? Há dois blocos a serem considerados: o [prático] e o [teórico]⁸⁹. De que forma eles se relacionam com a prática do professor e com o currículo? Procuramos responder a essas questões nos próximos parágrafos.

Chevallard (1998) considera que a realidade social se desenvolve por meio de perguntas e respostas. Nesse sentido, estudar uma pergunta traz alguns desdobramentos. Os questionamentos podem ser, por exemplo: onde fica sua escola? Que dia é hoje? O número -2 é irracional? Chevallard (1998) explica que há dois tipos de resposta para as perguntas. Quando se pode responder à questão, diz-se que é uma resposta no sentido fraco. “Eu estudo na escola X”; hoje é dia 25 de março; -2 não é um número irracional”. Mas o autor adverte que, quando não sabemos a resposta, a pergunta muda de um “o que é isso?” para “como determinar isso?”. Por exemplo: como saber o endereço de tal lugar? Como saber se um número é irracional ou não? Para Chevallard (1998), essas são questões no sentido forte, as quais dão origem a respostas também no sentido forte. E são as questões fortes que demandam a construção de uma praxeologia.

Passamos, assim, da solicitação de realizar uma tarefa *t* para a necessidade de desenvolver uma técnica *e*, mais completamente, toda uma praxeologia relativa a tarefas do tipo *t* que devem ao mesmo tempo ser construídas como objeto institucional. Questionar no sentido forte, responder no sentido forte: a resposta não é mais uma simples informação a ser dada, é toda uma organização praxeológica a ser construída (CHEVALLARD, 1998, p. 12, tradução nossa⁹⁰).

Observe o leitor que Chevallard (1998) explica que a praxeologia é construída. O que deriva dessa ideia é que estudar uma questão que envolva certa tarefa *T* é desenvolver uma organização praxeológica inédita. Mas, para Chevallard (1998), o que ocorre na verdade é que, na escola, estudar uma questão é recriar uma resposta

⁸⁹ Na linguagem simbólica da praxeologia: $[T, \tau]$ e $[\theta, \Theta]$, sempre de acordo com Chevallard (1998, 1999).

⁹⁰ On passe ainsi de la demande d'accomplir une tâche *t* au besoin d'élaborer une technique, et, plus complètement, toute une praxéologie relative aux tâches du type de *t* – type qu'il faut en même temps construire comme objet institutionnel. À question au sens fort, réponse au sens fort: la réponse n'est plus maintenant une simple information à donner, c'est toute une organisation praxéologique à construire.

que já foi produzida em outra instituição. O autor analisa o ato de estudar da seguinte forma:

Estudar é, portanto, estudar uma resposta (no sentido forte) considerada válida. É estudar uma obra que existe em outro lugar da sociedade, reconstruí-la, transpô-la para a instituição que serve de habitat para o estudo. A passagem do estudo de uma pergunta para o estudo de uma resposta – uma obra – não ocorre sem algumas modificações na própria noção de estudo (CHEVALLARD, 1998, p. 14, tradução nossa⁹¹).

Aqui, há terreno para algumas considerações a respeito do papel do professor, nos moldes do que foi colocado pelo autor. De fato, construir praxeologias inéditas demanda relações diversas daquelas em que é necessário recriar o que já está produzido. Se o currículo de matemática prevê que o tema álgebra, por exemplo, deve estar consolidado em algumas das suas etapas para determinada série, a praxeologia a ser construída pode trazer em seu bloco [prático] noções que o professor imagina que já foram sedimentadas. E, ao contrário, se a praxeologia é do tipo que busca uma construção por parte do aluno, o professor pode explorar temas que não estariam previstos nesse modelo que busca recriar técnicas já vistas, por exemplo. Recriar uma resposta que já existe, segundo Chevallard (1998), faz com que, em certos casos, haja uma inversão na relação pergunta-resposta: a resposta virá antes da pergunta.

Um exemplo é fornecido pelo próprio autor: nas organizações regionais que são controladas pela mesma teoria, há uma tendência em se “empurrar para periferia, sob o nome de aplicações, os tipos de tarefas que são em princípio geradores da obra [...] perante uma tecnologia potencialmente produtora de novas técnicas e que não pode limitar-se a algumas aplicações definidas a priori” (CHEVALLARD, 1998, p. 15, tradução nossa⁹²). Ou seja, o professor pode optar por trabalhar primeiro com uma

⁹¹ Étudier, c'est donc étudier une réponse (au sens fort) tenue pour valable. C'est étudier une oeuvre existant ailleurs dans la société, pour la reconstruire, la transposer dans l'institution qui sert d'habitat à l'étude. Le passage de l'étude d'une question à l'étude d'une réponse – d'une oeuvre – ne va passans quelques modifications dans la notion même d'étude.

⁹² tend à refouler à la périphérie, sous le nom d'applications, le stypes de tâches quisontem principe générateurs de l'oeuvre, [...] ouverte, à la technologie potentiellement productrice de techniques inédites, et qu'on ne saurait donc enfermer dans quelques «applications» définies a priori.

teoria e daí retirar tarefas ao invés de construir essa teoria com seus alunos a partir dessas tarefas.

Como já foi dito, a pesquisadora é a professora da turma que participa da pesquisa. Portanto, no momento de análise das tarefas, vamos retomar essas considerações a respeito da construção das praxeologias. Conjecturamos que o fato de o aluno recriar ou construir pode influenciar na sua relação com o objeto de estudo. Além disso, supomos, também, que questões fortes podem ser propostas não só pelo professor, mas também (e talvez principalmente) pelo próprio aluno.

Continuando, a respeito do que foi questionado no início da seção, pode-se dizer que a praxeologia se manifesta por meio de construções ou recriações por parte do professor. Vejamos agora em que momento o professor se depara com esta praxeologia a ser construída ou recriada. Chevallard explica que um tema de estudo matemático θ qualquer, será sempre considerado sob dois tipos, dois prismas diferentes: existe uma **realidade matemática** que pode ser construída em torno desse tema θ e existe uma **maneira** pela qual essa realidade pode ser construída. Por exemplo: o tema equação do 2º grau é trabalhado levando-se em conta outros conteúdos matemáticos: fatoração, polinômios, conjuntos numéricos... E há também um modo de se construir essa realidade: é preciso revisar algum conteúdo? Será trabalhada a fatoração por polinômios antes do trabalho com a fórmula de resolução? Chevallard (1998), então, chama de organização matemática (OM) e de organização didática (OD) o modo de trabalhar essa realidade matemática. Tanto a OM quanto a OD podem ser descritas e analisadas. Pode-se, assim, analisar o modelo praxeológico no ensino por meio de duas grandes organizações: a matemática (OM) e a didática (OD).

Vê-se, portanto, que o professor se depara com duas tarefas: determinar as OM a partir dos documentos oficiais e conduzir uma construção ou reconstrução por meio de uma OD. Como foi dito anteriormente, as praxeologias são construídas para responder às questões que o Chevallard (1998) denomina de fortes. Assim, as OM são desenvolvidas por meio de praxeologias específicas. Esta é, então, uma das primeiras tarefas do professor.

Uma das primeiras tarefas enfrentadas pelo professor como diretor de estudo de uma determinada classe é determinar, apontando indicações do currículo oficial, as organizações matemáticas a serem estudadas, especificando seu conteúdo preciso e, em particular, a base dos tipos de tarefas matemáticas que contém, bem como o grau de desenvolvimento a ser dado aos componentes técnicos, tecnológicos e teóricos (CHEVALLARD, 1997a, p. 19, tradução nossa⁹³).

Se uma OM é desenvolvida por meio de uma organização praxeológica, o que pode ser dito a respeito das OD? Será por meio de uma OD que o professor constrói sua praxeologia em torno de uma OM. Ou seja, uma OM responde por “o que vai ser estudado” e uma OD descreve “como será estudado”.

Praxeologias didáticas ou organizações didáticas são respostas (no sentido forte) a perguntas do tipo “Como estudar a questão $q = \tau T$?” ou “Como estudar a obra O ?” – respostas que anotaremos aqui, genericamente, ∂q e ∂O , de modo que teremos por exemplo: $OD_\theta = \partial OM_\theta$. Dito isso, surge a questão sobre quais tipos de tarefas se enquadram em uma praxeologia didática; ou, dito de outra forma, que “gestos” podem ser considerados didáticos (CHEVALLARD, 1998, p. 16, tradução nossa⁹⁴).

O que se depreende de uma OD é que é por meio dela que o docente determinará que gestos didáticos farão parte dessa organização.

Como qualquer organização praxeológica, uma organização didática se articula em tipos de tarefas (geralmente cooperativas), em técnicas, em tecnologias, em teorias. Mas como descrever tal organização? Por exemplo, quais são os principais tipos de tarefas (CHEVALLARD, 1998, p. 19, tradução nossa⁹⁵)?

⁹³ L'une des premières tâches aux quelles s'affronte le professeur entant que directeur d'étude d'une classe donnée consiste à déterminer, à partir des indications du programme d'études officiel, les organisations mathématiques à étudier, en précisant, pour chacune d'elles, son contenu précis, et en particulier le socle des types de tâches mathématiques qu'elle contient, ainsi que le degré de développement à donner aux composant es technique, technologique, théorique.

⁹⁴ Les praxéologies didactiques ou organisations didactiques sont des réponses (au sens fort) aux questions du type «Comment étudier la question $q = \tau T$?», ou «Comment étudier l'oeuvre O ?» – réponses qu'on notera ici, génériquement, ∂q et ∂O , en sorte qu'on aura par exemple: $OD_\theta = \partial OM_\theta$. Cela précisé, la question se pose de savoir quels types de tâches relèvent d'une praxéologie didactique; ou, pour le direautrement, quels «gestes» peuvent être regardés comme didactiques.

⁹⁵ Comme toute organisation praxéologique, une organisation didactiques' articule en types de tâches (généralement coopératives), en techniques, en technologies, en théories. Mais comment décrire une telle organisation? Quels en sont par exemple les principaux types de tâches?

Mas Chevallard (1997a, 1998) explica que, ainda que não haja uma forma única de descrever-se esse processo de determinação de gestos didáticos, surpreendentemente, há algumas situações e momentos que estarão sempre presentes na atividade do professor. Esses momentos são, então, denominados de **momentos didáticos**.

O professor possui de antemão alguns movimentos que podemos chamar de previsíveis no desenvolvimento didático. Chevallard (1997a) mostra que o docente precisa determinar, logo de início, quais serão as organizações matemáticas que serão estudadas e, além disso, planejar como será essa reconstrução, a transposição didática daquela organização matemática mais específica. Os momentos didáticos são, portanto, aquelas situações que estão sempre presentes de modo que, inevitavelmente, na visão de Chevallard (1997a), este ou aquele gesto didático terá que ser feito.

São seis os momentos didáticos. O primeiro deles é o encontro com a organização matemática que vai ser estudada. Chevallard (1997a) explica que pode haver duas formas extremas de se organizar este momento. Primeiro, o professor apresenta um problema clássico, uma narrativa, numa espécie de reencontro pelas vias históricas em que o aluno se relaciona com a questão de maneira fictícia. A seguir, o aluno é convidado a “imitar” o que viu por meio de uma manipulação real. Portanto, nesse momento, a obra *O* é apresentada por meio de tarefas T_i . Por exemplo, determine a raiz de uma equação do 1º grau; identifique as grandezas diretamente proporcionais. Essas tarefas T_i podem ocorrer várias vezes. Uma observação importante do autor é que esse primeiro encontro com o objeto a ser estudado desempenha um papel de suma importância, visto que, geralmente, é ele que orienta o desenvolvimento posterior das relações institucionais e pessoais com o objeto encontrado (CHEVALLARD, 1997a).

O segundo momento didático é aquele em que as tarefas T_i são exploradas por meio de uma técnica τ_i . Chevallard (1997a) esclarece que esse momento estabelece uma espécie de dialética com o primeiro, de modo que estudar certos problemas parece ser um meio de criar e desenvolver técnicas. Assim, haverá um problema cujo

objetivo nem sempre será sua resolução como um fim em si mesma, mas como um meio para se constituir uma técnica.

Fica fácil perceber que os dois primeiros momentos didáticos são a constituição do ambiente técnico-prático da praxeologia: $[T, \tau]$. O terceiro momento é aquele que vai compor o par teórico-tecnológico: $[\theta, \Theta]$. Esse ambiente está relacionado às técnicas τ_i . Aqui Chevallard (1997a) traz alguns apontamentos muito pertinentes não só a respeito da complexidade que envolve a praxeologia, mas, ainda, sobre de que forma o papel do professor pode conduzir essa relação institucional e pessoal. Primeiro ele lembra que, desde o primeiro momento didático – aquele do encontro com uma tarefa T –, já há uma espécie de conexão com o ambiente teórico-tecnológico que foi previamente elaborado ou com os primórdios do ambiente que será criado (por meio de uma relação dialética com a técnica). No entanto, frisa o autor que este terceiro momento acaba se tornando o primeiro! Ou seja, os problemas, as tarefas, acabam se tornando uma aplicação da tecnologia e teoria.

Por razões de economia didática geral, no entanto, as estratégias tradicionais de gestão de estudos geralmente fazem deste terceiro momento a primeira etapa do estudo, uma etapa que é então comum ao estudo de vários tipos de problemas T_i – todos aqueles, dentre os tipos de problemas a serem estudados, que parecem responder ao mesmo ambiente teórico-tecnológico $[\theta / \Theta]$. O estudo deste tipo de problema surge então, classicamente, como uma série de aplicações do bloco teórico-tecnológico assim constituído (CHEVALLARD, 1998, p. 21, tradução nossa⁹⁶).

Por exemplo, no nono ano do Ensino Fundamental, encontra-se a seguinte habilidade no Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG), para a unidade temática Álgebra: (EF09MA06B) – “Utilizar o conceito de função para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis”⁹⁷. Nesse caso, o professor pode

⁹⁶ Pour des raisons d'économie didactique globale, toute fois, les stratégies de direction d'étude traditionnelles font en général de ce troisième moment la première étape de l'étude, étape qui est alors commune à l'étude de plusieurs types de problèmes T_i – tous ceux, parmi les types de problèmes à étudier, qui apparaissent comptables du même environnement technologico-théorique $[\theta/\Theta]$. L'étude de ces types de problèmes apparaît alors, classiquement, comme une suite d'applications du bloc technologico-théorique ainsi mis en place.

⁹⁷ No momento das análises institucionais, vamos explorar essas habilidades com o devido cuidado.

optar por iniciar o estudo de função por sua abordagem teórica e, logo a seguir, apresentar à classe problemas que tenham o caráter de aplicação. Desse modo, haveria uma espécie de inversão nos moldes da praxeologia. O bloco teórico-tecnológico, $[\theta, \Theta]$, viria primeiro. Caso a OD prevista pelo docente, para essa habilidade do CRMG, explore primeiro as tarefas e técnicas, o conceito de função surgiria como uma tecnologia-teoria construída pelo aluno. Observe o leitor que a organização didática adotada pelo docente permite uma espécie de alternância na justaposição dos blocos praxeológicos. Cabe perguntar quais as consequências de tal movimento na relação pessoal do aluno com os objetos estudados. Mas isso é análise para ser feita com o devido aprofundamento mais à frente. Por enquanto, fazemos essas pequenas provocações para que o leitor acompanhe nossas hipóteses e argumentos.

Até aqui, portanto, o bloco teórico-prático já foi explorado e teórico-tecnológico também. Mas foram explorados numa forma, digamos, primitiva. Ou seja, as técnicas empregadas tinham cunho de construção de uma tecnologia que o aluno, pressupõe-se, ainda não tinha visto. Ou, na segunda hipótese vista no parágrafo anterior, a tecnologia foi base para que as técnicas pudessem ser aplicadas. Há, agora, o quarto momento didático: é aquele em que outras técnicas são exploradas, contudo espera-se que o aluno utilize um ambiente teórico no seu desenvolvimento. Explica o autor:

O quarto momento é o de trabalhar a técnica, que deve tanto aprimorar a técnica, tornando-a mais eficiente e confiável (o que geralmente exige retrabalhar a tecnologia desenvolvida até então), quanto aumentar o domínio daquele em um: este momento de testar a técnica pressupõe, em particular, um ou mais *corpora* de tarefas que sejam adequados tanto qualitativamente quanto quantitativamente (CHEVALLARD, 1998, p. 21, tradução nossa⁹⁸).

Nesse momento, portanto, pode-se dizer que a classe precisa utilizar uma referência matemática no emprego da técnica. Como exemplo, uma habilidade prevista no CRMG para o oitavo ano: EF08MA07 – Associar uma equação linear de

⁹⁸ Le quatrième moment est celui du travail de la technique, qui doit à la fois améliorer la technique en la rendant plus efficace et plus fiable (ce qui exige généralement de retoucher la technologie élaborée jusque-là), et accroître la maîtrise que l'on en a: ce moment de mise à l'épreuve de la technique suppose en particulier un ou des corpus de tâches adéquats qualitativement aussi bien que quantitativement

1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano. Para essa habilidade, o aluno necessita ter construído seu ambiente teórico com relação às equações de 1º grau. Há claramente um crescendo nas concepções teóricas na gestão dos momentos didáticos. Vê-se uma direção prática → teoria. Não é um movimento compassado, preciso, mas uma abordagem cujo objetivo inicial (e final) é construir com o aluno uma relação institucional dentro da organização matemática desejada. E, para isso, a organização didática prevê uma retomada de técnicas cada vez mais imbuídas de um discurso matemático elaborado. Vejamos agora os dois últimos momentos didáticos.

O quinto momento é o da institucionalização. Nessa fase, especifica-se com clareza qual é a organização matemática que foi elaborada. Portanto, pode-se afirmar que o objetivo é fazer com que haja um sentido, uma ligação desde as primeiras tarefas, passando por tecnologias e tarefas mais elaboradas. O que vale destacar aqui é que Chevallard (1997a) chama a atenção para o fato de que é neste momento que há elementos que entrarão definitivamente na OM pretendida e há outros que são como que auxiliares na sua construção e desenvolvimento. As palavras seguintes do autor são muito pertinentes:

O momento da institucionalização é, portanto, antes de tudo, quando, na construção “crua” que, pouco a pouco, emergiu do estudo, será separada, por um movimento que envolve o futuro, o “matematicamente necessário”, que será preservado, e o “matematicamente contingente”, que logo será esquecido. Nesse submomento de oficialização, uma praxeologia matemática agora desvinculada da história singular que a trouxe à existência entra na cultura da instituição que acolheu sua gênese (CHEVALLARD, 1998, p. 22, tradução nossa⁹⁹).

O momento da institucionalização prevê, portanto, que haja uma absorção de elementos matemáticos necessários àquela organização no seu devido discurso matemático. Chama a atenção o fato de que há objetos auxiliares que não participam da elaboração matemática desse momento. Além do mais, Chevallard (1997a) explica

⁹⁹ Le moment de l'institutionnalisation, c'est donc d'abord celui où, dans la construction «brute» qui, peu à peu, a émergé de l'étude, vontêtre séparés, par un mouvement qui engage l'avenir, le «mathématiquement nécessaire», qui sera conservé, et le «mathématiquement contingent», qui, bientôt, sera oublié. Encesous-moment d'officialisation, une praxéologie mathématique désormais coupée de l'histoire singulière quil' apportée à l'existence fait son entrée dans la culture de l'institution qui en a hébergéla genèse.

que uma organização matemática pode ser sempre modificada, ampliada. Na seção anterior, foi visto que há diversos tipos de organização em praxeologia: organizações pontuais, locais, regionais e globais. A cada uma dessas ampliações, o ambiente teórico vai ficando mais em destaque. Assim, o conhecimento teórico vai se expandindo em relação ao bloco técnico de forma que a teoria permite gerar novas técnicas.

O autor também chama a atenção para a complexidade que envolve a praxeologia e seus elementos. Pode-se identificar erroneamente os tipos de tarefas que compõem uma organização praxeológica e, além disso, propor uma técnica que seja impraticável nesse momento. O autor vai além: pode haver, ainda, uma tecnologia reduzida a simples princípio e uma teoria, em suas palavras, “enigmática” (CHEVALLARD, 1998). A praxeologia é, portanto, um conceito bem complexo. Não é tarefa simples fazer com que seus elementos se encaixem perfeitamente. Na transcrição *ipsis litteris* do texto do autor:

A noção de praxeologia surge assim como uma noção genérica que necessita ser estudada com maior profundidade – em particular através da investigação empírica e da análise dos dados de observação recolhidos (CHEVALLARD, 1998, p.6, tradução nossa¹⁰⁰).

Finalizando, o que queremos destacar aqui é que, por tudo o que foi visto, chama a atenção o fato de haver um movimento de retomada constante no modelo praxeológico. Técnicas que são retomadas para auxiliar na construção de outras tecnologias, organizações matemáticas que vão sendo cada vez mais ampliadas. Ou seja, há momentos de construção e momentos de retomada em que se pressupõe que uma OM seja base de outra construção. Usando termos praxeológicos, vemos que o que foi considerado ambiente tecnológico-teórico em determinado momento, pode ser o bloco técnico-prático em outro. É essa concepção da praxeologia que interessa em nosso estudo. Vamos levantar, aqui, mais uma hipótese: o aluno pode enxergar a generalização como um ambiente teórico e pode, ainda, justificar

¹⁰⁰ La notion de praxéologie apparaît ainsi comme une notion générique dont il convient d'approfondir l'étude – notamment par l'enquête empirique et l'analyse des données d'observation recueillies.

determinadas técnicas de uma maneira não prevista pelo professor (ou pelo currículo). O aluno, ao retomar determinados conceitos, dá mostras de como constrói seu ambiente teórico.

Vejamos, agora, o sexto e último momento didático: a avaliação. Ela, de algum modo, se articula com a institucionalização. Chevallard (1998) explica que há um sentido amplo na avaliação: ela deve ser vista como uma análise não só da relação pessoal do sujeito com o objeto, mas também da avaliação das relações institucionais.

Qual é o valor, de fato, da organização matemática que foi construída e institucionalizada? Para além da interrogação sobre o domínio, por tal pessoa, de tal técnica, encontramos então a interrogação sobre a própria técnica – é poderosa, manejável, segura, robusta também? Essa avaliação – na qual o uso escolar desempenha um papel muito pequeno, é verdade – é aqui formativa, não de uma pessoa, mas de uma praxeologia: como tal, participa da institucionalização (CHEVALLARD, 1998, p. 23, tradução nossa¹⁰¹).

Interessante esse ponto de vista em que a avaliação deve também se questionar sobre os rumos de uma institucionalização. A nosso ver, essa perspectiva tira do aluno uma pretensa responsabilidade sobre determinada dificuldade em alguma organização matemática

A noção teórica de momentos didáticos foi explorada com a profundidade que julgamos necessária ao nosso estudo. A seguir, um quadro-resumo com os seis momentos e alguns exemplos pertinentes a esse trabalho. Não se trata de um modelo, mas de uma dentre tantas outras possibilidades de análise.

¹⁰¹ Que vaut, en fait, l'organisation mathématique qui s'est construite et institutionnalisée? Au-delà de l'interrogation sur la maîtrise, par telle personne, de telle technique on trouve lors l'interrogation *sur la technique elle-même* – est-elle puissante, maniable, sûre, robuste aussi? Cette évaluation – à la quelle les usages scolaires font, il est vrai, une fort petite part – est ici formatrice, non d'une personne, mais d'une praxéologie: à cet égard, elle participe de l'institutionnalisation.

Quadro 2 – Exemplo de momentos didáticos

Momento didático	Exemplo
1º) Primeiro encontro: trabalho com um tarefa ou tarefas T_i relativas a uma OM.	Estabelecer uma correspondência entre dois conjuntos.
2º) Exploração das tarefas T_i por meio de uma técnica.	Utilizar diagramas para estabelecer uma correspondência entre dois conjuntos.
3º) Constituição ou construção de um ambiente tecnológico-teórico relativo a T_i e em consonância com OM.	Reconhecer uma função do 1º grau do tipo $y = ax + b$.
4º) Elaboração, constituição e trabalho com uma técnica mais apurada.	Reconhecer se uma correspondência entre dois conjuntos é uma função.
5º) Institucionalização da OM.	(EF09MA06A) ² Compreender as funções como relação de dependência unívoca entre duas variáveis.
6º) Avaliação.	Avaliar a relação pessoal e institucional com o objeto função.

Fonte: Construção nossa, 2022.

É necessário explicar que, embora haja uma ideia de que cada momento didático esteja perfeitamente isolado numa perspectiva cronológica, tal fato não ocorre. O autor explica que um momento deve ser entendido como “[...] uma dimensão em um espaço multidimensional, um fator em um processo multifatorial” (CHEVALLARD, 1998, p. 19, tradução nossa¹⁰²). Numa “ordem perfeita”, se é possível colocar nesses termos, teríamos um primeiro encontro com uma tarefa T_i introdutória, tarefa essa que seja capaz de dar origem a uma técnica para, em seguida, justificar a necessidade de uma tecnologia e teoria que possa não só explicar a técnica, mas,

¹⁰²[...] une dimension dans un espace multidimensionnel, un facteur dans un processus multifactoriel.

ainda, dar origem a uma técnica mais apurada (matematicamente falando) e relacionada à primeira tarefa. Até aí já teríamos quatro momentos didáticos. Em seguida, a organização matemática pretendida já poderia ser institucionalizada, numa espécie de ápice organizacional para que, finalmente, a avaliação complete todo esse processo, dando mostras da relação pessoal e institucional com o objeto matemático trabalhado. Contudo, um determinado momento didático pode ser realizado várias vezes, de forma até mesmo fragmentada, ao longo do tempo. Essas observações só vêm endossar o que foi colocado um pouco antes: a noção praxeológica é de fato complexa e necessita ser investigada com o devido cuidado.

Ressalta-se que, conforme colocado anteriormente, cada um desses momentos pode ser fragmentado e trabalhado inúmeras vezes. Nossa prática como professora permite endossar tal colocação. O terceiro momento, indicado no quadro anterior, tende a ser explorado muitas vezes. Em contrapartida, o primeiro momento parece não ser explorado com tanto afinco.

Finalizando esta seção, cabe indicar mais claramente a forma como a abordagem dos momentos didáticos será utilizada neste trabalho. Chevallard (1998) esclarece que esse modelo possui dois tipos de emprego por parte do professor. Primeiro, é uma grande análise dos processos didáticos, nos moldes do que foi feito no quadro anterior, ainda que de forma bem superficial. Assim, há margem para interpretações bem férteis levando em conta as organizações matemáticas pretendidas.

A segunda razão é mais complexa, mas também aquela que define bem o papel do professor na condução do processo didático. O leitor vai se lembrar que o objetivo dessa seção foi colher fundamentos teóricos que permitam à pesquisadora, também professora dos alunos participantes do estudo, analisar os dados com a devida eficiência e embasamento.¹⁰³ Portanto, o modelo permite, ainda, problematizar a

¹⁰³ É de nosso entendimento que todo pesquisador necessita, de antemão, reconhecer qual é seu espaço no espaço a ser investigado. Não podemos esquecer que este trabalho é de cunho qualitativo e com características de um estudo de caso. E trabalhos dessa natureza permitem o que Lüdke e André (2018) chamam de *generalizações naturalísticas*, ou seja, a experiência do pesquisador no meio investigado faz com que este associe suas experiências pessoais com os dados encontrados no

realização de cada um desses momentos didáticos. O autor coloca algumas questões que serão reproduzidas abaixo:

Como, por exemplo, você pode alcançar concretamente o primeiro encontro com tal organização matemática? Com qual tipo de tarefas? Como conduzir o estudo exploratório de um determinado tipo de tarefa? Como realizar a institucionalização? Como perceber o momento da avaliação (CHEVALLARD, 1998, p.23, tradução nossa¹⁰⁴)?

Esses questionamentos do autor, a nosso ver, colocam de maneira muito clara que não basta admitir que a praxeologia modela as relações pessoais e institucionais. É preciso uma gestão muito bem planejada e direcionada. Indo um pouco além, defendemos aqui que essa gestão do professor influencia na relação pessoal do aluno com o objeto estudado. Portanto, encontramos agora o papel da professora-pesquisadora que conduz este estudo: analisar as devidas organizações matemáticas por meio de uma grade de análise que contemple os seis momentos didáticos defendidos por Chevallard (1997a, 1998) e promover uma gestão desses momentos na condução das perguntas e hipóteses da pesquisa.

Dessa forma, as tarefas aplicadas aos alunos serão, de certa forma, criadas pela professora-pesquisadora de acordo com os objetivos do estudo. Essas tarefas foram, então, pensadas por uma professora cuja atuação será criar situações favoráveis de análise, buscando o modelo praxeológico. Insistimos nesse ponto, pois acreditamos que há diferentes tipos de pesquisa de acordo com o papel do pesquisador. Acreditamos que um pesquisador que não trabalhe com os alunos participantes não analisa os dados da mesma forma que o professor desta turma. Nas palavras de Lüdke e André (2018, p. 27), em um estudo de caso – abordagem qualitativa deste trabalho, há também espaço para “[...] impressões, sensações,

momento das análises. Portanto, nosso intuito é buscar na teoria principal que conduz este estudo argumentos que nos confirmem um bom poder de interpretação e, principalmente, que nos deem uma posição delimitada e confortável dentro da realidade estudada.

¹⁰⁴ Comment par exemple réaliser concrètement la première rencontre avec telle organisation mathématique? Avec tel type de tâches? Comment conduire l'étude exploratoire d'un type de tâches donné? Comment mener à bien l'institutionnalisation? Comment réaliser le moment de l'évaluation?

intuições [...]”. Portanto, o leitor irá se deparar com tais constatações no momento das análises.

Encerram-se, aqui, as considerações sobre momentos didáticos. Há, ainda, três outras seções a respeito de mais alguns elementos da TAD que julgamos pertinentes nesta pesquisa. O leitor é convidado a continuar conosco nesta exposição teórica.

3.1.5 Níveis de codeterminação

Foi exposto nos apontamentos anteriores que uma organização matemática (OM) diz respeito àquilo que vai ser estudado. É a estrutura que determina os conteúdos a serem ministrados. Uma OM está atrelada ao currículo oficial, aos documentos institucionais que normatizam o ensino. Chevallard (1997a) esclarece que cabe ao professor determinar as tarefas que servirão de base no estudo desses conteúdos. Dessa forma, aparecem, também, as organizações didáticas (OD). As OD descrevem o modo como esse tópico será abordado. De maneira bem geral, pode-se dizer que uma OM é base para que o docente construa sua OD.

Em termos de praxeologia, Chevallard (1998) mostra que há construções específicas dentro de uma OM, ou seja, há organizações praxeológicas pontuais, locais, regionais e globais.¹⁰⁵ Na seção anterior, viu-se que os momentos didáticos descrevem de que forma o professor conduz uma OD. São aqueles gestos que, de uma forma ou de outra, sempre estão presentes. Assim, o docente reconstrói uma organização matemática específica. Fala-se, portanto, de gestos docentes, mais ou menos previstos, mas que estão em consonância, sempre, com aquela OM considerada.

Infere-se que os momentos didáticos respondem por aqueles instantes de uma suposta liberdade do professor na relação institucional. Contudo, uma OM não

¹⁰⁵Chevallard (1998) esclarece que uma organização local é aquela em que uma tecnologia atende a vários tipos de técnicas; uma organização regional ocorre quando uma teoria responde a várias tecnologias e uma organização global é formada por várias organizações regionais. Na seção 3.1.3 o leitor pode conferir mais apontamentos sobre o modelo praxeológico.

depende desses gestos didáticos. Ao contrário, ela já está construída, pronta. É base para uma OD. Nesse sentido, Chevallard (2001a, 2001b, 2002a, 2007a, 2007b, 2011a) introduz a noção de níveis de codeterminação didática para que se possa analisar a estrutura de uma OM. Essa escala de níveis permite analisar de que forma uma OD pode permear uma OM, já que essa organização, tanto de conteúdos quanto de gestos didáticos, demanda certas condições. Por exemplo, determinado tópico deve estar relacionado a um tema, o qual pertence a um domínio e setor específicos.

Chevallard (2001a), portanto, relaciona as estruturas didáticas e matemáticas por meio do que ele chama de hierarquia de níveis. Esses níveis foram ampliados pelo autor em trabalhos subsequentes (CHEVALLARD, 2007a, 2007b, 2011a), dado que será apresentada aqui a escala mais completa desenvolvida pelo autor.

O autor explica que a ideia dessa escala é que cada nível está relacionado a uma estrutura da OM. O que decorre daí é que a cada um desses elos são introduzidas restrições em nível didático (CHEVALLARD, 2001a). Portanto, cada nível responde por praxeologias possíveis, ou seja, há determinadas questões que são possíveis de serem desenvolvidas aí. A esse respeito, Chevallard (2001a) esclarece que esta hierarquia responde por aquela que é mais comumente observada. Assim, uma determinada questão se refere a um tema, o qual está inserido num setor, que pertence a um domínio etc.

Há oito degraus nesta escala. Seguindo a ordem apresentada pelo autor, há um movimento que vai de fora da escola para dentro: da humanidade até chegar no nível tópico, já na sala de aula. A figura 2, a seguir, apresenta o panorama geral dessa hierarquia. Logo em seguida, vamos explorar um pouco mais seu significado.

Figura 2 – Níveis de codeterminação didática: visão geral



Fonte: Adaptado de Chevallard (2002, 2007a, 2007b, 2011a).

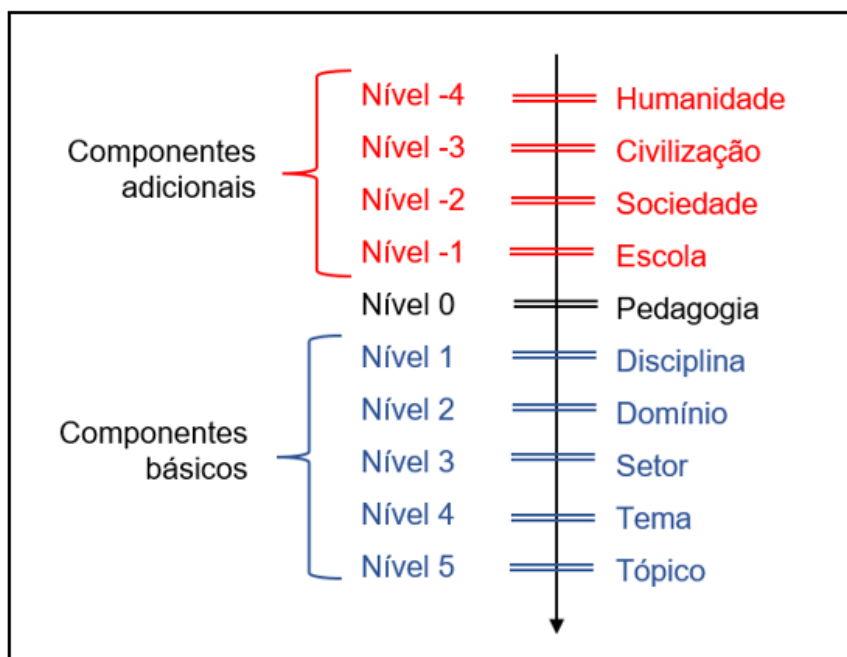
Uma observação importante do autor é que, se a escala de níveis não for construída, há uma chance muito grande de alguma questão não ser estudada na escola ou na sala de aula. Outra consideração feita por Chevallard (2001a) é sobre o fato desta hierarquia de níveis não ser intrínseca à sala de aula. De outro modo, ela deve ser pensada, construída praxeologicamente. Além disso, o autor esclarece que a recriação dos níveis de codeterminação é que permite o estudo de uma questão.

Vale destacar que, em relação às praxeologias, Chevallard (2002a) explica que praticamente não existem organizações pontuais – aquelas cuja tecnologia θ se refere a apenas um tipo de tarefa T . Ao contrário, segundo ele, o aluno tem a tendência de enxergar cada tipo de tarefa com um assunto único, praticamente independente dos outros tópicos. O professor, porém, vê uma unidade de forma mais ampla: tarefas imbuídas em determinadas tecnologias. O que Chevallard (2002a) argumenta é que o aluno faz uma espécie de reconstrução pontual onde o professor enxerga uma organização regional. A nosso ver, tal fato faz com que o aluno enxergue os tópicos

de maneira única e, muitas vezes, desligados entre si. O professor, de posse do currículo, visualiza a organização global, desfragmentada. O estudante, não.

A respeito dessa reconstrução, explica o autor: “No movimento de desconstrução-reconstrução das obras a serem estudadas, apenas reconstruímos fragmentos de um quebra-cabeça que jamais será reconstruído como um todo (CHEVALLARD, 2002a, p. 3, tradução nossa¹⁰⁶). Além disso, o fato de o professor não situar os temas em seus respectivos setores e domínios, faz com que ele os apresente em forma de “bloco único”. Isso se deve pelo fato de o docente focar seu trabalho, na maioria das vezes, nos níveis de maior especificidade. Como num quebra-cabeça, poderíamos dizer que o professor (a escola, a instituição) trabalha no todo, no conjunto, enquanto o aluno enxerga as peças separadas, as unidades e, por vezes, não tem a chance de visualizar a imagem completa. Essa escala pode ser analisada em dois níveis gerais: um básico e um adicional, conforme figura 3.

Figura 3 – Níveis de codeterminação didática: componentes básicos e adicionais



Fonte: Adaptado de Chevallard (2002, 2007a, 2007b, 2011a).

¹⁰⁶ Dans le mouvement de déconstruction-reconstruction des oeuvres à étudier, on ne reconstruit guère alors que des fragments d'un puzzle qui ne sera jamais reconstitué dans son ensemble.

Os componentes básicos são denominados pelo autor de nível 1 até o nível 5. Os níveis adicionais são aqueles que vão do zero ao -2. Chevallard (2007a, 2007b, 2011a) fez ampliações no nível adicional e acrescentou a civilização e a humanidade como componentes dessa hierarquia. É a hierarquia desses níveis de codeterminação que permite uma ordenação do que Chevallard (2002a) chama de “feixes de constrangimentos” que comandam o estudo na sala de aula.

Analisando os degraus básicos desta escala, tem-se que seus componentes são: disciplina-domínio-setor-tema-tópico. Chevallard (2001b) explica que esses níveis são aqueles que estão envolvidos com determinada questão q. Enquanto os professores estão envolvidos com os níveis tema e tópico, a noosfera¹⁰⁷ é responsável pelo setor, domínio e disciplina. Para exemplificar, por ora, diríamos que cabe ao docente trabalhar no tópico: fatorar expressões algébricas; e no tema: fatoração algébrica. Já a noosfera é responsável pelo setor: cálculo algébrico; domínio: álgebra; disciplina: matemática.

No entanto, essa escala de níveis nos fala que a questão q responsável pela transmissão do conhecimento é aquela que se baseia no último elo, ou seja, é preciso percorrer um caminho que começa fora da escola, continua por meio desta em alguma disciplina até atingir o tópico necessário (CHEVALLARD, 2001a). Assim, os níveis adicionais, também chamados por Chevallard (2002a) de níveis superiores, são aqueles que relacionam a questão q ao mundo externo à escola. Nesse sentido, o autor define o nível pedagogia como nível zero. Ele é uma espécie de fronteira entre o que Chevallard (2002a) chama de “mundo abaixo” e “mundo acima”. O nível da pedagogia estabelece os comandos da noosfera que permeiam os degraus abaixo. Ainda que o professor possa se sentir totalmente responsável – e livre – pela organização do seu ensino, para Chevallard (2002a) tal situação não ocorre de fato. Segundo o autor “[...] a legítima liberdade pedagógica dos professores só se adquire

¹⁰⁷ Noosfera é a forma como Chevallard (1982) designa todas as outras instâncias que são externas à escola, mas que, de algum modo, influenciam seu funcionamento. Por exemplo: as secretarias de educação e o ministério da educação.

sob a condição de respeitar todas as restrições pedagógicas, o que deixa muito pouca margem de manobra ao professor” (CHEVALLARD, 2002a, p. 13, tradução nossa¹⁰⁸).

O nível acima, escola, diz respeito à própria instituição escolar. Chevallard (2002a) argumenta que a existência da escola promove uma espécie de economia na difusão do conhecimento na sociedade de tal forma que não se pode fazer uma comparação com o que poderia acontecer caso existisse uma sociedade sem escola. Além disso, é a escola responsável pela fragmentação disciplinar numa tentativa de reconstrução do conhecimento. No entanto, o autor reforça que o “mercado de disciplinas escolares” impede uma codisciplinaridade e faz com que a suposta especificidade dos conteúdos impeça um possível entrelaçamento dos conhecimentos. A esse respeito, diz o autor sobre a disciplina matemática:

Nesse jogo, a disciplina matemática joga a carta da dedução, não a da experimentação, à qual tende a renunciar (mesmo que, no plano epistemológico, a coisa não seja sólida) porque este é o monopólio das chamadas disciplinas experimentais (física e química, biologia e geologia) (CHEVALLARD, 2002a, p. 14, tradução nossa¹⁰⁹).

Já o nível sociedade influencia as restrições da escola e leva a esta seus valores e limitações. Chevallard (2002a) mostra que a escola pode absorver três pontos de vista diferentes vindos da sociedade. O primeiro é a crença de que a escola assume um papel cultural de educação formal obrigatório que faz prescindir obras as quais não foram validadas por ela. O segundo ponto é a educação focada nas habilidades do mercado de trabalho, em detrimento de um conhecimento mais teórico. O terceiro ponto de vista que mostra a influência da sociedade na escola é o estudo de questões de cunho social e comportamental, questões essas que, de acordo com Chevallard (2002a), só serão implementadas muito tempo depois de forma extracurricular.

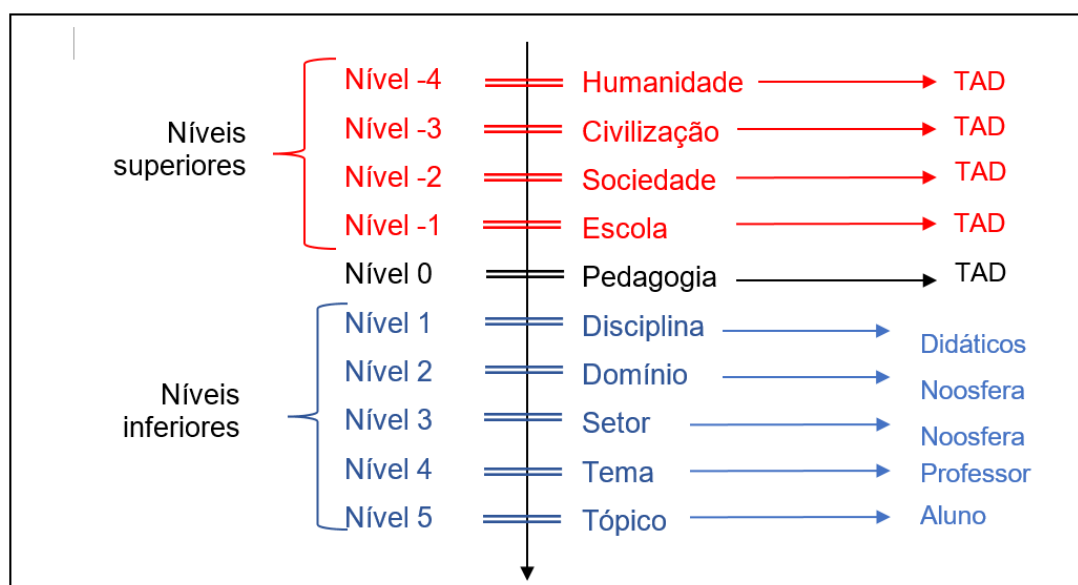
¹⁰⁸ [...] la légitime liberté pédagogique des enseignants» n'est acquise que sous la condition de respecter l'ensemble des contraintes pédagogiques, ce qui laisse au professeur une marge de manoeuvre fort réduite.

¹⁰⁹ À ce jeu-là, la discipline mathématique joue la carte de la déduction, non celle de l'expérimentation, à laquelle elle tend à renoncer (même si, au plan épistémologique, la chose n'est pas saine) parce que celle-ci est le monopole des disciplines dites expérimentales (physique et chimie, biologie et géologie).

Ampliações na teoria fizeram com que Chevallard (2007a, 2007b, 2011a) incluísse outros dois níveis nesta escala: civilização e humanidade. A esse respeito, o autor lembra a necessidade de considerar que há conhecimentos difundidos especificamente em determinadas civilizações, como, por exemplo, o fato de alguns países considerarem habilidades como conhecimento, e outros não. Silva (2011^a) explica que o nível humanidade revela seu interesse em determinados conhecimentos que são gerados pela necessidade da atividade humana. É, portanto, o degrau mais alto da escala. Aquele que, de alguma forma, gera as condições e restrições de cada nível subsequente.

Analizando os níveis dessa escala, Chevallard (2007a) explica que os tópicos ficam a cargo dos alunos; os temas são de responsabilidade do professor. Já a noosfera cuida dos setores e domínios. Segundo o autor, os didáticos limitam-se ao nível disciplina e cabe à TAD questionar o patamar superior: pedagogia, escola, sociedade, civilização (e humanidade, de acordo com a ampliação feita pelo autor posteriormente). Veja a figura 4.

Figura 4 – Níveis de codeterminação didática: atribuições gerais



Fonte: Adaptado de Chevallard (2002a, 2007a, 2007b, 2011a).

Chevallard (2007b) explica de que forma os níveis de codeterminação auxiliam na análise da difusão do conhecimento em nível praxeológico. O autor mostra que há

uma dificuldade, um bloqueio por parte do professor em conceber questões que possam fazer emergir técnicas relacionadas a tecnologias num caráter amplo, ou seja, que levem o aluno a pesquisar, a desenvolver essas técnicas. Seriam situações ligadas ao mundo e que poderiam gerar outras tarefas e técnicas. O desafio é, segundo o autor:

[...] conceber, para cada tema θ incluído no programa de aulas, pelo menos um tipo de tarefa T associada a θ pela tradição curricular em vigor, e que "força" θ , no sentido de que a técnica τ que terá alguma chance de emergir do estudo de T também teria todas as chances de parecer justificável ou pensável apenas supondo θ (CHEVALLARD, 2007b, p. 32, tradução nossa¹¹⁰).

O que ocorre é um bloqueio, que Chevallard (2007b) justifica por meio da escala de codeterminação didática. O autor explica: o tópico (trabalhado pelo aluno por meio da tarefa T) chega até a disciplina (matemática, por exemplo) através do tema θ . O que ocorre é que os níveis setor e domínio assumem um papel mais ligado a rótulos, a especificidades do currículo e não são utilizados como fonte para o desenvolvimento dos níveis inferiores (tema, tópico). Chevallard (2007b) exemplifica: o professor tem a tendência de situar-se nos temas θ triângulo retângulo ou quadrilátero e não os situa no setor (triângulos e quadriláteros) e domínio (geometria) correspondentes. Isso faz com que haja um bloqueio no momento de identificar um tipo de tarefa T que possa “gerar” os temas θ .

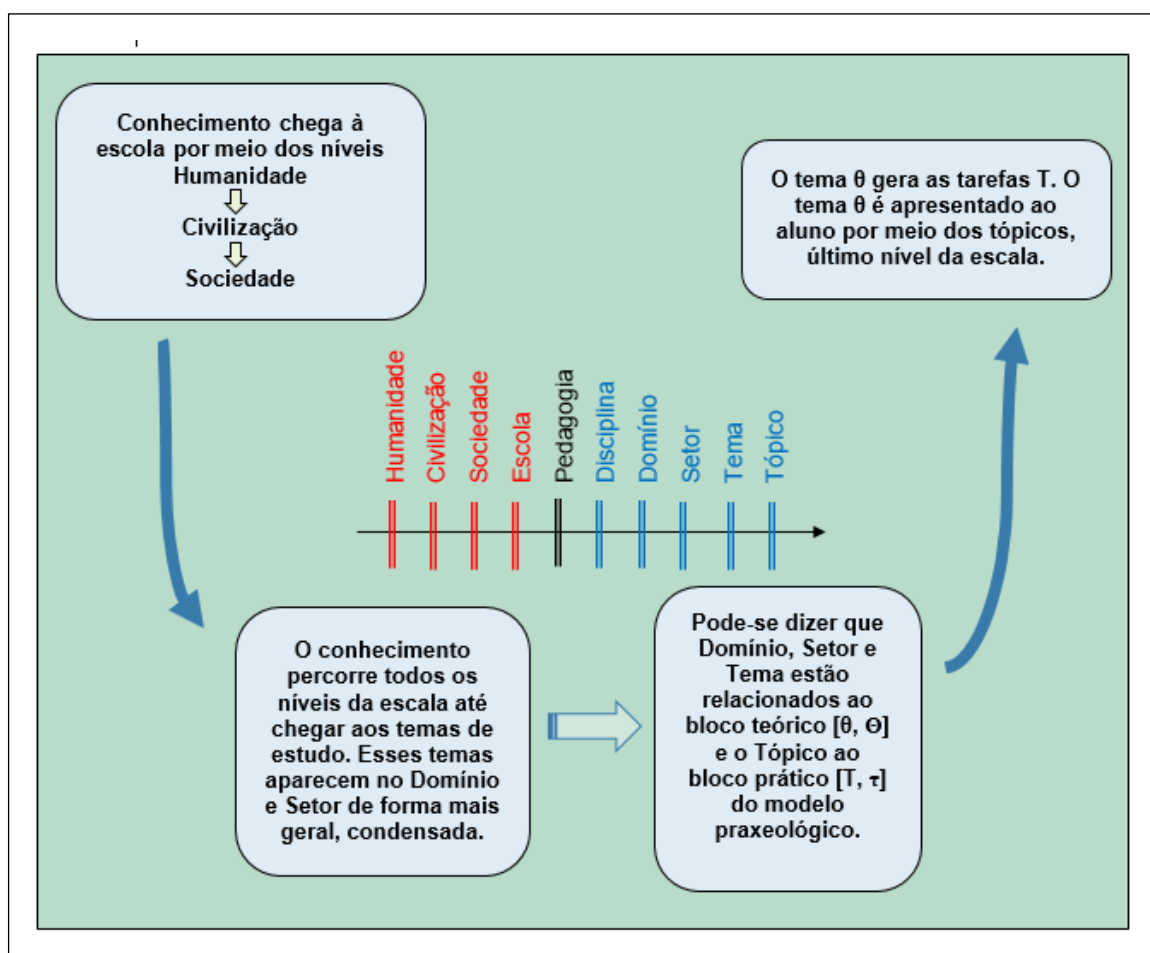
Finalizando esta seção, faremos um breve apontamento que relaciona a álgebra e os níveis de codeterminação. Chevallard (2011b) argumenta que a utilização dessa escala permite reconhecer as condições e restrições das praxeologias consideradas e os atores envolvidos. Ele situa os pedagogos no nível escola e os sociólogos no nível sociedade. Para ele, as atitudes desses personagens atingem, em última análise, a sala de aula. No caso da álgebra, ele mostra que sua difusão se deu

¹¹⁰[...] concevoir, pour chaque thème d'études θ inscrit dans le programme de la classe, au moins un type de tâches T associé à θ par la tradition curriculaire en vigueur (ou par une tradition curriculaire à restaurer, voire à «inventer», comme disent les historiens), et qui «force» (une partie au moins de) θ , en ce sens que la technique τ qui aura toutes chances d'émerger de l'étude de T aura aussi toutes chances de n'apparaître justifiable ou pensable qu'en supposant θ .

por um constrangimento no nível civilização. O que ocorreu é que havia uma preferência ocidental pelas palavras, pela retórica, e uma repulsa pelo simbólico, sincopado. Contudo, é a álgebra simbólica que a sociedade moderna encontra nas escolas. Isso mostra como as condições vão sendo impostas e absorvidas nível a nível. Mas, de alguma forma, é necessário levar em conta as consequências advindas dessas restrições e condições.

Um pequeno esquema pode ser visto na figura 5 e não tem a pretensão de esgotar o tema ou estruturar os conceitos de maneira estanque. A ideia é fazer um entrelaçamento nos tópicos vistos nesta seção e relacionar os recortes teóricos apresentados.

Figura 5 – Níveis de codeterminação e modelo praxeológico



Fonte: Construção nossa, 2022.

3.1.6 Noção de objetos ostensivos e não ostensivos

Os apontamentos teóricos desenvolvidos nas seções anteriores já mostraram que a noção de relação institucional, basilar na TAD, pode ser descrita e analisada pelo modelo praxeológico (CHEVALLARD, 1998, 1999). Além disso, ainda segundo o viés da TAD, toda atividade humana pode ser dividida em uma série de tarefas (CHEVALLARD, 1994a). Essas tarefas são justificadas, compreendidas, por meio de discursos específicos, as técnicas, as quais também são justificadas pela tecnologia e pela teoria¹¹¹.

Partindo, então, da ideia de que é por meio das tarefas que a prática institucional pode ser analisada, Chevallard (1994a) desenvolve o escopo de sua teoria e amplia a noção de objeto na TAD. Para isso, o autor justifica que não basta nomear ou distinguir as técnicas que sustentam uma tarefa. É preciso questionar: “[...] do que é feita uma determinada técnica? De que ‘ingredientes’ consistem? E mais uma vez: em que consiste ‘implementar’ uma técnica?” (CHEVALLARD, 1994a, p. 4, tradução nossa¹¹²). Portanto, é a partir da noção de técnica que o autor desenvolve e amplia a noção de objeto. Nesse momento, ele mostra que a atividade humana traz dois tipos fundamentais de objetos: os ostensivos e os não ostensivos.

Há alguns apontamentos muito pertinentes de Bosch e Chevallard (1999) que justificam a existência desses dois entes fundamentais. Primeiro, eles explicam que há uma tendência em reprimir as ferramentas materiais que envolvem a atividade matemática: discursos, escritas e gráficos parecem só existir pelo seu significado (e não por sua utilidade). A produção de conceitos, na visão dos autores, parece ser o aspecto concreto da atividade matemática. Segundo, é necessário analisar de que forma essa atividade é condicionada por esses instrumentos materiais, visuais, táteis. Além disso, eles questionam até que ponto a ausência do conceito na evolução da

¹¹¹ O modelo praxeológico pode ser consultado na subseção 3.1.3.

¹¹² [...] de quoi est faite une technique donnée? de quels «ingrédients» se compose-t-elle? Et encore: en quoi consiste la «mise en oeuvre» d’une technique?

matemática não estaria ligada à carência de um complexo de ferramentas de trabalho – a maioria de natureza material.

Chevallard (1994a) chama a atenção para esses dois aspectos que envolvem o campo matemático enquanto atividade humana: de um lado, uma certa materialidade visível, uma ferramenta; de outro, uma ideia, um conceito. E é dessa forma que ele caracteriza os objetos ostensivos e não ostensivos.

Objetos ostensivos são aqueles que assumem uma forma material, sensível, perceptível. Essa noção vale para gestos (linguagem gestual), palavras (ostensivos discursivos), desenhos, escritos etc. A característica fundamental dos ostensivos é a sua capacidade de ser manipulado. Chevallard (1994a) explica que podemos manipular tanto um compasso quanto o olhar, por exemplo. O que importa considerar nesse momento é a relação que existe entre os ostensivos e as respectivas técnicas.

Chevallard (1994a, p. 8, tradução nossa¹¹³) mostra que “um dos fenômenos mais notáveis [...] é o da sensibilidade aos ostensivos no trabalho matemático”. Ou seja, uma técnica pode desaparecer se alguma notação, por exemplo, não for mais utilizada. Quer-se dizer, com isso, que as técnicas disponíveis estão atreladas a esses objetos ostensivos. Ao se considerar os elementos praxeológicos: técnica, tecnologia e teoria, vê-se que o campo do discurso que justifica tais elementos estão condicionados à manipulação de certos objetos.

Em álgebra, tema deste estudo, deve-se manter em vista que seu simbolismo característico permite a manipulação de certos ostensivos. O aluno vai manipular, portanto, os objetos que estão ao seu alcance. E esses objetos ostensivos podem assumir um caráter de discurso ou de registro. A esse respeito, Radford (2011) traz considerações importantes sobre o que ele chama de álgebra oral e álgebra escrita. Segundo o autor, na álgebra oral recorria-se a um texto com algum simbolismo algébrico, sem, contudo, focar-se neles. A ideia é que esses símbolos faziam parte de um discurso maior, mas o interesse era no processo de solução de um problema. Isso se dava até o final do século XV, antes do advento da imprensa. Já na álgebra escrita, como a própria expressão sugere, os procedimentos simbólicos imperavam. Com a

¹¹³ L'un des phénomènes les plus remarquables, [...] est celui de la sensibilité aux ostensifs du travail mathématique.

chegada do livro impresso, portanto, “o discurso foi transformado em escrita. Tal como a álgebra” (RADFORD, 2011, p. 205).

Essas colocações de Radford (2011) corroboram a visão de Chevallard (1994a) quando este afirma que falar em progresso na matemática significa falar em progresso de técnicas, tecnologias e teorias. E isso implica, conseqüentemente, a criação de ostensivos adequados a essas técnicas.

A respeito dos objetos não ostensivos, estes estão ligados ao campo das ideias, das noções e conceitos. Eles não podem ser manipulados – mas evocados. É aqui que reside sua particularidade e profunda relação com os objetos ostensivos: os não ostensivos só podem ser “acessados” por meio dos ostensivos relacionados. Dessa forma, para acessar a noção de variável, é preciso que o ostensivo (discurso) “variável” esteja disponível, além dos registros escritos adequados.

Importante considerar a dialética que envolve esses objetos, na visão de Chevallard (1994a). O autor mostra que qualquer técnica envolve a manipulação de ostensivos com a ajuda de certos não ostensivos evocados e, em contrapartida, só é possível acessar estes não ostensivos com o auxílio dos ostensivos. Esse caráter dialético tem algumas conseqüências, como mostra o autor. Por exemplo, pode-se afirmar que é preciso entender a noção de equivalência (um não ostensivo) antes de usar seu sinal (um ostensivo). Contudo, Chevallard (1994a) defende que tanto a noção quanto o registro podem ser desenvolvidos juntos, nessa perspectiva dialética, em que o sinal, o ostensivo, tem um papel tão importante quanto a noção de equivalência, o não ostensivo evocado.

Ainda a respeito da dialética que envolve ostensivos e não ostensivos, Casabò (1994) explica que não se pode realizar uma atividade se não conseguimos evocar determinados não ostensivos por meio dos ostensivos apropriados. E ela coloca uma questão muito instigadora: é natural que se recorra aos objetos não ostensivos, mas não fica claro a qual deles em particular, ou seja, como saber quais são os não ostensivos que são ativados? A relação dialética entre esses objetos pressupõe que eles desempenham papéis diferentes, mas, para a autora, a questão da prioridade genética se parece bastante com o problema do “ovo e da galinha” (CASABÒ, 1994).

A autora traz outros argumentos pertinentes a respeito do tema. Segundo ela, existem posições extremas quando tratamos de ostensivos e não ostensivos. Pode-se privilegiar a compreensão e esquecer-se da técnica, como se a tendência ostensiva fosse automática (aqui, ostensivos em segundo plano). Por exemplo, deixar em segundo plano tarefas e técnicas que podem levar o estudante a compreender a diferença entre incógnita e variável. E, além disso, pode-se também focar nos instrumentos e esquecer-se dos aspectos conceituais. Na visão de Casabò (1994), há uma ambivalência que envolve ostensivos e não ostensivos.

Pode-se considerar, assim, que os objetos em matemática assumem esse caráter de materialidade concreta, manipulável e de noções e conceitos. Em álgebra, tema deste estudo, sabe-se que o simbolismo envolve aspectos de ferramenta e de conceito: ferramenta quando é preciso manipular um polinômio, por exemplo, e conceito se considerarmos a ideia de função. Portanto, analisar uma tarefa em álgebra implica considerar que objetos são manipulados e quais são evocados. Considerando os blocos técnico $[T, \tau]$ e teórico $[\theta, \Theta]$ e admitindo as sucessivas justificativas teóricas que são feitas a partir da técnica, pode-se assumir que a análise dos objetos ostensivos e não ostensivos envolvidos pode dar pistas a respeito do que o aluno toma por base no desenvolvimento das tarefas em álgebra. Ou seja, tal objeto é utilizado como ferramenta ou como conceito? Na análise da relação pessoal, serão retomadas essas e outras considerações.

3.1.7 Noção de topos

Chevallard (1998) explica que, numa praxeologia matemática, há a tradição de se delegar ao aluno o desenvolvimento das tarefas. Em contrapartida, esse aluno recebe uma ajuda para aprender. Há, portanto, certos gestos que cabem aos atores da tarefa, os estudantes. Esses gestos, de acordo com Chevallard (1998), são coordenados pela própria tarefa ou podem ser, também, assumidos

momentaneamente por meio de uma relativa autonomia do estudante.¹¹⁴ De qualquer forma, fala-se em certos papéis que cabem tanto ao aluno quanto ao professor.

Esses papéis, gestos, “lugares”, são denominados por Chevallard (1998) como *topos*.

O grego *topos* (que corresponde ao latim *locus*) significa “lugar”: o *topos* de x_i é o “lugar de x_i ”, seu “lugar”, o lugar onde, psicologicamente, x_i sente a sensação de brincar, na realização de t , “um papel próprio”. No caso de uma aula, falaremos assim do *topos* do aluno e do *topos* do professor. Assim, quando uma aula de matemática “faz um exercício”, que é uma tarefa eminentemente cooperativa, a subtarefa que consiste em fornecer a redação do exercício geralmente cabe ao professor: pertence ao seu *topos*. A tarefa que consiste em produzir – por exemplo, por escrito – uma solução para o exercício está sob o *topos* do aluno, enquanto a tarefa que consiste, então, em fornecer uma chave de resposta está novamente sob o *topos* do professor. Se, durante a resolução do exercício, um aluno faz uma pergunta ao professor, realiza, assim, o que habitualmente se considera um gesto simples, apelando a um gesto homólogo por parte do professor – gesto que por vezes pode consistir em se recusar a responder (CHEVALLARD, 1998, p. 18, tradução nossa¹¹⁵).

As palavras do autor descrevem, portanto, determinados gestos que são esperados de alunos e docentes. O que cabe destacar desse excerto teórico, e que interessa neste estudo, é que, segundo Chevallard (1998), há certo trabalho autônomo do aluno que é invisível ao professor. Além disso, o autor afirma que esse gesto invisível de x_i , e “[...] que o professor pode em princípio ignorar, tende a ocupar a maior parte do espaço de estudo [...]” (CHEVALLARD, 1998, p. 18, tradução nossa¹¹⁶). A

¹¹⁴ Simbolicamente, Chevallard (1998) chama de $x_1, \dots, x_n, x_i$, os atores da tarefa considerada. Neste estudo, são os alunos.

¹¹⁵ Le grec *topos* (qui correspond au latin *locus*) signifie « lieu » : le *topos* de x_i , c'est le « lieu de x_i », sa « place », l'endroit où, psychologiquement, x_i éprouve la sensation de jouer, dans l'accomplissement de t , « un rôle bien à lui ». Dans le cas d'une classe, on parlera ainsi du *topos* de l'élève et du *topos* du professeur. Ainsi, lorsqu'une classe de mathématiques « fait un exercice », ce qui est une tâche éminemment coopérative, l'a sous-tâche consistant à fournir l'énoncé de l'exercice revient, généralement, au professeur : elle appartient à son *topos*. La tâche consistant à produire – par exemple par écrit – une solution de l'exercice élève, elle, du *topos* de l'élève, tandis que la tâche consistant, ensuite, à fournir un corrigé ressortit, à nouveau, au *topos* du professeur. Si, au cours de la résolution de l'exercice, un élève pose une question au professeur, il effectue ainsi ce qui est vu ordinairement comme un simple geste, appelant un geste homologue de la part du professeur – geste qui peut consister, quelque fois, à... refuser de répondre.

¹¹⁶ [...] que le professeur peut en principe ignorer, tende à occuper l'essentiel de l'espace de l'étude.

consequência desse fato é que pode haver uma espécie de conflito na gestão desse espaço, desse *topos*.

Nesse sentido, Chevallard (1998) chama a atenção para o fato de uma organização didática ignorar as necessidades que surgem do trabalho oculto dos alunos no dia a dia da sala de aula. Ou seja, por vezes, o *topos* do estudante é desenvolver uma tarefa cujas técnicas são aquelas esperadas de antemão pelo professor. Por outro lado, pode haver uma resposta não validada institucionalmente e que, no entanto, responde (momentaneamente) àquela tarefa. Essa situação pode revelar uma ruptura entre o *topos* do aluno e do professor. Ou seja, de acordo com Chevallard (1998), o aluno pode ser e é seu diretor de estudo em vários momentos. Contudo, não se pode prescindir do trabalho do professor. O que ocorre é que, se o professor assume esse papel de direção do estudo ignorando ou não considerando o papel do aluno, pode haver um empobrecimento de uma cultura didática do aluno-aluno. Em contrapartida, se o professor não assume seu *topos*, tal situação invalida a própria aprendizagem matemática.

Nota-se que é importante – e, ao mesmo tempo, um desafio – analisar os papéis que cabem a alunos e professores na organização didática em questão. Chevallard (1998, p. 19) fala em certo “drama didático” que envolve os docentes a esse respeito: eles devem estar sutilmente presentes, devem saber se fazer ausentes e deixar o estudante livre.

Além disso, o olhar sobre o *topos* do professor e do estudante permite que se façam considerações a respeito do papel específico desses personagens. A esse respeito, Chevallard e Grenier (1997b) apresentam algumas questões que podem ser analisadas nos documentos oficiais por meio dessa perspectiva. Segundo os autores, é possível fazer inferências sobre o que é e o que não é especificado aos alunos e professores e, ainda, analisar práticas que existem, mas não estão previstas nos textos oficiais.

Guadagnini (2018) lembra que a noção de *topos* permite considerar o que se espera do professor e do aluno, de forma que a análise das tarefas revela o nível de autonomia desses atores na relação didática. Portanto, julga-se pertinente trazer esse aporte teórico para a realização das análises neste trabalho. Além disso, acredita-se

que algumas considerações podem ser feitas por meio das relações pessoais e institucionais previstas e aquelas encontradas no exame dos documentos e tarefas.

A seguir, faremos uma reformulação da questão de pesquisa, hipótese e objetivos, agora à luz do modelo teórico que estamos adotando.

3.2. Retomando questionamentos à luz da teoria

O leitor deve ter notado que várias questões foram levantadas durante o desenvolvimento deste capítulo, cujo objetivo foi apresentar o corpo teórico desta investigação. Já foi afirmado, também, que nossa visão de ciência corrobora os preceitos de Caraça (2010) que abrem este capítulo: a teoria adotada não pretende simplesmente descrever a realidade, mas construir recortes que possam interpretar e prever o espaço estudado.

Foi proposital a exposição de novos questionamentos feitos paulatinamente até aqui. Vamos retomá-los brevemente no próximo parágrafo, à luz da teoria – TAD. São as questões principais levantadas.

No início do capítulo, as indagações envolveram os elementos básicos da teoria: que objetos compõem o campo algébrico? De que forma o aluno se relaciona com eles? Instituição e sujeitos caminham de forma harmônica? Já a respeito da relação pessoal e institucional, questionamos: como o conteúdo algébrico é abordado pelo professor e pela instituição? Como o aluno constrói sua relação com o campo algébrico? Agora, à luz do modelo praxeológico: o aluno, ao generalizar, está construindo um ambiente teórico? Como ocorre essa generalização no bloco prático? Que temas da álgebra podem e são explorados nos blocos prático e teórico?

Refizemos, assim, questão de pesquisa, hipótese e objetivos, agora à luz da TAD. Vamos adotar o modelo praxeológico como via principal a guiar este estudo. Portanto, consideraremos os blocos [prático] e [teórico] da praxeologia na condução das análises.

➤ Questão de pesquisa anterior:

- Quais são as concepções de alunos de 7º e 8º anos envolvendo a generalização na aquisição da linguagem algébrica?

- Questão de pesquisa reformulada:
 - Quais são os conhecimentos mobilizados por alunos de 7º e 8º anos no ambiente prático e teórico ao lidarem com a generalização algébrica?
- Hipótese anterior:
 - No desenvolvimento do estudo da linguagem algébrica, os alunos experimentam diversas concepções no campo da generalização as quais podem estar relacionadas com a estrutura do currículo de matemática, com a abordagem do professor e com a interpretação do aluno.
- Hipótese reformulada:
 - No desenvolvimento do estudo da álgebra, os alunos experimentam diversas concepções no campo da generalização que podem estar ligadas ao bloco [prático] e [teórico] da praxeologia, com a estrutura do currículo de matemática, com a abordagem do professor e com a interpretação do aluno.
- Objetivo geral anterior:
 - Investigar as concepções de alunos de 7º e 8º anos do Ensino Fundamental envolvendo a generalização algébrica.
- Objetivo geral reformulado:
 - Analisar o *corpus* prático e teórico mobilizado por alunos de 7º e 8º anos do Ensino Fundamental no contato com a generalização algébrica.

3.3. Síntese e considerações finais do capítulo

Neste capítulo, expusemos os elementos básicos da TAD que irão auxiliar na análise dos dados deste estudo. Os elementos principais da teoria são: objeto O, sujeito X e Instituição I. O autor Chevallard (1992) explica que a noção de objeto é basilar na teoria e foca seu desenvolvimento no conceito de relação – *rapport* – entre esses entes. Enquanto tudo é objeto, vê-se que o sujeito mantém uma relação com

ele em alguma instituição. A instituição é a instância que valida, que reconhece o objeto.

Destaca-se, também, os conceitos de relação pessoal, $R(X, O)$, entre sujeito e objeto, e a relação institucional entre o sujeito numa determinada posição p e o objeto O , $R_i(p, O)$. Neste estudo, um dos intentos é descrever essas relações envolvendo a instituição escola/sala de aula, o sujeito aluno e os objetos do campo algébrico, mais especificamente a generalização. Essas relações são modeladas na TAD por meio de uma ferramenta metodológica, a praxeologia.

Chevallard (1998, 1999) explica que o modelo praxeológico vai descrever e analisar as práticas institucionais. Esse modelo é composto por quatro elementos básicos, os quais podem ser divididos em dois blocos. Tarefas T e técnicas τ formam o bloco prático, $[T / \tau]$. Tecnologia θ e teoria Θ compõem o bloco teórico $[\theta, \Theta]$. A noção de praxeologia permite analisar, no *corpus* prático, as tarefas e técnicas mobilizadas pelo sujeito na instituição. Uma técnica pode ser justificada por uma tecnologia, a qual contém um discurso mais generalista, porém teórico. A teoria também justifica a tecnologia, numa perspectiva mais ampla ainda.

Chevallard (1998) levanta algumas considerações a respeito do “manejo” desses entes práticos e teóricos na escola. Segundo ele, é mais comum que o professor apresente uma tecnologia/teoria como uma aplicação de uma tarefa do que construções teóricas a partir dessas tarefas. Essas situações são colocadas pelo autor quando ele descreve o que chama de momentos didáticos, ou seja, aqueles momentos que fazem parte da gestão didática do professor (CHEVALLARD, 1997a, 1998).

Neste capítulo, foi abordada, ainda, a noção de níveis de codeterminação. Chevallard (2001) explica que o professor pode enxergar uma unidade entre os tópicos explorados em sua aula, mas que o aluno nem sempre consegue estabelecer um sentido em temas que são abordados, na maioria das vezes, de forma muito fragmentada. Essa noção vai auxiliar as análises em níveis inferiores e superiores da organização curricular que será explorada aqui, além de possibilitar uma relação com as praxeologias analisadas.

Os objetos matemáticos desse estudo serão descritos por meio da noção de ostensivos e não ostensivos. Conforme foi mostrado, há objetos que são evocados por meio de outros. E, segundo foi colocado, a relação pessoal do aluno com os objetos matemáticos desse estudo vai indicar que ostensivos e não ostensivos são elencados nos blocos [prático] e [teórico]. Finalmente, a noção de topos também contribui, permitindo identificar qual é o lugar do aluno e do professor nas tarefas que serão propostas.

No final do capítulo, retomamos questionamentos, hipóteses e objetivos da pesquisa, já à luz da TAD, apostando no poder da teoria na condução deste trabalho. Com esses apontamentos, findamos esta primeira parte, cujo objetivo foi apresentar os contornos metodológicos e teóricos da pesquisa.

A seguir, faremos uma exploração do panorama algébrico que será explorado: revisão literária dos principais trabalhos que estão em consonância com esta pesquisa.

4. ÁLGEBRA E GENERALIZAÇÃO – ASPECTOS INSTITUCIONAIS

E aqui tem o leitor um exemplo,
possivelmente o mais importante de todos,
de como a Matemática, do mesmo modo que
toda construção humana, depende do
conjunto de condições sociais em que os
seus instrumentos têm de actuar.
Subordinação que não a humilha, antes a
engrandece.
(Bento de Jesus Caraça)

O objetivo deste capítulo é trazer considerações a respeito do tema deste estudo por meio de outros trabalhos já publicados. Sobre isso, Yin (2001) argumenta que o sentido principal de uma revisão literária não é trazer possíveis respostas sobre o tópico investigado, mas levantar outras questões pertinentes ao tema. Além disso, a citação da epígrafe nos lembra que a própria matemática está sujeita às condições criadas pelo ser humano. Vamos, portanto, conhecer algumas dessas condições.

No capítulo anterior, apresentamos o quadro teórico que sustenta este estudo e construímos um questionamento baseado nessa estrutura teórica. Assim, os rumos da pesquisa são orientados pela teoria escolhida. O que queremos dizer é que a revisão dos estudos aqui elencados será feita por meio do olhar da TAD, ou seja, a ideia é identificar aspectos institucionais à maneira do que prevê essa construção teórica.

O objeto de nossa investigação – generalização – está inserido no campo algébrico. Dessa forma, julgamos pertinente fazer uma análise de alguns estudos envolvendo essa área e buscar levantar questões a respeito. Os trabalhos aqui apresentados são aqueles que fizeram parte do estudo da pesquisadora e que, de alguma forma, contribuíram para o amadurecimento dos tópicos aqui explorados.

4.1. Panorama geral dos estudos envolvendo álgebra e generalização

O capítulo aqui apresentado foi organizado por meio de uma revisão sistemática de acordo com Baena (2014). Esse método de estudo é muito utilizado na área da saúde. Para tanto, aproveitamos algumas de suas premissas de modo a sustentar nossa pesquisa, a qual possui caráter qualitativo. Segundo a autora, a revisão de literatura nesta metodologia prevê a formulação de uma pergunta de pesquisa que seja capaz de orientar toda uma estratégia de busca ampla. Nesse caso, essa questão é definida pelo acrônimo PICO – população, intervenção ou exposição, comparação e desfecho. A revisão, portanto, seleciona estudos levando em conta critérios pré-estabelecidos.

Na revisão sistemática, segundo Baena (2014), existem duas possibilidades de investigação: a heterogeneidade e a análise quantitativa por meio da metanálise. Esta última será descartada em nosso contexto. Em relação à heterogeneidade, o objetivo é avaliar o quanto os resultados diferem entre si. Esta é uma peculiaridade que julgamos conveniente em nossa pesquisa. A heterogeneidade leva em conta que os estudos nem sempre são conduzidos sob mesmo protocolo e contexto. As diferenças entre as populações, por exemplo, devem ser levadas em consideração. Portanto, numa pesquisa como a nossa, que busca características como ineditismo, pertinência no meio acadêmico e possibilidade de desdobramento, enxergamos nesta metodologia um caminho propício para alcançar nosso objetivo inicial. Outros pontos característicos da revisão sistemática são: realizar uma estratégia de busca abrangente; definir *a priori* critérios de inclusão e exclusão; avaliar a qualidade metodológica dos estudos; explorar as potenciais causas de heterogeneidade; verificar se os estudos analisados incluem população idêntica à daquele que pesquisa.

A questão feita *a priori* e que orientou a seleção dos artigos aqui analisados é: de que maneira os estudos que envolvem a grande área álgebra, realizados no Ensino Fundamental, consideram o tema generalização? Os cinco artigos selecionados são: *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième e Troisième partie*, de Chevallard (1989, 1990); *n, c'est un nombre ou c'est des nombres?*, de Marie-Hedwige Denis et al (2004); *Expressing Generality and Roots of Algebra*, de John Mason (1996); *Layer of generality and types of*

generalization in patter nactivities, de Luis Radford (2010); *Analyse d'une séquence basée sur des problèmes de généralisation pour l'entrée dans l'algèbre: Apport d'une analyse praxéologique*, de Alain Bronner (2019).

Seguindo uma ordem cronológica, vamos começar nossa análise pelo estudo de Chevallard (1989, 1990). O autor defende o trabalho com modelos matemáticos. Para ele, aritmética e álgebra se relacionam de maneira dialética: o domínio para o cálculo algébrico surge dos sistemas numéricos, e são as ferramentas desse cálculo algébrico que permitem a construção de sucessivos sistemas numéricos. Para ele, a modelagem permite trazer um conhecimento que outro caminho não forneceria tão facilmente. Além disso, a principal característica que marca a transição aritmético-algébrica é a mudança no “discurso”: essencialmente oral na aritmética, e literal no caso da álgebra.

Chevallard (1989, 1990) defende o trabalho com parâmetros, variáveis e a noção de função. Um ponto que nos chama a atenção em seu trabalho é sua defesa pela investigação do conhecimento em detrimento do que ele chama de redescoberta. A nosso ver, essa posição traz consequências a respeito do conceito de generalização: de fato, uma proposta que busque fazer com que o estudante reinvente o conhecimento pode levar o professor a buscar dele manifestações (generalizações) muito próximas daquelas já registradas na história da matemática. Em contrapartida, levar a turma a investigar determinado conhecimento faz emergir conhecimentos bem genuínos.

Também nos interessa a posição do autor quando ele afirma que muito poucos sistemas podem ser modelados usando apenas números naturais. Chevallard (1998) explana ainda sobre a organização global, local e regional do currículo: no nível local, o conhecimento a ser ensinado e a ser aprendido é colocado em prática, sendo onde julgamos se a generalização realizada dos estudantes pode ser considerada mais evidente. Para o autor, as condições e restrições da sala de aula fazem emergir o “currículo oculto”, cuja abrangência nunca será institucionalizada.

Encontramos aqui material fértil para explorarmos a ideia de generalização, pois, a nosso ver, é necessário fazer uma delimitação nas definições desse conceito,

já que percebemos que o currículo traz um conhecimento generalizado, cuja organização local faz emergir outras tantas generalizações por parte do aluno.

Denis e outros (2004) apresentam a análise de uma situação com o objetivo de trabalhar o conceito de variável e incógnita. A investigação segue a linha defendida por Chevallard (1989, 1990) ao defender a modelização como estratégia no trabalho com a álgebra. Vale a pena ressaltar que o artigo defende uma intervenção que provoque no estudante uma ruptura a respeito da transição da aritmética e da álgebra.

Segundo os autores, tarefas que visem ao trabalho com incógnitas provocam no estudante a sensação de estar lidando com a aritmética generalizada. Portanto, eles defendem que as tarefas envolvendo o conceito de variável devem vir em primeiro lugar. Os autores apostam, ainda, em situações que busquem desenvolver com os estudantes todo o processo de construção das fórmulas, das leis matemáticas.

Na situação analisada pelos autores, os alunos da 5ª série conseguiram perceber que a fórmula encontrada não servia apenas como uma “máquina de produzir resultados numéricos”, mas que, muito além disso, ela é capaz de responder a uma pergunta qualquer do problema.

Kieran *et al* (2016) mostra que o trabalho com a atividade de padronização numérica e geométrica se tornou o maior interesse nas pesquisas que envolviam o movimento conhecido como *early álgebra*, um pouco antes dos anos 2000. De fato, a maior parte dos trabalhos que envolvem a inserção algébrica com alunos mais jovens trabalham com esse tipo de tarefa.

Com relação à generalização, nosso foco aqui, o estudo de Denis *et al* (2004) trata do conceito de forma indireta, não o mencionando claramente. Percebemos que, ao levar os estudantes a modelar algebricamente, a situação criada os conduziu a generalizar processos que envolvem a ideia de variável. Chama a atenção o trabalho do professor e sua intervenção: no instante em que os estudantes tiveram contato pela primeira vez com a necessidade de criar uma fórmula, o professor, nas palavras dos autores, designou essa ruptura epistemológica inaugural e os ajudou a identificá-la. Ou seja, entendemos aqui que a generalização não ocorreu por acaso, mas veio de uma situação bem planejada.

Finalizando, ainda a respeito da generalização, os autores defendem que, para atingir um grau mais amplo de generalidade, os estudantes devem ter contato com problemas que não sejam possíveis de resolver apenas com as ferramentas da aritmética, caso contrário haverá uma generalização simples e uma perda do significado das atividades da álgebra.

John Mason é referência na temática generalização. No artigo analisado, o autor é enfático ao afirmar que ela é o coração da matemática e que o pensamento matemático não está ocorrendo se, primeiro, os professores não estão cientes de sua presença e, segundo, não têm o hábito de fazer com que os estudantes expressem as suas generalizações.

Destacamos nesse artigo a defesa de Mason (1996) de que a generalização não é apenas o culminar da investigação. Ele é onipresente. Mas essa onipresença tende a ser negligenciada pelo fato de o especialista julgá-la elementar, o que, segundo o autor, não acontece com o estudante. Cabe aqui reforçar o que destacamos anteriormente: essa onipresença se encontra no currículo, em âmbito de organização global, contudo a relação com o estudante se dá no nível local e, portanto, se o professor não adotar uma praxeologia que lide com a generalização de forma intencional, apostamos que é grande a chance de esse processo acontecer à revelia.

O autor explicita sua ideia de que os currículos fornecem o conhecimento generalizado e que o professor complementa fornecendo exemplos, os quais, para o estudante, podem ser interpretados como únicos representantes de determinado conteúdo, deixando de ser destacada, assim, a generalização que o subsidia.

O estudo de Radford (2010) traz uma análise bem específica a respeito das atividades envolvendo padrão. Para o autor, nem todas as generalizações que os estudantes fazem são algébricas: ele faz uma distinção entre generalização algébrica e aritmética.

No caso da generalização algébrica, os estudantes fazem uso das letras, e na generalização aritmética, mesmo encontrando um aspecto comum no padrão, os estudantes generalizam utilizando números.

O autor defende que é preciso que o professor se mantenha vigilante para que os estudantes se envolvam com atividades de padrão num sentido algébrico. É muito

interessante a posição do autor quando faz uma distinção entre indução e generalização. De fato, há uma postura praticamente natural do professor ao ter em mente que existe um caminho que conduz o trabalho dos padrões ao pensamento algébrico e à generalização.

Outro ponto que merece destaque nesse estudo é o que ele chama de objetificação do conhecimento, isto é, são os gestos, sinais e artefatos utilizados para perceber conceitos, fazer sentido, para “objetificar” o conhecimento.

A nosso ver, trata-se do que na TAD conhecemos por objetos ostensivos e não ostensivos, sendo os objetos ostensivos aqueles que permitem manipular o objeto matemático, e os não ostensivos aqueles que são evocados quando efetuamos essa manipulação (CHEVALLARD, 1994). Radford (2010) explica que há uma diferença entre alcançar a generalidade por meio de palavras, gestos e por meio de uma fórmula ou gráfico.

Resumindo, para o autor, quando o estudante utiliza gestos, palavras e ritmo, temos uma generalização factual. Na generalização contextual, os estudantes utilizam aspectos da própria tarefa, como “a próxima figura”, a “linha superior”. E, por fim, na generalização simbólica, há a utilização da linguagem própria da álgebra. O autor sugere que há muitos desafios em cada uma das camadas de generalidade, e aposta que a generalização factual e contextual carrega a narração de eventos e a designação de objetos, o que é muito diferente da simbólica, exigindo, assim, que o professor esteja atento a isso.

O trabalho de Bronner (2019), que é centrado em uma abordagem antropológica (Chevallard 1992, 1999), procura estudar as condições que favoreçam uma entrada para a “álgebra antes de letra” através de problemas de generalização.

Bronner (2019) utiliza o conceito da modelagem da atividade matemática desenvolvido por Chevallard (1999) e a noção de praxeologia. O estudo faz uma descrição do raciocínio dos estudantes no contato com tarefas de generalização. Para isso, o autor divide essas estratégias em três categorias: técnicas baseadas em tecnologias de generalização explícita, nas quais se percebem métodos de contagem relacionados a configurações espaciais; tecnologias de generalização implícitas, em que os estudantes já veem possibilidade na generalização para quantidades maiores,

mas também não fazem uso das letras; e, por fim, tecnologia de generalização por investigação e indução, nas quais há, segundo o autor, uma indução numérica na generalização, sem uso de uma configuração espacial. Observamos que a palavra tecnologia, aqui, corresponde à justificativa das técnicas utilizadas pelos estudantes.

No seu trabalho, Alain Bronner defende que é necessária uma estrutura complexa e aninhada de uma rede de tarefas para desenvolver o processo de generalização. Além disso, o autor também constatou, por meio da produção dos estudantes, que existe uma articulação numérico-algébrica no pensamento ligado à generalização. Por fim, ele aposta que o pensamento algébrico e as praxeologias de generalização são como dois lados de uma aposta comum rumo ao ingresso da álgebra.

Percebemos que os trabalhos de Chevallard (1989, 1990) e Denis *et al* (2004) trazem a questão da generalização de forma indireta, já a considerando como parte integrante do processo de modelização. Já Radford (2010) propõe a divisão das tarefas de generalização em níveis, considerando se os estudantes podem ou não utilizar a linguagem simbólica. Bronner (2019) faz uma análise praxeológica dos problemas envolvendo a generalização, e John Mason (1996) se propõe a analisar a temática como objeto em si de conhecimento.

O que notamos é que, no geral, as tarefas de generalização visam, em longo prazo, atingir uma linguagem simbólica. A nosso ver, podemos explorar mais a temática no sentido de investigar que tipo de generalização o estudante é capaz de fazer no sentido numérico e até mesmo com a utilização de palavras. Trabalhos como os que analisamos aqui mostram que a generalização matemática parece ser fruto de um conjunto organizado de praxeologias.

Conforme já dito, esses estudos balizaram os estudos da professora/pesquisadora e contribuíram para a elaboração das questões a serem investigadas aqui. Contudo, julgamos pertinente proceder a uma pesquisa envolvendo plataformas de divulgação científica e com alguns critérios de inclusão e exclusão. Optamos pelo *Scientific Eletronic Library Online – Scielo*, por ser um espaço conhecido pela divulgação de estudos relevantes, não apenas brasileiros, mas também de países da América do Sul, Europa e África. O objetivo foi mapear as

pesquisas por meio de palavras-chave para que pudéssemos identificar não apenas o que vem sendo estudado, mas, principalmente, apresentar de que forma nosso estudo pode ser incluído em parâmetros como relevância e ineditismo.

Os cinco trabalhos apresentados anteriormente mostram que a generalização pode ser analisada como um objeto em si e como um processo que pertence ao campo algébrico. Nesse sentido, interpretamos que nosso estudo pode contribuir com mais apontamentos que envolvam esse objeto. Com o intuito de investigar quais pesquisas caminham nesse sentido, fomos mapear pesquisas por meio de algumas palavras-chave. Essa busca na plataforma *Scielo* ocorreu no mês de janeiro de 2022.

Todas as palavras foram utilizadas com o operador booleano AND. De início, os termos foram: “generalização” e “TAD”. Nenhuma pesquisa foi encontrada. Ao digitarmos as palavras “generalização” e “álgebra”, dois trabalhos foram mencionados. São eles: *Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje*, de Alberto Zapatera Llinares, publicado em 2018, na Revista Lationoamericana de Investigación en Matemática Educativa; e o artigo *Práticas de discussão em sala de aula de matemática: os casos de dois professores*, de Cátia Rodrigues, Luiz Menezes e João Pedro da Ponte, de 2018, publicado na revista BOLEMA.

O estudo de Llinares (2018) trata do objeto generalização envolvendo atividades com padrões. O autor mostra que os estudantes possuem muita dificuldade ao expressar a lei algébrica das expressões com o uso de variáveis e argumenta que esse processo parece ser mais simples quando se trata de generalizar termos mais próximos. O estudo foi feito com crianças de 8 a 12 anos, equivalente às turmas de 3º a 6º ano do Ensino Fundamental.

Rodrigues, Menezes e Ponte (2018) trazem um estudo que analisa as práticas de discussão numa aula de matemática envolvendo dois professores. Nesse caso, os autores focam sua pesquisa no conhecimento advindo do modo como os docentes conduzem suas aulas visando à generalização de ideias algébricas. É um estudo relacionado à formação de professores, cujas discussões fogem ao escopo de nosso trabalho.

O que identificamos nos estudos analisados é que, de forma geral, os trabalhos que envolvem o estudo da generalização algébrica a relacionam às atividades de padrão. A tese de Baqueiro (2016) faz um apanhado sobre esse tipo de investigação nas pesquisas brasileiras. De maneira geral, a autora mostra que os estudos apontam para a pertinência do trabalho com este tipo de atividade, mas as pesquisas não estão focadas na análise do objeto generalização em si. Ou seja, as atividades de padrão são um meio para que o estudante generalize e caminhe rumo ao pensamento algébrico.

4.2. Síntese e considerações finais do capítulo

Quando se trata de pesquisas envolvendo o campo algébrico, notamos que há muitos trabalhos a respeito do tema. Neste capítulo, apresentamos um panorama geral dos estudos que, de alguma forma, comungam com nossos objetivos. Contudo, é prudente afirmar que nossas leituras englobam um número considerável de outros estudos e que o recorte aqui feito cumpre o objetivo de fornecer um recorte do que vem sendo produzido na área.

Os cinco primeiros trabalhos apresentados tratam da generalização por meio de diferentes enfoques, o que nos permite afirmar que o tema é passível de ser explorado cada vez mais. Os dois últimos estudos foram trazidos para mostrar que este objeto é tratado como um componente do pensamento algébrico e pode ser investigado sob várias vertentes – inclusive na linha teórica que investiga a formação de professores. Identificamos como semelhança nesses trabalhos o fato de a generalização estar atrelada à linguagem simbólica: as conclusões, de maneira geral, descrevem o pensamento do aluno antes ou após a aquisição da linguagem algébrica.

Localizamos, assim, nosso estudo no rol do que vem sendo apresentado no tocante à generalização. Enxergamos dois desdobramentos na pesquisa que ora apresentamos: um deles diz respeito à continuidade e outro, à originalidade. Continuidade quando percebemos que este trabalho trata de um tema relevante e que possui panorama amplo e diverso. E original quando pretende conduzir o estudo sobre a generalização focando nos elementos teóricos da TAD, analisando este objeto por

meio de um viés institucional, ou seja, consideramos a generalização como ente que tem uma gênese e uma vivência na instituição. Além disso, pelos preceitos praxeológicos, acreditamos lançar luz sobre concepções que envolvem não só o aluno, mas também o professor, o currículo e o próprio objeto.

PARTE III – A investigação

5. ANÁLISE DA RELAÇÃO INSTITUCIONAL EM ÁLGEBRA

[...] todas as coisas devem ser estudadas em relação com seu contexto. É nesse tribunal que devem ser julgados os resultados que os instrumentos analíticos, na sua forma mais geral, permitem adquirir.
(Bento de Jesus Caraça)

Este capítulo inaugura a terceira parte deste trabalho: o levantamento e a investigação dos dados. Até agora, o esforço foi colher referências teóricas, metodológicas e históricas para que pudéssemos ter segurança nas análises dos elementos observados. A epígrafe acima traduz com fidelidade nosso modo de interpretar esta fase do estudo: a relação com o contexto.

Julgamos que pesquisa é isto: um entremeio entre teorias, métodos e contexto. E contexto é onde o pesquisador está. É como ele se movimenta. Como ele interpreta o que tem em mãos. Já dissemos nos capítulos 1 e 2 que o fato de a pesquisadora ser a professora das turmas que participaram do estudo trará formas de análise bem peculiares. Nossa experiência nos fez chegar até aqui com alguns rudimentos de hipóteses.

O filtro teórico e metodológico deu conta de moldar essas impressões em discurso a ser comunicado academicamente. E essa mesma experiência vai nos auxiliar nesta etapa final de análise: o contexto, nas palavras de Caraça (2010). É, portanto, o contexto da professora que vai conferir os liames finais nas análises que serão feitas pela pesquisadora daqui em diante.

5.1. Considerações iniciais

Conforme foi exposto no capítulo 2, a TAD é teoria de vulto que possibilita análises em diferentes perspectivas. E Chevallard (1991, 1992) sempre manifestou uma preocupação em descrever muito bem o terreno que dá origem à TAD. Isso se dá porque, segundo o autor, “o ponto de partida de qualquer construção teórica [...] encontra-se em todos os desenvolvimentos culturais anteriores” (CHEVALLARD, 1991, p. 160, tradução nossa¹¹⁷). Chevallard, portanto, construiu o modelo teórico da TAD como um desdobramento da teoria da transposição didática – TTD (CHEVALLARD, 1981, 1982, 2000). Traremos, assim, algumas considerações mais amplas da TAD e da TTD que serão necessárias nesta etapa do estudo.

Em linhas bem gerais, a TTD afirma que o conhecimento ensinado é diferente do conhecimento que foi inicialmente designado como a ser ensinado e que essa passagem de um saber ao outro pode revelar determinadas especificidades didáticas. Nas palavras do autor:

No sentido restrito, a transposição didática designa, portanto, a passagem do conhecimento erudito para o conhecimento ensinado. Porém, é no confronto desses dois termos, na distância que os separa, para além do que os aproxima e exige que sejam confrontados, que melhor podemos apreender a especificidade do tratamento didático do conhecimento (CHEVALLARD, 1982, p. 6, tradução nossa¹¹⁸).

Segundo a TTD, não se trata de “fazer” uma transposição didática, posto que ela existe; o que se faz, na verdade, é trabalhar a transposição. E, nessa hora, Chevallard (1982) traz alguns apontamentos sobre o papel do professor. Ele explica que o professor não tem poder de escolha, já que, nesse processo, cabe a ele realizar a escrita do texto do conhecimento. Sabe-se que o texto do conhecimento que é referência para o professor são os documentos oficiais expedidos pelas secretarias de educação e, ainda, os livros didáticos. Contudo, antes do texto matemático vigorar nos currículos oficiais, ele esteve, de alguma forma, nos ambientes eruditos,

¹¹⁷ Le point de départ de toute construction théorique, [...] est à rechercher dans l'ensemble des élaborations culturelles antérieures.

¹¹⁸ Au sens restreint, la transposition didactique désigne d'once passage du savoir savant au savoir enseigné. Or, c'est à la confrontation de ces deux termes, à la distance qui les sépare, par de là ce qui les rapproche et impose de les confronter, que l'on peut le mieux saisir la spécificité du traitement didactique du savoir.

acadêmicos. É sobre esses locais de pertencimento do saber matemático que a TTD trata. Além disso, Chevallard (1982) ressalta que é o conceito de transposição didática que permite o uso adequado da epistemologia na didática.

Para falar em ambiente didático, ambiente educacional, Chevallard (1982) explica que há uma instância que regula o funcionamento didático. Ele dá o nome de noosfera, que, sinteticamente, designa todas as instituições externas à escola, mas que de alguma forma manipulam o saber matemático.

[...] a noosfera atua como um amortecedor. Mesmo em tempos de crise, mantém a autonomia do funcionamento didático dentro de limites aceitáveis. O professor de sua turma está, em princípio, protegido das dificuldades que poderá encontrar na tarde de quarta-feira quando, ao entrar na noosfera, participará, por exemplo, de uma reunião de professores de sua disciplina. Se ele tiver que mudar seu ensino, é através da mediação da noosfera que ele o fará [...] (CHEVALLARD, 1982, p. 11, tradução nossa¹¹⁹).

Portanto, numa análise antropológica do saber, é preciso levar em conta que os objetos matemáticos que chegam à sala de aula, os quais fazem parte da relação pessoal e institucional, passam pelo crivo de outras instâncias. Então, se este estudo aqui se pergunta sobre determinados conhecimentos mobilizados pelos alunos, é conveniente que seja feita uma análise dos “lugares” ocupados por esse saber até chegar à classe.

Chevallard (1994b), ao ampliar o escopo da TTD, desenvolve a ideia de ecologia didática do conhecimento. Esse conceito diz respeito a esses ambientes ocupados pelo saber durante a transposição. O autor pergunta: “De onde esses novos objetos são ensinados? Como eles chegaram aqui? Que interrelações fazem com outros objetos? E, acima de tudo, por que chegaram tão longe” (CHEVALLARD, 1994b, p. 5, tradução nossa¹²⁰)?

Portanto, fazendo uma relação com este trabalho, podemos questionar:

¹¹⁹ À cet égard, la noosphère joue un rôle de *tampon*. Même en période de crise, elle maintient dans des limites acceptables l'autonomie du fonctionnement didactique. Le professeur, dans sa classe, est en principe à l'abri des difficultés qu'il retrouvera peut-être le mercredi après-midi lorsque, en trant alors dans la noosphère, il participera par exemple à une réunion d'enseignants de sa discipline. S'il doit un jour changer son enseignement, c'est par la médiation de la noosphère qu'ils'y déterminera.

¹²⁰ D'où viennent ces nouveaux objets enseignés? Comment sont-ils arrivés là? Quelles interrelations, avec quels autres objets, y nouent-ils? Et, aussi, sur tout: pourquoi sont-ils arrivés jusque-là ?

- Onde está o objeto generalização?
- Como ele chega à sala de aula?
- Em quais temas ele está presente?

A abordagem ecológica é, segundo Chevallard (1994b), um modo de problematizar a realidade didática que está sendo introduzida. Para tanto, o autor utiliza os mesmos vocábulos dos ecologistas e explica: *habitat* é o endereço, onde vivem os objetos matemáticos, e nicho seriam as funções desempenhadas pelos objetos nesse *habitat*. Retomaremos esses termos na próxima seção.

A análise ecológica do saber pode ser feita sob a ótica dos níveis de codeterminação didática¹²¹, pois, segundo Chevallard (2002a), as organizações didáticas (OD) vivem sob uma ecologia que pode ser descrita pela hierarquia desses níveis. O que interessa aqui é que, nesse processo de determinar quais organizações matemáticas (OM) vão estar nas aulas, o professor tem uma tendência de **focar nos grandes temas**, de apresentar a matemática dessa forma, **ocultando ao aluno todas as peças que compõem aquela organização**. Essa situação em que o professor não situa os temas nos setores e domínios que o programa do curso prevê faz com que ele passe por esses temas e assuntos de maneira linear, como se fosse um “arquivo único”, segundo Chevallard (2002a).

Vamos repetir a seguinte colocação do autor: “No movimento de desconstrução-reconstrução das obras a serem estudadas, apenas reconstruímos fragmentos de um quebra-cabeça que **jamais será reconstituído como um todo**” (CHEVALLARD, 2002a, p. 3, tradução e grifo nossos¹²²). Aqui percebemos que esse movimento já impõe uma restrição no trabalho do professor. O que dizer, então, da percepção do aluno? Vamos admitir que as tarefas levadas à turma são fragmentos dessa obra maior. Será possível afirmar que o aluno percebe a presença desse “todo”? Se ele percebe que a tarefa é parte de um todo, o que ele leva em conta nessa

¹²¹ Ver item 3.1.5 Níveis de codeterminação.

¹²² Dans le mouvement de déconstruction-reconstruction des oeuvres à étudier, on ne reconstruit guère alors que des fragments d'un puzzle qui ne sera jamais reconstitué dans son ensemble.

totalidade? Nas tarefas de álgebra, poderíamos dizer que a generalização é um caminho para reconstituir a parte ao todo?

Bem, vamos admitir que, ao generalizar, o aluno vai construindo esse caminho (fazendo-desfazendo; montando-desmontando, sempre em direção a algo maior). Então precisamos considerar alguns pontos.

- O aluno caminha em direção a uma totalidade levando em conta alguns fragmentos, algumas partes.
- Esses fragmentos do conteúdo matemático são utilizados pelos alunos na composição de novos conhecimentos, os quais chamaremos aqui de ambiente teórico, numa abordagem praxeológica.
- Esses fragmentos do conteúdo matemático chegam ao aluno por meio de tarefas que são “escritas” pelo professor (em consonância com os documentos oficiais).
- Essas tarefas trazem níveis de totalidade cada vez maiores, uma vez que as OM são construídas assim nos documentos oficiais, com o aval da noosfera.
- Numa análise ecológica do currículo, poderemos ter mostras de como o tema álgebra é organizado em níveis de codeterminação didática e analisar de que forma os conteúdos são fragmentados, partidos e quais seriam essas totalidades.
- Numa análise praxeológica do currículo, poderemos ter mostras de como os blocos [prático] e [teórico] lidam com essa percepção parte-todo.

Bem, muitas considerações foram levantadas, é verdade, mas o leitor vai perceber que todas elas estão em consonância com o que foi argumentado nos capítulos anteriores e com os conceitos trazidos nesta seção. Vamos conectar ainda um pouco mais esses pontos com o que a TTD e a TAD nos permitem até aqui.

Primeiro, é necessário reforçar que a TAD foi concebida levando em conta um domínio teórico e prático. Chevallard (1981, p. 4, tradução nossa¹²³) é enfático ao dizer

¹²³ [...] practical mastery cannot be secured unless theoretical control is achieved.

que, na didática de matemática, “[...] o domínio prático não pode ser assegurado a menos que o controle teórico seja alcançado”. Isso vai na direção dos nossos objetivos.

Segundo, a respeito da TTD e dos pontos que foram levantados acima sobre a relação parte-todo que ocorre no estudo das obras matemáticas, Chevallard (1981) esclarece que todo objeto matemático apresentado pelo professor deve aparecer como algo novo e, ao mesmo tempo, antigo (!), para que os alunos não se sintam estranhos com ele. E é esse caráter contraditório que traz as peculiaridades inerentes ao processo didático. Além disso, o autor defende que uma análise desse processo poderia lançar luz sobre as propensas falhas dos alunos. A seguir, nas palavras do autor, o que acabamos de colocar:

É claro que, para cada objeto de conhecimento retido como “objeto a ser ensinado”, será necessária uma análise detalhada específica para o conhecimento envolvido. Embora este tipo de análise possa ser de interesse por si só, gostaria de enfatizar aqui que, em alguns casos, leva à compreensão adequada das falhas do aluno, de uma forma que permanece livre de qualquer toque de psicologismo (CHEVALLARD, 1981, p.07, tradução nossa¹²⁴).

Portanto, o objetivo deste capítulo é fazer uma análise a respeito dos objetos a serem ensinados na perspectiva da relação institucional que prevê a TAD. A ideia é reunir argumentos que nos permitam identificar o *corpus* prático e teórico nas tarefas envolvendo álgebra e para que caminhemos cada vez mais em direção aos conhecimentos mobilizados pelos alunos ao lidarem com a generalização algébrica – nossa questão de pesquisa.

Insistimos um pouco nessa exposição para justificar a abordagem ecológica e praxeológica que será feita nas próximas seções. Alguns pontos já foram levantados para que o estudo tenha o afunilamento necessário, sem, contudo, perder de vista os horizontes vastos da Didática da Matemática e da TAD. Na próxima seção, faremos

¹²⁴Of course, for every object of knowledge retained as an “object to be taught” it will be necessary to carry out a detailed analysis specific to the knowledge involved. Although this type of analysis may be of interesting its own right, I wish to emphasize here that in some cases it leads to the proper understanding of the pupil’s failures, in a way that remains free from any touch of psychologism.

uma exposição mais detalhada a respeito das relações institucionais esperadas e existentes no ensino de álgebra no EF.

5.2. Considerações sobre as relações institucionais esperadas e existentes

Sabe-se que a noção de instituição é basilar na TAD. Objetos ganham vida por meio da relação que mantêm com a instituição e com o sujeito. No capítulo 3, já expusemos alguns questionamentos a respeito desses entes principais da teoria. Em relação aos objetos matemáticos, é de nosso interesse investigar quais são reconhecidos e que, portanto, ganham vida na instituição escola. Além disso, pode-se pensar em relações institucionais esperadas – aquelas que estão de acordo com o que preveem os documentos oficiais e as existentes – e as relações institucionais existentes, que podem estar nos livros didáticos, por exemplo. Só aí já ocorreram duas instâncias de transposição: do *locus* oficial¹²⁵ para a sala e do *locus* oficial para o livro didático. Como foi visto também, esse conhecimento institucional possui contornos de relatividade: há muitas maneiras de conhecer um objeto. Sobre isso, Chevallard (1995) argumenta que há uma certa “ficção” na escola que a faz acreditar numa sucessão perfeita de aulas e em que certos níveis podem ser trabalhados sem referência nenhuma às unidades que a precedem e às que se seguem. E ele faz uma indagação desafiadora: “Por que [...] tomar por início o que, em outros aspectos, é uma continuação? Por que dar por certa essa ficção de começos [...]” (CHEVALLARD, 1995, p. 12, tradução nossa¹²⁶)? Por quê?

O autor explica ainda que, ao observar um sistema de uma instituição – no caso aqui, o currículo –, os dados que coletamos são, na verdade, construções. E a instituição faz com que todos nós consideremos como naturais o que é, por certo, uma construção institucional. Portanto, esses apontamentos de Chevallard (1995) corroboram para a necessidade de fazermos uma análise das relações institucionais

¹²⁵ Vamos admitir que o *locus* oficial aqui seja o currículo oficial de matemática que chega às escolas.

¹²⁶ Pourquoi, [...] prendre pour un commencement ce qui, sous d’autres aspects, est une continuation ? Pourquoi accepter comme allant de soi cette fiction des commencements [...].

esperadas e existentes para o ensino da álgebra no EF. Se estamos, de fato, submetidos ao que a instituição prevê, num desenrolar que representa a realidade (a qual se apresenta ao aluno por meio de fragmentos), acreditamos que a análise dessas relações é o caminho certo para verificar onde está e como ocorre a generalização algébrica numa visão ecológica e praxeológica. Nos próximos parágrafos, há uma breve explanação a respeito dessas duas abordagens.

Por meio da análise ecológica, pretende-se identificar o *habitat* e o *nicho* do grande tema álgebra. A abordagem ecológica permite, segundo Chevallard (1998), questionar a respeito da ordem considerada “natural” nas instituições. Segundo o autor, isso nos leva a questionar a realidade apresentada, observável. Essa realidade tem grandes chances de ser instável e não robusta; contudo, ela persiste porque as **condições locais são raramente percebidas**.

Na análise ecológica deste estudo, desenvolvida por meio dos níveis de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2002a), será possível enxergar o domínio, o setor, o tema e os tópicos relacionados à álgebra – e ao objeto generalização – no EF. Essa hierarquia, segundo Chevallard (2002a), faz com que haja uma ordenação daquilo que é levado à escola, evitando o que ele chama de desequilíbrio entre o que deveria estar presente na instituição e o que seria deixado de lado. Portanto, falamos aqui do Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG) como o documento oficial que permite determinar quais organizações matemáticas (OM) o professor deve colocar nas suas aulas.

Não se pode perder de vista que a TAD é construída sobre algumas noções fundamentais que justificam todo o escopo da teoria. Uma delas é admitir a existência de sistemas didáticos $S(X; Y; O)$, em que O é a obra a ser estudada. Essa obra O emana de uma estrutura praxeológica e das estruturas de nível superior (CHEVALLARD, 2011a). E essas estruturas podem ser analisadas, conforme já foi visto, por meio dos níveis de codeterminação didática. São eles, portanto, que ampliam a análise praxeológica da obra O .

Vejamos.

O que a TAD acrescenta [...] é uma enorme ampliação do "pequeno mundo" em que vive e pensa a maioria dos atores no domínio da noosfera, ou, mais

particularmente, da escola específica desta área. Esse alargamento é expresso pela conhecida escala de níveis de codeterminação didática [...] (CHEVALLARD, 2011a, p.6, tradução nossa¹²⁷).

Por fim, a análise ecológica do CRMG vai nos permitir analisar que objetos compõem o conhecimento designado a ser ensinado, as interrelações entre os temas e as condições e restrições que esse sistema impõe. Ademais, Chevallard (1994b) alerta que, para cada pergunta que é feita, é necessário um exame em particular.

A respeito da abordagem praxeológica, Chevallard (1999) explica que se pode dizer que uma instituição possui determinados padrões: aquilo que é considerado normal em I, o que é feito, não feito, ou seja, o que é tomado por verdade nesta instituição. Essa “normalidade” pode ser analisada por meio das suas praxeologias. De fato, o padrão normal de I pressupõe determinados tipos de tarefas e técnicas, assim como há tecnologias e teorias aceitáveis dentro da justificativa tecnológica da instituição.

A citação seguinte do autor é bem esclarecedora, o que justifica tomá-la na íntegra:

Uma norma aparece, assim, como capaz de assumir a forma concreta de um componente praxeológico de qualquer nível. Em nível global, portanto, as normas de I referem-se às praxeologias: às praxeologias que, dentro de I, são tidas como “canônicas”, “dominantes”, “ortodoxas”, em suma, “normais”; as praxeologias que se impõem ao sujeito da instituição; que são, para ele, “a norma” – ainda que a instituição sempre admita, até certo ponto, certa anormalidade (CHEVALLARD, 1999, p. 4, tradução nossa¹²⁸).

Destacamos desse excerto que uma norma pode ser descrita, de forma concreta, por meio de uma praxeologia. Assim, enquanto a abordagem ecológica

¹²⁷ Lo que la TAD añade [...] es un ensanchamiento enorme del «mundo pequeño» en el que viven y piensan la mayoría de los actores de la noosfera del ámbito de actividad o, más en particular, de la escuela específica de este ámbito. Este ensanchamiento se expresa mediante la — bien conocida— escala de niveles de codeterminación didáctica [...].

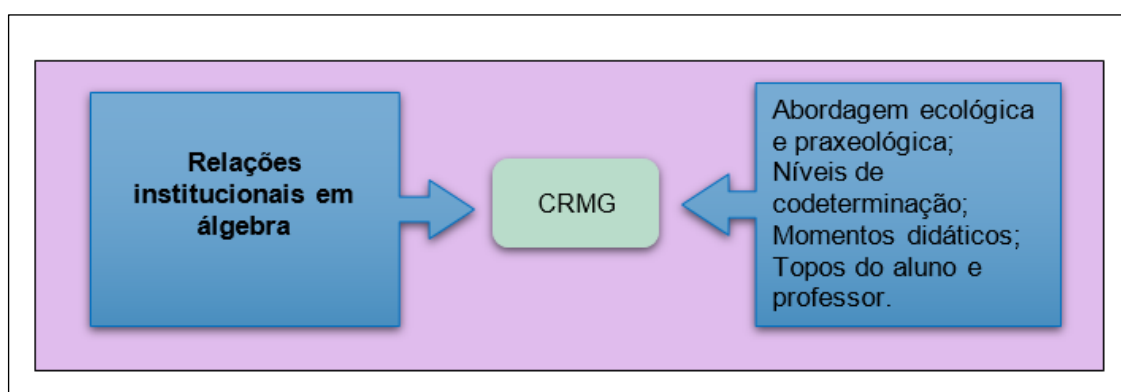
¹²⁸ Une norme apparaît ainsi comme pouvant assumer la forme concrète d'un composant praxéologique de niveau quelconque. Globalement, donc, les normes de I renvoient à des praxéologies: à ces praxéologies exactement qui, au sein de I, sont tenues pour «canoniques», «dominantes», «orthodoxes», bref, «normales»; à ces praxéologies qui s'imposent au sujet de l'institution; qui sont, pour lui, «la norme» – même si l'institution admet toujours, jusqu'à un certain point, une certaine anormalité.

permite enxergar os objetos em uma inter-relação de níveis, a análise por meio do modelo praxeológico vai trazer à tona técnicas e tecnologias dominantes para o tema álgebra. É conveniente, ainda, destacar que Chevallard (1999) admite que as normas de uma instituição são uma construção histórica. Portanto, não recolheremos dados desconexos na análise institucional, mas, ao contrário, analisaremos que tipo de conhecimento é naturalizado no campo da álgebra.

A título de síntese, o CRMG será analisado por meio de uma abordagem ecológica e praxeológica. Trata-se aqui das relações institucionais esperadas. Outras ferramentas serão utilizadas, as quais já foram apresentadas anteriormente: níveis de codeterminação, momentos didáticos e *topos* do aluno e do professor.

O organograma a seguir (figura 6) pretende fornecer uma visão geral de como está organizada a análise neste capítulo. Baseamo-nos em Silva (2016).

Figura 6 – Visão geral da análise da relação institucional no capítulo

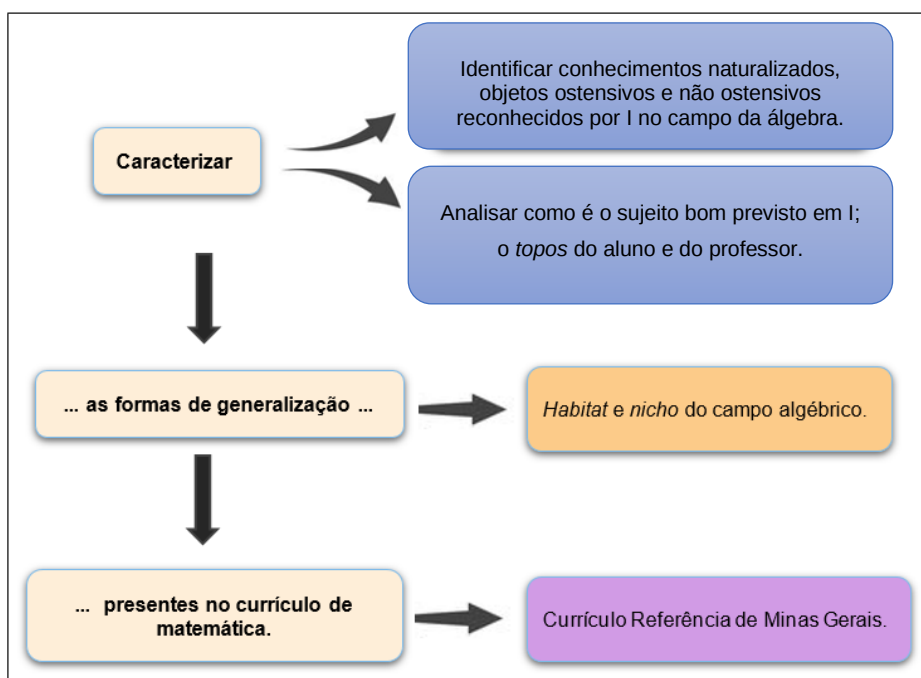


Fonte: Construção nossa (2022) baseada em Silva (2016).

5.2.1 Análise ecológica do Currículo Referência de Matemática para Minas Gerais

A figura 7 dá uma ideia de como serão feitas as análises nesta seção.

Figura 7 – Visão geral da análise da relação institucional na seção



Fonte: Construção nossa, 2022.

Nesta etapa, alguns questionamentos já feitos serão retomados. Apenas para fins de organização, vamos reaver alguns pontos que já foram expostos até aqui. No capítulo 3, reformulamos a questão de pesquisa, hipóteses e objetivo geral do estudo. E, já no capítulo 1, haviam sido elencados três objetivos específicos desta investigação, os quais serão retomados aqui:

- Identificar as concepções de alunos de 7º e 8º anos do Ensino Fundamental envolvendo a generalização algébrica numa perspectiva escalar.
- Caracterizar as formas de generalização presentes no currículo de matemática.
- Descrever o processo de generalização percorrido por alunos de 7º e 8º anos do Ensino Fundamental.

Os objetivos específicos continuam guiando nossa investigação, e o segundo deles será objeto de análise nesta seção. Para “caracterizar as formas de generalização presentes no currículo de matemática”, o estudo nesta seção terá duas partes principais:

- Identificar os conhecimentos naturalizados e os objetos ostensivos e não ostensivos que são reconhecidos pela instituição no campo da álgebra.
- Analisar como é o sujeito bom previsto pela instituição; o *topos* do aluno e do professor.

Trazendo uma microanálise da estrutura e das concepções do CRMG, vemos que ele foi elaborado a partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por meio de uma parceria entre a União Nacional dos Dirigentes de Educação de Minas Gerais – UNDIME/MG e a Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais – SEE/MG. O Estado de Minas Gerais já possuía seu currículo normatizado desde 2005, o Currículo Básico Comum (CBC). De acordo com o *site* oficial que disponibiliza o CRMG¹²⁹, a BNCC contribuiu ao dar uma contemporaneidade aos conteúdos que já eram trabalhados no CBC, além de apresentar, pela primeira vez, um currículo para a educação infantil. A BNCC destaca que ela e os currículos têm papéis complementares de modo a assegurar as aprendizagens essenciais que são definidas para cada etapa da educação básica (BRASIL, 2018). O CRMG foi entregue às escolas no ano de 2019. De acordo com esse documento normativo, “[...] a Base indica o ponto aonde se quer chegar. O currículo traça o caminho até lá” (MINAS GERAIS, 2019, p. 9).

Portanto, enxergamos aqui alguns dos habitantes da noosfera relacionados a este trabalho. Conforme já foi explorado, o saber matemático é manipulado em esferas distintas, ou seja, em instituições distintas. No caso aqui, o documento normativo explica que o CRMG foi elaborado em consonância com a BNCC. Esta última explica que suas normas são baseadas em outros marcos legais, como: o Conselho Nacional de Educação (CNE), o Plano Nacional de Educação (PNE) e a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB).

¹²⁹ Disponível em: <https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/educacao-infantil-e-ensino-fundamental/historico-de-elaboracao>. Acesso em: 05 mar. 2022.

A respeito da BNCC, ela ressalta seu princípio na organização das áreas de conhecimento por meio de competências e habilidades. Competência é, pela definição da BNCC,

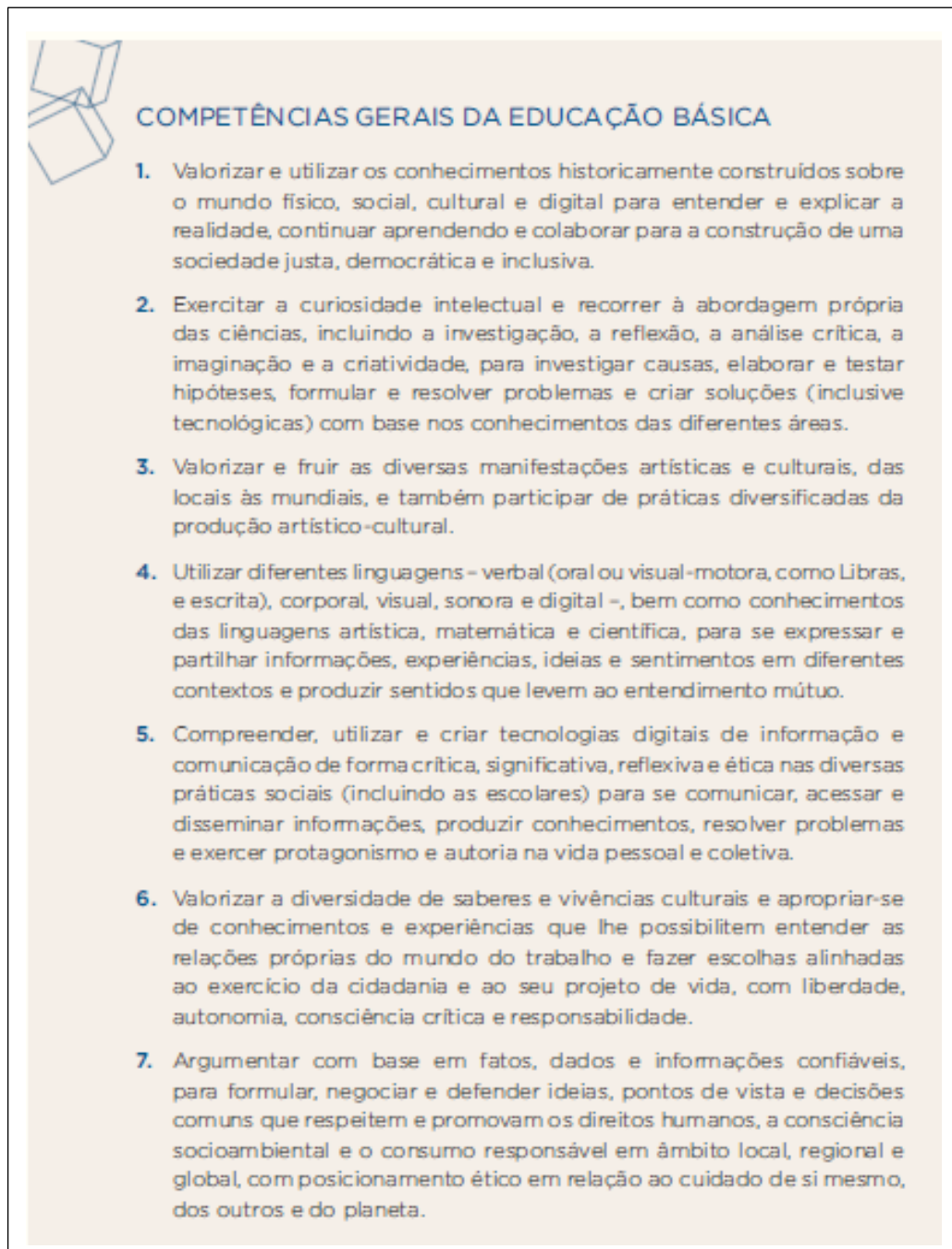
[...] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocivas), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 8).

A BNCC define, então, dez competências gerais a serem desenvolvidas ao longo da educação básica (figura 8, próxima página) e explica que elas constituem os direitos de aprendizagem e desenvolvimento no **âmbito pedagógico**.

Cabem aqui algumas considerações. Chevallard (2001) critica a forma como os conteúdos são difundidos na escola. Segundo ele, o que ocorre é um abandono de estudo de questões gerais advindas da sociedade, as quais contêm conhecimento de várias áreas e um esforço no estudo da própria disciplina isolada das demais. Segundo ele, é a partir do nível escola que se determina o destino das disciplinas, as quais elegem suas questões essenciais.

Como exposto anteriormente, o documento normativo de Minas Gerais foi elaborado em consonância com os princípios da BNCC, a qual aponta que suas dez competências gerais estão relacionadas ao âmbito pedagógico da aprendizagem. Chevallard (2001), então, explica que o nível pedagogia, aquele que divide a escala de codeterminação didática em níveis superiores e inferiores, acaba reforçando as condições provocadas pelo nível superior: escola ↔ sociedade ↔ civilização ↔ humanidade. Na gestão do tempo de estudo, por exemplo, as questões são estudadas por um curto período.

Figura 8 – Competências gerais da educação básica



Fonte: BRASIL, 2018, p. 9.

Para Chevallard (2001), a escola deveria debruçar-se em questões genuínas – e não artificiais –, as quais demandam um tempo longo de estudo. De maneira geral, o autor mostra que o trabalho do professor é gerenciado pelos níveis superiores na escala de codeterminação, mas fica, ao mesmo tempo, isolado na gestão dos temas

e tópicos. Identificamos, portanto, que as competências gerais da BNCC são a fronteira pedagógica que separa os níveis superiores e inferiores na escala de codeterminação.

Esses apontamentos do autor nos permitem afirmar que há duas possibilidades de “leitura” nesta escala de níveis: uma que parte de cima pra baixo e que mostra de que modo os conteúdos foram pensados e construídos de forma a modelar a realidade que deve chegar até a sala de aula; e outra que começa de baixo, do nível tópico, e que revela o trabalho do professor. Nesse caso, pode-se considerar a forma como o docente adapta (ou constrói) as questões que devem (ou deveriam) fazer o caminho inverso, ou seja, atingir de volta a sociedade. Mas Chevallard (2001) afirma que, no trabalho docente, há uma crença de que os níveis mais elevados da organização didática – os níveis superiores – “[...] não contam no destino do conhecimento cuja disseminação eles devem assumir” (CHEVALLARD, 2001, p. 6).

O que percebemos até aqui é que há diferentes formas de cumprir esse roteiro. A escola, modelando o estudo de questões da humanidade, acaba fragmentando essas questões de tal maneira que, pela hierarquia de níveis de codeterminação, é possível afirmar que chega ao aluno (pelo trabalho do professor) um conhecimento desconectado da realidade maior que o gerou. Já o trabalho do professor, que acaba ficando muito distante dos níveis superiores, fica confinado na especificidade da sua disciplina, totalmente desvinculado de um contexto mais amplo. Isso provoca o que Chevallard (2001) chama de descolarização dos conteúdos.

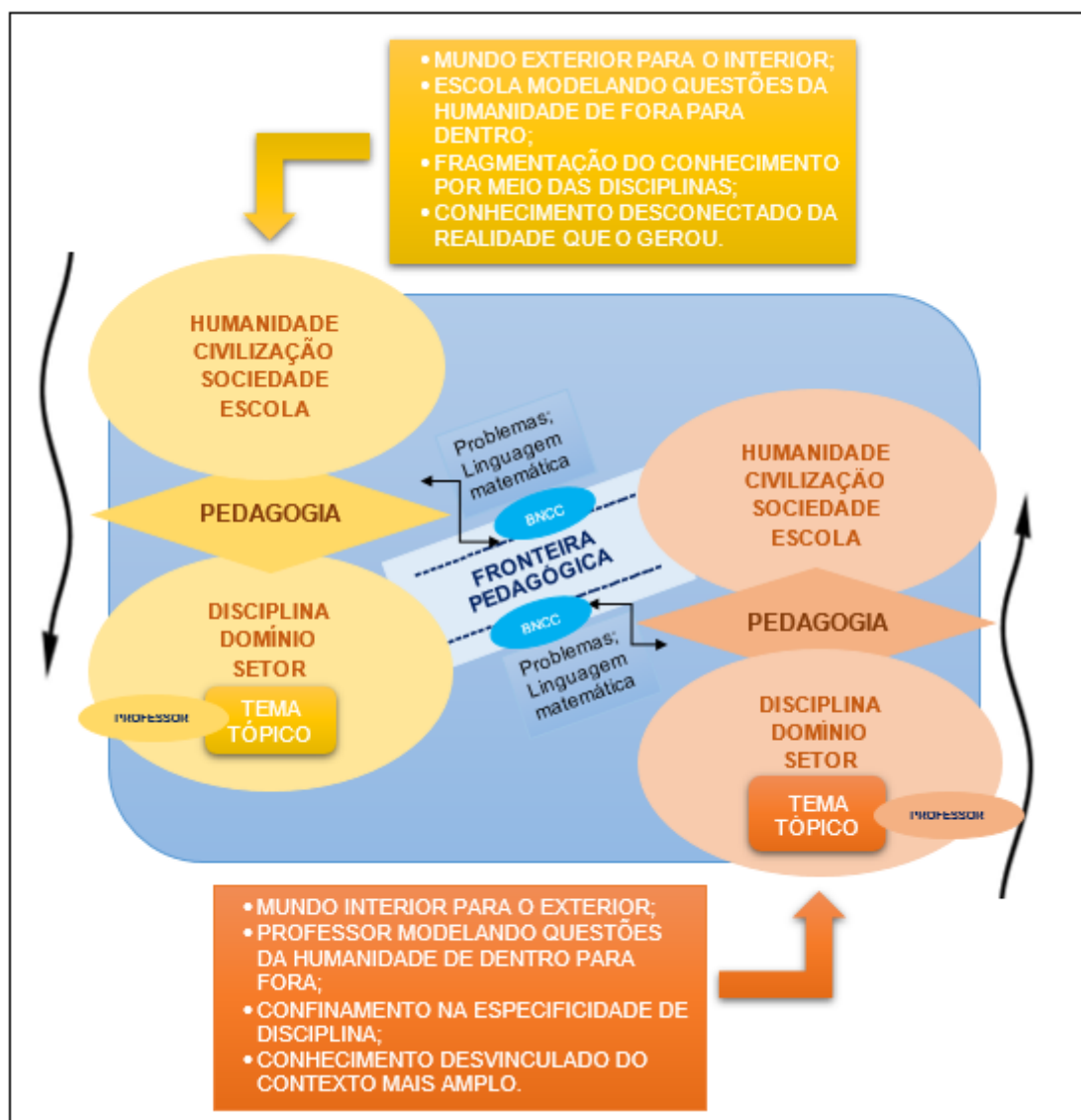
Nesta microanálise da estrutura e concepções do CRMG, vemos que o nível pedagógico é aqui representado pelos preceitos da BNCC, a qual elege competências gerais para a educação básica (figura 8). Localizando a matemática nestas competências, vemos que estão presentes:

- a capacidade de formular e resolver problemas;
- a utilização da linguagem matemática.

Esta é a fronteira que marca o limite entre a escola e o mundo externo a ela. A partir daí, o que há são prerrogativas ligadas à disciplina da matemática. Vejamos, nos próximos parágrafos, o que ocorre até chegar ao último degrau desses níveis.

Antes, a figura 9 busca relacionar a problemática levantada por Chevallard (2001) sobre a difusão do conhecimento na escola e as análises feitas até aqui.

Figura 9 – Difusão do conhecimento de acordo com a escala de codeterminação didática



Fonte: Construção nossa (2022) de acordo com Chevallard (2001).

Da figura 9 depreende-se que o trabalho do professor, confinado nos temas e tópicos, permanece, de certa forma, limitado num mundo próprio. Além disso, vê-se, ainda, que é necessário passar pela fronteira pedagógica nos dois sentidos que

estamos aqui admitindo: tanto da sala de aula para fora da escola quanto no movimento inverso. Em nosso trabalho, como já foi falado, são as dez competências gerais da BNCC que fazem essa ponte, essa ligação. Explorando só um pouco mais, nota-se que essas competências, que vão atingir o CRMG para a matemática, estão relacionadas, de modo bem amplo, a problemas e linguagem matemática.

Dessa forma, o documento oficial de Minas Gerais explica que as competências do componente curricular de matemática estão em consonância com as competências gerais da BNCC e as apresenta logo em seguida (MINAS GERAIS, 2019):

- investigação;
- compreensão de fenômenos;
- construção de representações significativas;
- argumentações consistentes nos mais variados contextos.

Essas competências, no currículo mineiro, representam, portanto, conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que estão num âmbito maior das demandas da vida cotidiana. É aquilo que se deve atingir por meio das habilidades e objetos de conhecimento. Podemos dizer que investigar, compreender, construir e argumentar são as competências gerais em matemática. Assim, a partir delas, o CRMG indica quais são as habilidades que devem ser desenvolvidas por meio do conhecimento matemático. Aponta o documento que essas habilidades são aquelas que permitem a formação de cidadãos críticos capazes de (MINAS GERAIS, 2019):

- compreender e transformar o mundo à sua volta;
- fazer observações sistemáticas identificando padrões e regularidades existentes;
- resolver situações-problema;
- estabelecer relações entre temas matemáticos e de outros componentes curriculares;
- desenvolver a capacidade de interagir com seus pares de forma colaborativa.

Há, portanto, um encadeamento entre as habilidades e as competências. Nota-se que elas se fundem entre si, sempre em busca de atitudes e valores que permitam

ao cidadão exercer sua criticidade por meio da compreensão e utilização de conhecimentos matemáticos.

Finalmente, o currículo de Minas apresenta, baseado nas concepções da BNCC, o conjunto de ideias fundamentais que devem ser trabalhadas visando ao desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. São elas (MINAS GERAIS, 2019):

- equivalência;
- ordem;
- proporcionalidade;
- interdependência;
- representação;
- variação;
- aproximação.

A esse respeito, o CRMG orienta, também fundamentado na BNCC, que essas ideias devem ser convertidas, na escola, em objetos de conhecimento. Portanto, o currículo em Minas Gerais foi elaborado levando em conta as concepções de habilidades e competências e é estruturado em unidades temáticas e objetos de conhecimento. Todas essas vertentes advindas de um conjunto de ideias fundamentais que, segundo a BNCC, compõem a matemática por meio da articulação que produzem entre si.

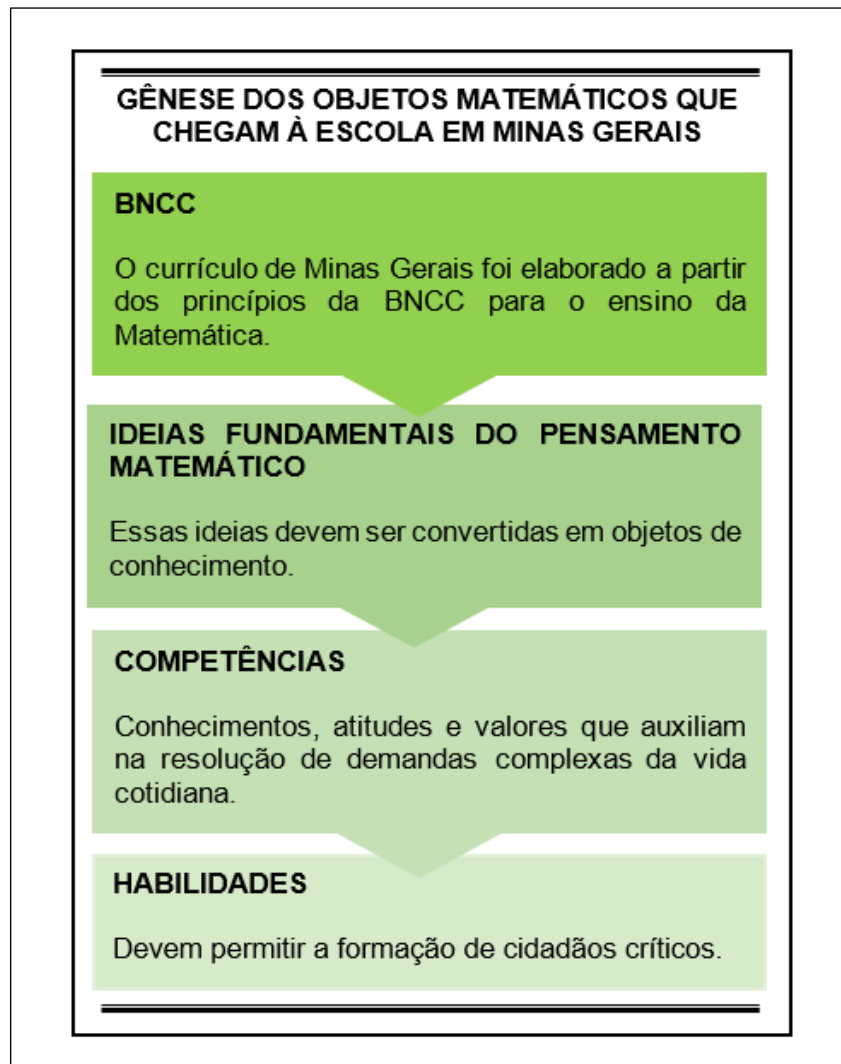
Com isso, identificamos algumas esferas superiores relacionadas à escala de níveis de codeterminação didática explicitados por Chevallard (2002a, 2011a). Se o CRMG trabalha em consonância com a BNCC, é necessário considerar essas instâncias. De fato, Chevallard (2011a) explica que o estudo de uma obra O vem não só da sua própria estrutura (tópicos, temas e questões), mas também da análise das estruturas de maior domínio. Essa ampliação no escopo de O dá-se, conforme já visto anteriormente, da seguinte forma: tópicos ↔ temas ↔ setores ↔ domínios ↔ disciplinas ↔ pedagogia ↔ escola ↔ sociedade ↔ civilização ↔ humanidades (CHEVALLARD, 2011a), ou seja, por meio dos níveis de codeterminação didática, explorados na seção 3.1.5.

Portanto, a noosfera normativa de Minas Gerais impõe suas condições e restrições que fazem emergir os objetos de ensino na instituição escola. E esses objetos têm como gênese institucional os princípios da BNCC, baseados em competências e habilidades. Alguns desses princípios dizem respeito ao desenvolvimento do letramento matemático, ou seja, à capacidade de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente. O CRMG explica, ainda, que cabe ao professor promover a adaptação e organização das habilidades previstas para cada ano de estudo, estabelecendo, inclusive, uma relação entre as diferentes unidades temáticas. E reforça que “[...] o currículo traz os objetos de conhecimento necessários ao desenvolvimento das habilidades e competências citadas, mas não deve ser visto como algo engessado” (MINAS GERAIS, 2019, p. 656).

Dessa forma, fazendo uma escala que parte do “mundo acima”, responsável pela gênese dos objetos matemáticos que chegam à escola em MG, vemos que as ideias fundamentais da matemática geram as competências que serão trabalhadas em forma de habilidades por meio de objetos de conhecimento. Assim, as organizações matemáticas – OM, que serão analisadas não existem de forma isolada e desconectadas desta hierarquia de níveis (figura 10).

Como já foi visto, pode-se pensar as restrições impostas pela noosfera correspondente ao CRMG da seguinte maneira: os níveis pedagogia, escola, sociedade, civilização e humanidades estão numa escala superior. Em Chevallard (2002a), vê-se que o autor localiza a pedagogia em nível 0. Neste patamar, o autor explica que os conteúdos disciplinares da escala inferior param numa espécie de limite pedagógico. Esses limites podem ser analisados como um conjunto de recursos que são impostos à realidade escolar. Conforme já visto em Chevallard (2002a), o nível pedagogia é o que faz uma fronteira entre os “mundos abaixo” e os “mundos acima”. O que se quer destacar aqui é o fato de, segundo o autor, a suposta liberdade do professor só existir sob as restrições pedagógicas impostas pelo programa.

Figura 10 – Da BNCC aos objetos matemáticos



Fonte: Construção nossa, 2022.

Em nosso estudo, identificamos que a fronteira pedagógica imposta pelo CRMG está atrelada aos princípios da BNCC. E a BNCC traz como fundamentos pedagógicos o foco no desenvolvimento de competências e o compromisso com a educação integral (BRASIL, 2018, p. 13-14).

O CRMG traça uma espécie de roteiro que liga a BNCC ao trabalho do professor. Veja na figura 11, retirada na íntegra do CRMG.

Figura 11 – Da BNCC à sala de aula segundo o CRMG



Fonte: MINAS GERAIS, 2019, p. 12.

Interessante perceber, na análise desta figura, que o próprio CRMG traz uma espécie de escala que em muito se assemelha aos níveis de codeterminação de Chevallard (2002a). O documento explica que o objetivo é fazer uma inter-relação entre três instâncias: currículo, trabalho pedagógico da escola e corpo docente. O CRMG dá especial atenção ao Projeto Político-Pedagógico (PPP) da escola: é ele que deve promover a efetivação do currículo nas escolas, sempre seguindo as normas municipais, estaduais e nacionais. (MINAS GERAIS, 2019).

A BNCC, o Currículo e o PPP devem estar inseridos, de acordo com o CRMG, na prática diária do professor. É dessa forma, portanto, que a Instituição considerada aqui transporta suas normas até a sala de aula.

[...] estes três documentos (BNCC, Currículo, PPP) devem estar inseridos, direta e indiretamente, no Plano de Aula dos professores, permitindo que todo

o arcabouço legal, conceitual e material discutido possa se efetivar em sala de aula, ou fora dela, no processo de ensino e aprendizagem com os estudantes (MINAS GERAIS, 2019, p. 13).

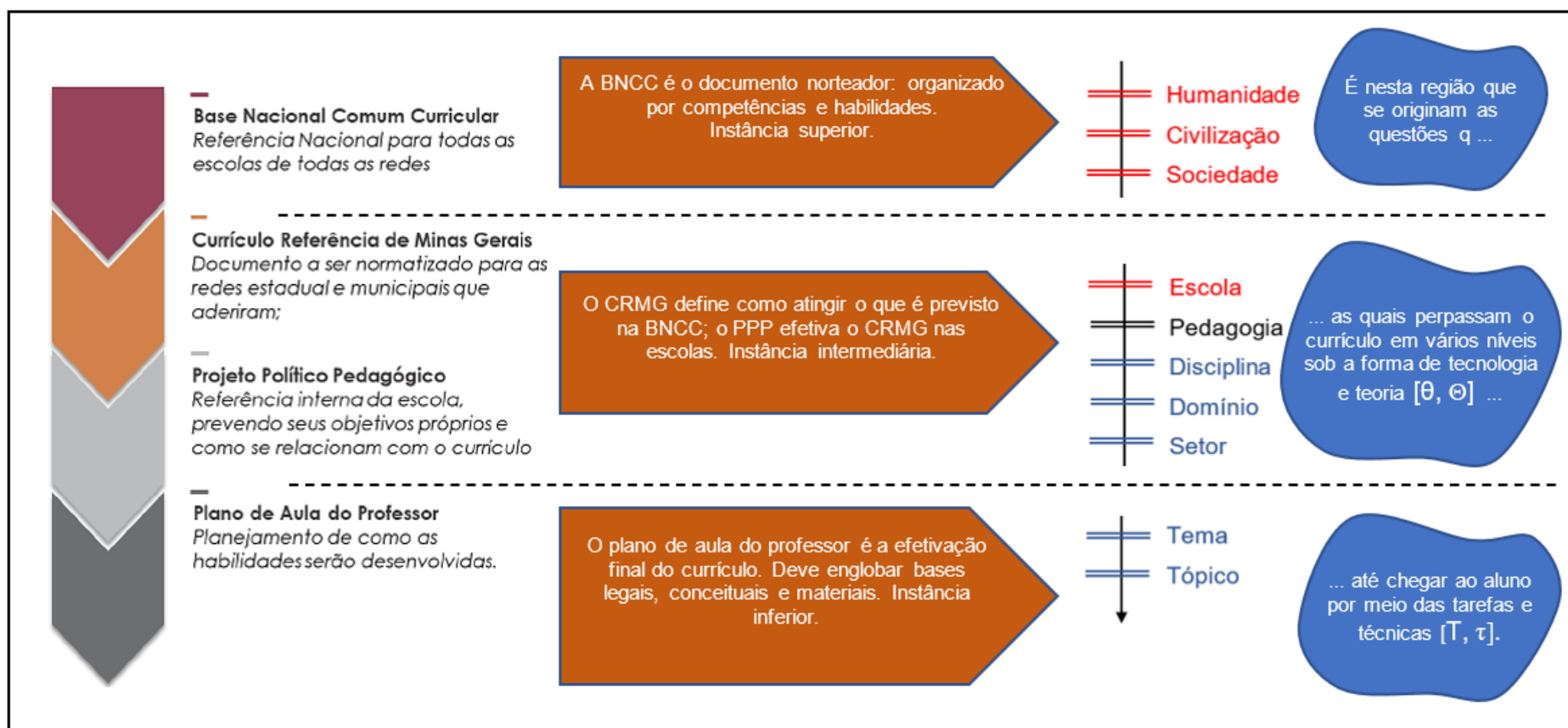
É conveniente neste momento retomar algumas considerações a respeito do corpo teórico básico da TAD¹³⁰. A noção de instituição é seu eixo estruturante. Ao ocupar diversas posições na instituição I, o indivíduo não só constrói seu universo cognitivo relacionando-se com os objetos de I como também estabelece com esses objetos sua relação institucional $R_I(p, O)$. Contudo, essa relação que o indivíduo mantém com objetos e instituições nem sempre segue o que é previsto. É o que Chevallard (2003) chama de relatividade institucional: há várias maneiras de se conhecer um objeto e, também, é praticamente impossível haver uma “boa relação” entre instituição e seus sujeitos.

Além disso, conforme também alerta Chevallard (2002a), é ilusória a expectativa do docente que pensa ter total domínio a respeito do que é ministrado em suas aulas. Domínio aqui significando a possível liberdade que ele pensa dispor. Na verdade, o que há é uma espécie de desintegração de temas em tópicos. Nesse sentido, argumentamos que é tarefa do professor lidar com fragmentos de um todo, com as partes. Ainda que caiba ao professor o manejo dessas partes, elas pertencem a uma instância maior, de onde vieram. No caso deste estudo, é a instituição CRMG que determina que objetos chegam (ou deveriam chegar) ao trabalho docente na sala de aula.

Esta microanálise ecológica do CRMG permite enxergar os níveis superiores de codeterminação que fazem com que os objetos cheguem até a sala de aula. O documento oficial de MG traz preceitos da BNCC e prevê que os conteúdos passem pelo PPP e cheguem ao plano de aula do professor. Fizemos uma inter-relação entre o CRMG e a escala de codeterminação didática e chegamos ao esquema da figura 12.

¹³⁰ Ver capítulo 3.

Figura 12 – Microanálise ecológica do CRMG por meio dos níveis de codeterminação



Fonte: Construção nossa (2022) baseada em Minas Gerais (2019) e Chevallard (2002a).

Essa imagem permite observar com mais clareza como currículo, escola e corpo docente estão relacionados aos níveis de codeterminação propostos por Chevallard (2002a).

Continuando a análise, viu-se que a relação institucional $R_i(p, O)$, conforme já exposto no capítulo 3, é aquela que mostra de que forma o sujeito interage com o objeto O de acordo com pressupostos esperados pela instituição I . Portanto, neste estudo, vamos analisar que objetos ligados ao campo da álgebra são abordados pelo CRMG. Nesta primeira parte, procuramos identificar quais são os conhecimentos naturalizados pelo currículo no tocante a este campo de conhecimento. Além disso, vamos destacar os objetos ostensivos e não ostensivos que são reconhecidos por essa instituição.

Nesta análise, virá à tona a relação ideal, ou seja, aquela que mostra o “sujeito bom”, o sujeito que se institucionaliza e reconhece todos os objetos previstos em I . Já viemos destacando neste estudo o fato de os conteúdos partirem de um todo e irem se desfragmentando até atingirem as tarefas. Este todo, conforme os níveis de codeterminação didática, vem de fora da escola: da humanidade, da sociedade, aquelas que definem seus valores e conceitos. No caso do CRMG, vimos que essa instância é representada pela BNCC e está fundamentada em habilidades e competências.

Cumprindo esse roteiro que vem da BNCC, o CRMG fundamenta-se nela para organizar o currículo de matemática em cinco unidades temáticas (MINAS GERAIS, 2019):

- números;
- álgebra;
- geometria;
- grandezas e medidas;
- probabilidade e estatística.

Portanto, o campo álgebra é tratado aqui como uma unidade temática. Na escala de codeterminação, é o domínio. O CRMG traz orientações direcionadas aos anos iniciais (1º ao 5º) e finais (6º ao 9º) do Ensino Fundamental (EF). Apesar de o objetivo deste estudo tratar da análise de tarefas de alunos de 7º e 8º anos do EF,

nossa hipótese argumenta que as concepções desses alunos podem estar ligadas com a estrutura do currículo, ou seja, vamos tratar, também, de temas que aparecem desde o 1º ano do EF. E, pelo corpo teórico adotado, notamos que uma análise institucional envolve objetos que podem ser verificados em âmbito longitudinal. A escala de codeterminação permite – e prevê – essa perspectiva. Além disso, não se deve perder de vista que a BNCC inovou ao propor o trabalho com as ideias da álgebra nas séries iniciais, mas que tal situação é, de certa maneira, recente nos documentos oficiais do país se considerarmos que ela foi promulgada em 2018.

O CRMG explica que o objetivo geral da unidade álgebra é desenvolver o pensamento algébrico, o qual [...] é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos” (MINAS GERAIS, 2019). O documento orienta que é preciso enfatizar quatro dimensões em álgebra:

- o desenvolvimento de uma linguagem;
- o estabelecimento de generalizações;
- a análise da interdependência de grandezas;
- a resolução de problemas.

Nota-se, portanto, que o tema generalização aparece, neste momento, como um objeto não ostensivo, numa dimensão a ser alcançada. Ou seja, podemos analisar a generalização, neste caso, como o componente de um processo, de um caminho. Em outras palavras, é por meio do estabelecimento de generalizações que se alcança o pensamento algébrico.

Daí, inferimos, pelas ferramentas praxeológicas da TAD, que isso se dá por meio da execução de tarefas e técnicas justificadas por um discurso teórico. Contudo, o que já queremos esboçar aqui é o fato de essas dimensões da álgebra poderem ser localizadas tanto no âmbito prático como no teórico no modelo praxeológico. De fato, Chevallard (1998) explica que uma técnica τ engloba o modo de fazer. Além disso, também afirma o autor que o bloco teórico, a tecnologia θ , nos permite realizar as tarefas T , que garante o discurso técnico, dá embasamento. Ora, dessa forma podemos, também, analisar a generalização sob a perspectiva teórica/tecnológica, já

que os próprios enunciados teóricos possuem um caráter de generalidade, o que nos leva a concluir que, em determinados momentos, é por meio da generalização que se atingem os níveis mais altos do currículo. É nesse sentido que Chevallard (1998) mostra que é por meio da teoria/tecnologia que é possível justificar a técnica e, ainda, explicar a sua razão de ser.

Portanto, ao tratar da generalização como uma dimensão da álgebra, enxergamos aqui uma perspectiva mais teórica, mais ampla. É aquilo que se quer atingir. Embora se possa estabelecer generalizações por meio de técnicas, entendemos que o aspecto aqui, neste momento do CRMG, é mais amplo. Será necessário, portanto, a construção de praxeologias várias para que se estabeleçam generalizações na construção do pensamento algébrico.

Cabe, neste momento, enfatizar que, segundo Mason e Sutherland (2002), a álgebra escolar difere de país para país. Os autores mostram que há currículos que enfatizam o estudo de sistemas de equações, outros buscam tratar da percepção de padrões e generalidade. Há aqueles que tratam da álgebra por meio da elaboração de conjecturas e investigações. Ou seja, “[...] é provável que os resultados da pesquisa sobre o aprendizado da álgebra sejam, em alguns aspectos, específicos da cultura e devam ser interpretados como tal” (MASON, SUTHERLAND, 2002, p. 2, tradução nossa¹³¹). Portanto, o currículo mineiro estabelece que as facetas da álgebra, numa perspectiva curricular, abrangem a linguagem algébrica, a generalização, a interdependência de grandezas e a resolução de problemas. Frisa-se esse aspecto porque é de nosso interesse localizar o tema de nosso estudo, e percebemos que, conforme dito anteriormente, a abordagem nesse momento é num campo de instrução, de território a ser alcançado.

A esse respeito, Mason e Sutherland (2002) também argumentam que, sobre a aprendizagem de álgebra, a questão principal é desenvolver a consciência e a apreciação dos vários aspectos do pensamento algébrico – e a generalização é um deles. Os autores ainda explicam que trabalhos como o de Chevallard (1982) sobre a transposição didática mostram que o programa de ensino acaba se tornando uma

¹³¹ [...] is likely that research results on the learning of algebra are in some respects culture-specific and should be interpreted as such.

abordagem mecânica e “[...] uma coleção de comportamentos para os alunos imitarem e dominarem” (MASON; SUTHERLAND, 2002, p. 5¹³²).

O currículo mineiro traz expectativas para os anos iniciais e finais do EF ligadas ao ensino da álgebra. Essas expectativas estão em consonância com a BNCC, como já foi visto anteriormente. Assim, antes de apontar os conteúdos previstos para cada ano, o CRMG traz esses apontamentos que podem ser interpretados como objetivos gerais.

Para os anos iniciais, 1º ao 5º ano, é previsto, para o domínio álgebra, o trabalho com as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. Assim, o tema generalização deve ser desenvolvido desde o ingresso no Ensino Fundamental, aos 6 anos de idade. Portanto, até o 5º ano, é esperado o trabalho com ideias, com noções. E a generalização aparece, mais diretamente, no trabalho com padrões.

Já para os anos finais, 6º ao 9º ano, é esperado que os alunos, além de aprofundarem o que foi trabalhado nos anos iniciais, sejam capazes de:

- compreender os significados das variáveis nas expressões;
- estabelecer generalizações de propriedades;
- investigar regularidades em sequências numéricas;
- indicar o valor desconhecido em uma sentença algébrica;
- estabelecer a variação entre duas grandezas;
- relacionar variáveis a funções e incógnitas a equações.

Percebe-se que o tema generalização está presente de maneira mais explícita no currículo das séries iniciais e finais do EF, por meio do trabalho com padrões e investigação de propriedades e regularidades. Vamos afirmar, também, que ele pode ser visto de maneira indireta quando há a instrução para que o aluno relacione variáveis a funções e incógnitas a equações. Já o trabalho com a linguagem algébrica acontece a partir do momento que se deve descobrir o valor desconhecido nas sentenças algébricas.

¹³² [...] becomes a collection of behaviours for students to mimic and master.

A análise desses objetivos gerais do CRMG para a unidade álgebra já permite identificar os objetos previstos na instituição para o estudo deste campo. Esses objetos são os entes da instituição I que vão se relacionar com o sujeito por meio da relação pessoal. Portanto, nesse momento, vale lembrar que Chevallard (1994a) destaca que há dois aspectos fundamentais nesses objetos: alguns assumem uma materialidade – os ostensivos, e outros têm o aspecto de conceito, de ideia –, os não ostensivos, conforme mostrado no capítulo 3. São esses objetos que determinam, que formam uma técnica. Assim, são eles que estarão presentes nos tópicos apresentados aos alunos.

Assim, é previsto que os anos iniciais tenham contato com ideias de generalização, dentre outras. Esses objetos estão ligados ao campo das noções. São os não ostensivos. Dessa forma, só podem ser evocados por meio de ostensivos associados a eles. Nos anos finais, identificamos os seguintes objetos: variáveis, generalização, propriedades, regularidades, sequências numéricas, sentença algébrica, variação, grandezas, funções, incógnitas e equações.

Notamos que esses objetivos trazem explícitos quais são esses objetos ostensivos e não ostensivos. O quadro 3 mostra como a análise por meio dos verbos indicativos traz uma previsão dos objetos a serem trabalhados. Importante notar que o único objetivo que manipula exclusivamente objetos ostensivos é aquele ligado à aquisição da linguagem algébrica.

Portanto, esses são os objetos reconhecidos pela instituição CRMG no campo da álgebra. Vale lembrar que eles estão presentes nos objetivos gerais do currículo. Vamos ainda analisar os temas que são previstos a cada ano. De qualquer forma, pode-se afirmar que a generalização aparece aí no terreno das noções, dos conceitos, ou seja, como um objeto não ostensivo. Ela é evocada de forma mais direta – e intencional – por meio da exploração de propriedades e da investigação de regularidades. Podemos afirmar, também, que ela está presente de maneira indireta na compreensão do significado das variáveis, ao estabelecer a variação entre duas grandezas e no momento de relacionar variável à função e incógnitas a equações.

Quadro 3 – Objetos ostensivos e não ostensivos nos objetivos gerais do CRMG para a unidade temática álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental

Verbo	Objeto não ostensivo	Objeto ostensivo
Compreender	os significados das variáveis	nas expressões.
Estabelecer	generalizações	de propriedades.
Investigar	regularidades	em sequências numéricas.
Indicar		o valor desconhecido em uma sentença algébrica.
Estabelecer	a variação	entre duas grandezas.
Relacionar	variáveis	a funções
Relacionar	incógnitas	a equações.

Fonte: Construção nossa, 2022.

Assim, já identificamos que há duas abordagens relacionadas à generalização nos objetivos gerais do CRMG para a unidade álgebra: uma abordagem direta, em que o trabalho é direcionado à ideia generalização; e outra indireta, em que é por meio dela que se atinge o que é previsto no objetivo.

Conforme Chevallard (1994a) explica, a característica fundamental dos objetos ostensivos é sua capacidade de ser manipulado: por gestos, palavras, escritos etc. Portanto, a partir dos objetivos gerais elencados anteriormente, identificamos os seguintes objetos que serão manipulados no estudo na álgebra, no EF, de acordo com o CRMG:

- expressões;
- propriedades;
- sequências numéricas;
- sentenças algébricas;
- grandezas;
- funções;
- equações.

Classificamos esses objetos, de acordo com a escala de codeterminação didática, em setores. Importante notar que eles chegam à sala de aula por meio de temas e tópicos, os quais serão apresentados aos alunos por meio de tarefas. As

tarefas, segundo o modelo praxeológico de Chevallard (1998), são levadas a efeito por técnicas. E são as técnicas que trazem os objetos (ostensivos e não ostensivos). Portanto, vamos analisar o que o CRMG prevê para cada ano de escolaridade no tocante à álgebra, procurar identificar os objetos reconhecidos e fazer uma previsão das possíveis técnicas implícitas nos temas, setores e domínios.

Por meio da microanálise feita anteriormente do CRMG, foi possível identificar os habitantes da noosfera e a fronteira pedagógica que regula a difusão do conhecimento de acordo com os níveis de codeterminação didática de Chevallard (2002a). Dando prosseguimento, já é possível identificar agora os componentes do domínio e o setor da escala inferior, do mundo de baixo, na denominação de Chevallard (2002a). O quadro 4 apresenta esta análise e sintetiza o que viemos identificando até aqui em termos de objetos para o ensino da álgebra no currículo de Minas Gerais.

Quadro 4 – Domínio e setor para o ensino da álgebra de acordo com o CRMG

NÍVEIS SUPERIORES	HUMANIDADE	MUNDO EXTERIOR
	CIVILIZAÇÃO	
	SOCIEDADE	
	ESCOLA	
FRONTEIRA PEDAGÓGICA: BNCC		
NÍVEIS INFERIORES	DISCIPLINA	MATEMÁTICA
	DOMÍNIO	ÁLGEBRA
	SETOR	Expressões
		Propriedades
		Sequências numéricas
		Sentenças algébricas
		Grandezas
		Funções
	Equações	

Fonte: Construção nossa, 2022.

Antes de procedermos a uma análise mais específica sobre o objeto generalização no CRMG, trazemos algumas considerações a respeito da abordagem curricular: nosso intento é construir alguns argumentos que sirvam de ferramenta a este estudo. Assim, julgamos conveniente considerar alguns movimentos

institucionais que culminaram na concepção e publicação do CRMG. Já mostramos que o currículo mineiro foi idealizado a partir das ideias da BNCC. A seu turno, a base representa um marco na abordagem algébrica, pois admite que seu trabalho deve se iniciar já no 1º ano do EF. O que queremos pontuar aqui, ainda que de forma muito breve, são os movimentos internacionais ligados à educação matemática e que serviram de molde à concepção da BNCC.

O NCTM – sigla em inglês para Conselho Nacional de Professores de Matemática – publicou no ano de 2000 o documento intitulado *Princípios e padrões para a matemática escolar* (no original, em inglês, *Principles and standards for school mathematics*). Esta publicação, importante marco da educação matemática, influenciou o ensino não apenas nos Estados Unidos e Canadá, mas no mundo todo. Van de Walle (2009) explica que este documento representa uma evolução de um movimento que se iniciou na década de 1980, cujo princípio era pautado na resolução de problemas como uma tendência nos currículos em matemática. O NCTM publicou, então, em 1989, orientações que deram início à era dos padrões curriculares.

Aqui no Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais¹³³ – PCN (BRASIL, 1997a, 1997b), também foram elaborados em consonância com os princípios do NCTM. À época, o foco do ensino era a vertente resolução de problemas. Atualmente, defende o NCTM a articulação de seis princípios fundamentais para a educação matemática de alta qualidade:

- equidade;
- currículo;
- ensino;
- aprendizagem;
- avaliação;

¹³³ A versão eletrônica dos PCN pode ser obtida no portal do Ministério da Educação (MEC): 1ª a 4ª séries (hoje séries iniciais do EF) e 5ª a 8ª séries (anos finais do EF). Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/busca-geral/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12640-parametros-curriculares-nacionais-1o-a-4o-series> e <http://portal.mec.gov.br/busca-geral/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12657-parametros-curriculares-nacionais-5o-a-8o-series>. Acesso em: 3 dez. 2021.

- tecnologia.

Além desses princípios, recomenda o NCTM a adoção de cinco padrões de conteúdo em matemática:

- números e operações;
- álgebra;
- geometria;
- medidas;
- análise de dados e probabilidade.¹³⁴

É, portanto, com base nesta publicação que a BNCC recomenda o trabalho com a álgebra desde as séries iniciais¹³⁵. A esse respeito, já no ano de 2000, o NCTM recomendava o trabalho na competência algébrica desde o que chamam de pré-escola, ou seja, as séries iniciais.

Ao ver a álgebra como uma vertente do currículo desde a pré-escola, os professores podem ajudar os alunos a construir uma base sólida de compreensão e experiência como preparação para um trabalho mais sofisticado em álgebra nas séries intermediárias e no Ensino Médio (NCTM, 2000, p. 37, tradução nossa¹³⁶).

A publicação também manifesta seu apreço por um trabalho que desmistifique a álgebra escolar ligada exclusivamente à manipulação de símbolos: resolução de equações e simplificação de expressões algébricas. Para o NCTM (2000), álgebra é mais do que isso: “Os alunos precisam entender os conceitos de álgebra, as estruturas e princípios que governam a manipulação dos símbolos e como os próprios símbolos

¹³⁴ Na BNCC, há a proposta de cinco unidades temáticas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística.

¹³⁵ Chama a atenção o notório atraso com que essas ideias foram difundidas no currículo brasileiro. Apesar de os PCN já representarem um grande avanço com relação à difusão das ideias mais atuais em educação matemática, estes só foram promulgados a partir de 1997. A BNCC, por sua vez, em 2018, praticamente vinte anos após os debates a respeito do que vinha sendo publicado acerca do ensino de matemática em nível mundial.

¹³⁶ By viewing algebra as a strand in the curriculum from pre-kindergarten on, teachers can help students build a solid foundation of understanding and experience as a preparation for more-sophisticated working algebra in the middle grades and high school.

podem ser usados para registrar ideias e obter *insights* sobre situações” (NCTM, 2000, p. 37, tradução nossa¹³⁷).

Trouxemos esses apontamentos porque há algumas considerações que gostaríamos de trazer à tona neste momento. Conforme já abordado no capítulo 3, Chevallard (1982) desenvolve o conceito de transposição didática (TTD) mostrando que há um caminho a ser percorrido desde o que ele chama de saber erudito até o saber ensinado. Além disso, a escala de codeterminação didática também modela a forma como as questões partem da sociedade até atingirem a sala de aula. Dessa forma, pelo filtro teórico que está sendo utilizado aqui, é possível analisar as condições da difusão do conhecimento: aquele que parte de fora para dentro da escola. De fato, levando em conta os preceitos da TTD, a ordem dessa difusão do saber ocorre de fora para dentro. A própria razão de ser da escola vem do estudo de questões da sociedade.

Portanto, se estamos fazendo neste momento a análise do documento institucional que baliza o currículo de Minas Gerais, é necessário considerar todas as instâncias que fazem com que o objeto de conhecimento de nosso interesse chegue ao aluno: a generalização algébrica. Ou seja, há um movimento que vem de fora para dentro, e o corpo teórico da TAD modela esse percurso. Além disso, e não menos importante, essas ferramentas também nos permitem argumentar a respeito de como esse saber retorna. Em outras palavras, como o aluno responde ao que é proposto.

Chevallard (2002b) explica, a esse respeito, que o modelo praxeológico é capaz de analisar essa disseminação dos saberes e que é preciso considerar duas instâncias nesse processo: uma prática e uma teórica. O saber atinge, portanto, as pessoas por meio das instituições. O autor é enfático a esse respeito: “Não podemos compreender a aprendizagem pessoal se não procurarmos compreender a aprendizagem institucional” (CHEVALLARD, 2002b, p. 3, tradução nossa¹³⁸). Ele nos

¹³⁷ Students need to understand the concepts of algebra, the structures and principles that govern the manipulation of the symbols, and how the symbols themselves can be used for recording ideas and gaining insights into situations.

¹³⁸ On ne peut comprendre les apprentissages personnels si on ne cherche pas à comprendre les apprentissages institutionnels.

fala em uma dialética que envolve instituições e pessoas e critica a ideia de que há uma propensa disseminação direta do saber, ou seja, como se, do teórico ao aluno, existisse uma passagem sem filtros, limpa. Nas palavras do autor¹³⁹:

Há, assim, na disseminação de saberes [...] e práticas [...], uma dialética insuperável entre pessoas e instituições, cuja compreensão pressupõe, por exemplo, a desconstrução da ideia dominante em termos de difusão do conhecimento de uma difusão radial, em que o conhecimento deve ir diretamente de um “centro de disseminação” – o professor da turma, por exemplo – para cada um dos “destinatários” pretendidos – os alunos da turma (CHEVALLARD, 2002b, p. 3, tradução nossa¹⁴⁰).

Das palavras do autor, depreende-se que não é possível proceder a uma análise desconsiderando os efeitos das instituições nas pessoas e vice-versa. Trazendo para os elementos da escola, é necessário considerar os efeitos da difusão do saber até chegar ao aluno e, além disso, analisar de que forma esse aluno enxerga o que é apresentado a ele. E é este argumento que gostaríamos de construir daqui em diante.

Neste mesmo artigo, Chevallard (2002b) explica que a disseminação do conhecimento é feita por meio de praxeologias, no plural. Há múltiplas maneiras, múltiplos caminhos que permitem ao saber “de fora”, “de cima”, chegar ao interior de uma sala de aula. Cada disciplina, cada conteúdo, cuida de uma praxeologia própria. E são essas praxeologias que dão conta de analisar de que forma o saber é transportado a cada instância. Sobre isso, o autor traz um modelo que ele chama de percolação¹⁴¹ – segundo Chevallard (2002b), saberes e práticas percolam de uma instituição para outra seguindo múltiplas vias. A ideia de percolação mostra que o saber que atinge o aluno é diferente daquele que foi designado a ser ensinado. Como

¹³⁹ Chamamos a atenção do leitor para o fato de o autor se referir à disseminação de saberes e práticas, ou seja, teoria e prática.

¹⁴⁰ Il y a ainsi, dans la diffusion des connaissances [...] et des pratiques [...] une dialectique indépassable entre personnes et institutions, dont la compréhension suppose par exemple la déconstruction de l'idée dominante en matière de diffusion de connaissances, celle d'une diffusion radiale, où les connaissances sont supposées aller directement d'un «centre de diffusion» – le professeur de la classe par exemple – à chacun des «destinataires» visés – les élèves de la classe.

¹⁴¹ Percolar significa atravessar; cruzar; percorrer; transpor; transpassar. Passagem de uma substância através de um material absorvente.

comparação, podemos admitir que a água percolando até o subsolo sofre a influência dos ambientes que percorreu.

Esses apontamentos do autor vão nos auxiliar a pontuar algumas questões. Chevallard (1982, 2002b) nos fala em difusão de um conhecimento por meio de praxeologias específicas as quais assumem contornos próprios. Há, assim, um movimento que estamos enxergando aqui: as instâncias oficiais ofertam um saber que acaba por chegar ao aluno por meio de conhecimentos e práticas cada vez mais fragmentados; contudo, partiram de saberes generalizados, mais amplos.

Por exemplo, ao trazer suas orientações a respeito do campo da álgebra, o NCTM fala da importância do trabalho com sequências, padrões e regularidades nas séries iniciais. Isso para que os estudantes possam criar um repertório vasto de modelos matemáticos que lhes permitam construir o conceito de função. Vejamos:

À medida que avançam da pré-escola ao Ensino Médio, os alunos devem desenvolver um repertório de muitos tipos de funções. Nas séries intermediárias, os alunos devem se concentrar em entender as relações lineares. No Ensino Médio, eles devem ampliar seu repertório de funções e conhecer as características das classes de funções (NCTM, 2000, p. 38, tradução nossa¹⁴²).

Ou seja, há aqui uma orientação ampla, geral, que prevê um caminho que vai até o Ensino Médio. Na visão de Chevallard (2002b), temos nesse exemplo uma praxeologia que podemos chamar de longitudinal: o bloco prático formado pelas tarefas de regularidade e o bloco teórico, a ser construído paulatinamente, constituído pelo conceito de função. Esse é apenas um exemplo. Outras praxeologias mais específicas vão sendo construídas. E o saber vai sendo fragmentado cada vez mais.

Há, portanto, um caráter de generalidade nos textos oficiais. Por esse motivo, apresentamos anteriormente os princípios gerais que nortearam a concepção da BNCC, ou seja, a própria noosfera brasileira apoia-se em documentos internacionais mais amplos. Esses princípios representam, assim, o saber num estado condensado,

¹⁴² As they progress from preschool to high school, students must develop a repertoire of many types of roles. In the middle grades, students should focus on understanding linear relationships. In high school, they must expand their repertoire of roles and know the characteristics of role classes.

generalizado. Nessas instâncias encontramos, portanto, os temas que devem chegar à sala de aula. E esses temas chegam ao aluno por meio de tópicos, conforme já foi exposto anteriormente.

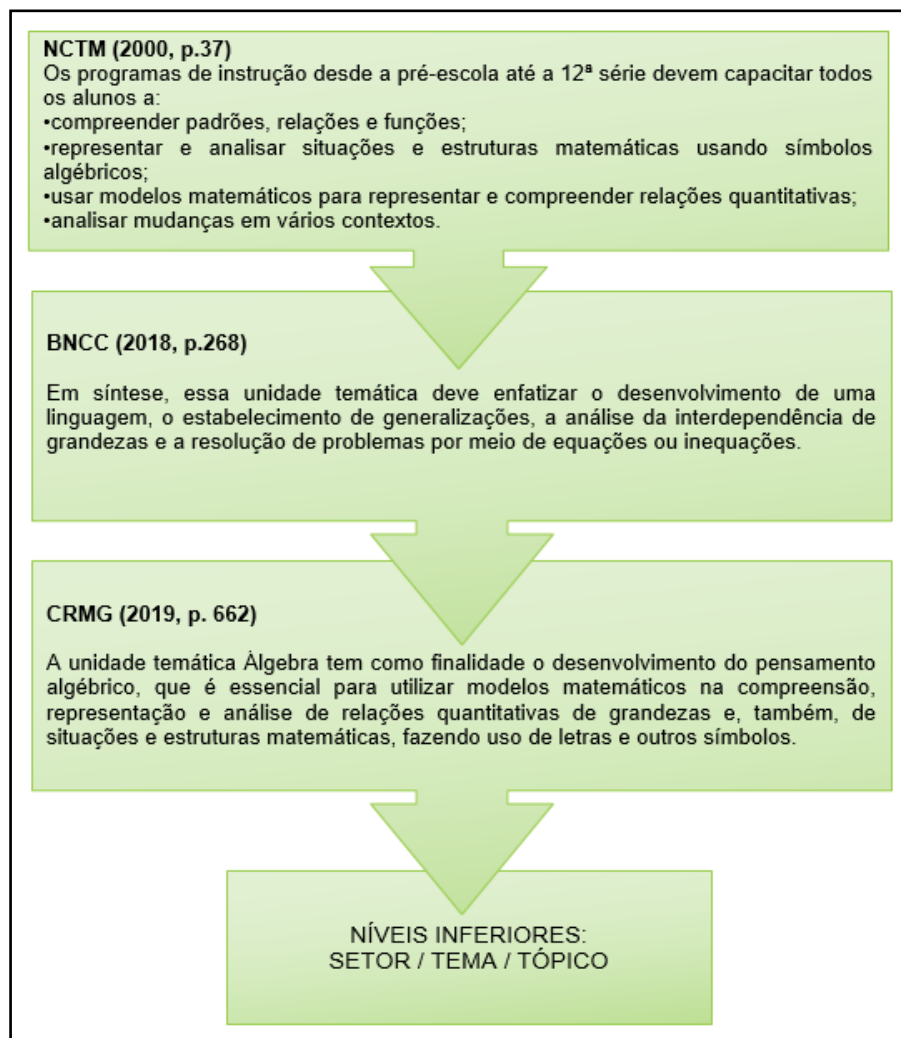
Dessa forma, o movimento da difusão do saber que estamos investigando é este: a BNCC mostra que os currículos devem proceder a adaptações regionais e, nesse mesmo movimento, o CRMG orienta que cabe às secretarias de ensino levar às escolas o currículo (considerando o PPP). Finalmente, cabe ao professor fazer as devidas adequações. Ora, o que estamos argumentando aqui é que existe um caminho que parte de uma totalidade para a parte, de um caráter geral para um específico, de um universo que vem de fora para dentro, de baixo para cima.

Portanto, daqui em diante vamos considerar que, de instância para instância, há uma perda da generalidade desse saber e há um foco numa especificidade. Identificamos esse movimento nas análises que fizemos ao apresentar as orientações do NCTM, da BNCC e do CRMG para matemática. A figura 13 traz essas constatações já nos moldes que estamos considerando. Neste caso, vemos na imagem os objetivos gerais para álgebra nesses três documentos. O que queremos destacar é o caráter de generalidade envolvendo essas instâncias superiores à sala de aula. Há, assim, uma transposição que vem do NCTM até chegar ao CRMG. Como afirma Chevallard (2002b, p. 2, tradução nossa¹⁴³), “[...] a disseminação de conhecimentos, saberes e práticas é feita através da transposição das praxeologias correspondentes [...]”. O autor chama esse fenômeno de transposição institucional.

Vejamos na figura 13 seguinte.

¹⁴³ [...] la diffusion des «connaissances, savoirs et pratiques» se fait par transposition des praxéologies Correspondentes [...].

Figura 13 – A generalidade dos textos institucionais



Fonte: Construção nossa, 2022.

Destaca-se desses textos institucionais as orientações gerais que, mais tarde, serão trabalhadas por meio de praxeologias cada vez mais específicas. A respeito da generalização, identificamos que ela aparece de forma indireta em praticamente todos os objetivos elencados no NCTM (2000). Por exemplo, para compreender padrões, é necessário uma praxeologia que leve o aluno a observar, imaginar, supor determinada sequência; para usar modelos matemáticos, é preciso várias praxeologias anteriores focadas na investigação de regularidades e generalização de propriedades.

Já a BNCC (2018) fala em desenvolvimento de linguagem algébrica e estabelecimento de generalizações: uma praxeologia longitudinal, uma vez que o desenvolver uma linguagem simbólica pressupõe um trabalho que começa já nas

séries iniciais, como já foi mostrado. Mais uma vez, o objeto generalização aparece em praxeologias amplas. O CRMG (2019), por sua vez, também traz orientações a respeito da utilização de modelos e desenvolvimento de pensamento algébrico.

Assim, nosso intento daqui em diante é destacar o objeto generalização levando em conta, por meio de nossos argumentos, que ele parte de instâncias superiores até chegar aos tópicos. Ou seja, há um caminho de desfragmentação do todo em partes, o caminho do geral para o particular, que vamos chamar de cima para baixo. E é nessa perspectiva que vamos localizar o objeto de nosso estudo. Continuemos.

Para fins de organização, cabe lembrar que nesta seção há duas partes principais, cujos objetivos são:

- identificar os conhecimentos naturalizados e os objetos ostensivos e não ostensivos que são reconhecidos pela instituição no campo da álgebra.
- analisar como é o sujeito bom previsto pela instituição; o *topos* do aluno e do professor; os momentos didáticos intrínsecos no currículo.

Até aqui, portanto, apresentamos uma análise ecológica do CRMG por meio dos níveis de codeterminação didática. Foi identificada a fronteira pedagógica que baliza o currículo mineiro e foram apresentados os temas e setores que compõem os níveis inferiores da escala de níveis para as séries iniciais em MG. A partir daí, construiu-se a ideia de que os tópicos chegam à sala de aula segundo um movimento que vem de fora para dentro numa perspectiva de fragmentação. Ou, em sentido contrário, pode-se pensar que esses tópicos têm sua origem em setores cuja propriedade é caráter de generalidade.

Portanto, para finalizar esta primeira parte, vamos apresentar o organizador curricular para álgebra nas séries iniciais e finais e analisar que objetos são reconhecidos neste campo e assumem, assim, um perfil de conhecimento naturalizado. O intento é identificar de que forma o objeto generalização percorre esse caminho que vem de fora para dentro, nesse sentido de fragmentação.

O CRMG traz o Organizador Curricular de Matemática. Nele, cada unidade temática é relacionada ao que ele chama de objetos de conhecimento. Esses objetos são, então, apresentados com suas habilidades correspondentes. Inferimos, neste

trabalho, que as habilidades descrevem, por meio de verbos, os tópicos a serem trabalhados pelo professor com os alunos. O currículo é apresentado por meio de bimestres, organização que vamos manter aqui por ocasião das análises.

A figura 14 mostra um recorte de como serão apresentados os quadros ano a ano.

Figura 14 – Recorte de como serão apresentadas as análises ano a ano

O diagrama mostra uma tabela curricular para o 4º ano, com as seguintes colunas: BIMESTRE, SETOR, OBJETOS DO CONHECIMENTO/TEMA e HABILIDADES/TÓPICOS. A tabela é dividida em duas partes: 1º BIM e 2º BIM. As anotações explicativas são:

- Bimestres.** (aponta para a coluna BIMESTRE)
- Setor de acordo com os níveis de codeterminação didática. Coluna acrescentada para nossa análise.** (aponta para a coluna SETOR)
- Ano de escolaridade.** (aponta para o cabeçalho 4º ANO)
- Habilidades de acordo com o CRMG.** (aponta para a coluna HABILIDADES/TÓPICOS)
- Tópicos de acordo com os níveis de codeterminação didática.** (aponta para a coluna HABILIDADES/TÓPICOS)
- Objetos de conhecimentos de acordo com o CRMG.** (aponta para a coluna OBJETOS DO CONHECIMENTO/TEMA)
- Tema de acordo com os níveis de codeterminação didática.** (aponta para a coluna OBJETOS DO CONHECIMENTO/TEMA)

4º ANO			
BIMESTRE	SETOR	OBJETOS DO CONHECIMENTO/TEMA	HABILIDADES/TÓPICOS
1º BIM			
2º BIM		-Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão. Propriedades da multiplicação e divisão. Propriedades da adição e subtração. Propriedades da multiplicação e divisão. Propriedades da adição e subtração.	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora que, quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e entre multiplicação e divisão, para aplicá-las na resolução de problemas. Reconhecer, por meio de exemplos, que a relação de igualdade permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a ambos os membros de uma igualdade que envolve números naturais. Reconhecer, por meio de exemplos, que a relação de igualdade permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a ambos os membros de uma igualdade que envolve números naturais.

Fonte: Construção nossa, 2022.

Para cada ano de escolaridade, vamos apresentar um quadro com níveis inferiores de codeterminação. Nesta primeira etapa, analisamos as séries iniciais, 1º ao 5º ano. Logo adiante, virão as considerações a respeito das séries finais do EF, 6º ao 9º ano. Os próximos quadros, 5, 6, 7, 8 e 9, referem-se, respectivamente, ao 1º, 2º, 3º, 4º e 5º anos. Trata-se do organizador curricular apresentado pelo CRMG. O documento apresenta habilidades e objetos de conhecimento que devem ser trabalhados por bimestre.

De acordo com os níveis de codeterminação didática, ferramenta da TAD utilizada nesta análise institucional, chamamos as habilidades de **tópicos** e os objetos de conhecimento de **tema**. Para esta análise, incluímos também nos quadros o **setor**, identificado por meio dos objetivos gerais do CRMG para matemática, conforme analisado anteriormente.

Conforme já argumentamos anteriormente, embora o foco deste estudo seja a análise a respeito das ideias da generalização envolvidas no momento da introdução da linguagem algébrica (portanto, mais especificamente, nos oitavos e nonos anos do EF), julgamos necessário fazer um breve exame longitudinal sobre a abordagem da álgebra no currículo do Ensino Fundamental. De fato, se tomamos por base as ferramentas da TAD que nos permitem uma análise de cunho institucional e da relação entre seus objetos, admitimos que há todo um movimento curricular que acompanha o estudante. Portanto, pensamos que considerar apontamentos que circundam o currículo como um todo será de grande valia aos objetivos deste trabalho.

Quadro 5 – Organizador curricular para álgebra no 1º ano do EF

1º ANO			
BIMESTRE	SETOR	OBJETOS DO CONHECIMENTO/TEMA	HABILIDADES/TÓPICOS
1º BIM	Propriedades. Sequências numéricas.	-Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências -Sequências recursivas: observação de regras utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo).	(EF01MA09) Identificar, comparar e organizar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida. (EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
2º BIM	_____	_____	_____
3º BIM	_____	_____	_____
4º BIM	_____	_____	_____

Fonte: Construção nossa (2022) adaptada de CRMG (2019).

Quadro 6 – Organizador curricular para álgebra no 2º ano do EF

2º ANO			
BIMESTRE	SETOR	OBJETOS DO CONHECIMENTO/TEMA	HABILIDADES/TÓPICOS
1º BIM	Propriedades. Sequências numéricas.	-Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas. -Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.	(EF02MA09X) Identificar e construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida. (EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.
2º BIM	Propriedades. Sequências numéricas.	-Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.	(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
3º BIM	_____	_____	_____
4º BIM	_____	_____	_____

Fonte: Construção nossa (2022) adaptada de CRMG (2019).

Quadro 7 – Organizador curricular para álgebra no 3º ano do EF

3º ANO			
BIMESTRE	SETOR	OBJETOS DO CONHECIMENTO/TEMA	HABILIDADES/TÓPICOS
1º BIM	Propriedades. Sequências numéricas.	-Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas. -Relação de igualdade.	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes. (EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.
2º BIM	_____	_____	_____
3º BIM	_____	_____	_____
4º BIM	_____	_____	_____

Fonte: Construção nossa (2022) adaptado de CRMG (2019).

Quadro 8 – Organizador curricular para álgebra no 4º ano do EF

4º ANO			
BIMESTRE	SETOR	OBJETOS DO CONHECIMENTO/TEMA	HABILIDADES/TÓPICOS
1º BIM	_____	_____	_____
2º BIM	Propriedades.	-Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão Propriedades da igualdade.	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas. (EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos. (EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
3º BIM	Propriedades. Sequências numéricas.	-Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao serem divididos por um mesmo número natural diferente de zero. -Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades. (EF04MA11) Identificar e descrever regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
4º BIM	_____	_____	_____

Fonte: Construção nossa (2022) adaptado de CRMG (2019).

Quadro 9– Organizador curricular para álgebra no 5º ano do EF

5º ANO			
BIMESTRE	SETOR	OBJETOS DO CONHECIMENTO/TEMA	HABILIDADES/TÓPICOS
1º BIM	_____	_____	_____
2º BIM	Propriedades. Grandezas.	-Propriedades da igualdade e noção de equivalência. -Grandezas diretamente proporcionais . -Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. (EF05MA11A) Resolver problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido. (EF05MA11B) Elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido. (EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.
3º BIM	_____	_____	_____
4º BIM	_____	_____	_____

Fonte: Construção nossa (2022) adaptada de CRMG (2019).

Vale lembrar que esta análise está focada no domínio álgebra¹⁴⁴. Portanto, o que já chama a atenção é o número de bimestres que são dedicados ao seu estudo por orientação do CRMG. Fazendo uma comparação com as outras unidades temáticas, nota-se que o domínio Números, do 1º ao 5º ano, possui carga horária maior (figura 15).

Figura 15 – Unidades temáticas por bimestre nas séries iniciais

1º ANO					
Unidade Temática / Bimestre	1º	2º	3º	4º	
NÚMEROS	X	X	X	X	
ÁLGEBRA	X				
GEOMETRIA	X	X			
GRAND. E MEDIDAS	X	X	X		
PROBAB. E ESTAT.	X	X			

2º ANO					
Unidade Temática / Bimestre	1º	2º	3º	4º	
NÚMEROS	X	X	X	X	
ÁLGEBRA	X	X			
GEOMETRIA	X	X			
GRAND. E MEDIDAS	X		X	X	
PROBAB. E ESTAT.	X		X		

3º ANO					
Unidade Temática / Bimestre	1º	2º	3º	4º	
NÚMEROS	X	X	X		
ÁLGEBRA	X				
GEOMETRIA	X				
GRAND. E MEDIDAS	X	X		X	
PROBAB. E ESTAT.	X	X			

4º ANO					
Unidade Temática / Bimestre	1º	2º	3º	4º	
NÚMEROS	X	X	X	X	
ÁLGEBRA		X	X		
GEOMETRIA	X				
GRAND. E MEDIDAS	X	X		X	
PROBAB. E ESTAT.	X				

5º ANO					
Unidade Temática / Bimestre	1º	2º	3º	4º	
NÚMEROS	X	X	X	X	
ÁLGEBRA		X			
GEOMETRIA	X				
GRAND. E MEDIDAS		X		X	
PROBAB. E ESTAT.	X		X		

Fonte: Construção nossa, baseada no CRMG (2019).

¹⁴⁴ Conforme já explicitado, o currículo de matemática é organizado em cinco unidades temáticas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística.

O domínio álgebra, nas séries iniciais em Minas Gerais, é das unidades temáticas menos presentes em termos de carga horária. Nunca é demais lembrar que, de fato, a abordagem desse domínio no início do EF é algo inédito em termos de currículo. Portanto, antes da BNCC não havia normativas com relação à inclusão direta dos conceitos algébricos nas séries iniciais. É notória a prevalência, até aqui, da unidade Números. É o único domínio presente nos quatro bimestres em todos os anos (com exceção do 3º ano).

O CRMG, vigente a partir de 2019, substituiu o CBC para os anos iniciais¹⁴⁵. Naquela ocasião, o ensino da matemática era organizado em quatro eixos. O quadro 10 faz uma comparação entre as temáticas curriculares em Minas Gerais.

Quadro 10 - Comparação entre as temáticas curriculares em Minas Gerais

Temáticas do CBC (até 2018) Eixos	Temáticas para o CRMG (a partir de 2019) Unidades temáticas
Números e Operações/Álgebra e Funções	Números
	Álgebra
Espaço e Forma	Geometria
Grandezas e Medidas	Grandezas e Medidas
Tratamento da Informação	Probabilidade e Estatística

Fonte: Construção nossa, 2022.

Assim, a álgebra era trabalhada em conjunto com o eixo Números. Pela vigência, agora, do CRMG, percebe-se que o trabalho no domínio algébrico é feito durante um bimestre nos 1º, 3º e 5º anos. Nos 2º e 4º anos, abrange dois bimestres. O quadro 11 traz essa constatação de maneira mais clara.

¹⁴⁵ O CBC para os anos iniciais não está mais disponível no *site* da Secretaria de Educação de Minas Gerais. Uma cópia dele pode ser obtida em: <https://srefabrizianodivep.files.wordpress.com/2017/02/cbc-anos-iniciais.pdf> Acesso em: 27 set. 2021.

Quadro 31 – Abordagem da Álgebra por bimestre e ano de escolaridade nas séries iniciais

		Ano de escolaridade				
		1º	2º	3º	4º	5º
Bimestres	1º bi	X	X	X		
	2º bi		X		X	X
	3º bi				X	
	4º bi					

Fonte: Construção nossa, 2022.

Identificamos, anteriormente, sete setores previstos no CRMG para o domínio da álgebra. Pela escala de codeterminação, o setor traz uma espécie de afunilamento em relação aos níveis superiores. De fato, a partir do nível disciplina, tratamos de praxeologias mais específicas, ligadas a cada disciplina, nos moldes de Chevallard (2002b).

Temas e habilidades vêm logo em seguida e representam, em cada nível, uma praxeologia a seu turno. Assim, a partir do organizador curricular das séries iniciais, foi possível identificar a presença dos setores propriedades e sequências numéricas. No 5º ano, o setor grandezas também está presente (quadro 12).

A esse respeito, Chevallard (2002a) argumenta que o ponto essencial da ecologia das organizações educacionais é considerar que os temas de estudo devem levar em conta os níveis mais altos da hierarquia de codeterminação didática. Para o autor, “a falta de relação do tópico ou tema com os níveis mais elevados [...] torna impossível pensar nas relações motivacionais entre os tipos de tarefas” (CHEVALLARD, 2002a, p. 6, tradução nossa¹⁴⁶). Aqui o autor usa a expressão

¹⁴⁶ L’absence de mise en relation du niveau du sujet ou du thème avec les niveaux supérieurs [...] rend impossible depenser les relations de motivation entre types de tâches.

motivacional para se referir a tarefas que cumpram o objetivo de unir os tópicos estudados em direção ao tema.

Quadro 12 – Setores para o domínio álgebra nas séries iniciais

Setores	Ano de escolaridade				
	1º	2º	3º	4º	5º
Expressões					
Propriedades	X	X	X	X	X
Sequências numéricas	X	X	X	X	
Sentenças algébricas					
Grandezas					X
Funções					
Equações					

Fonte: Construção nossa, 2022.

A consequência desta situação é que o professor fica “confinado” no trato temático. Daí a necessidade de verificar se o objeto generalização acompanha o caminho setor → tópico. Vejamos o que acontece nas séries iniciais. O domínio álgebra é abordado por meio de três setores diferentes:

- Setor propriedades: neste setor, que aparece do 1º ao 5º ano, são mobilizados os seguintes temas:
 - padrões (numéricos e figurais);
 - regularidades;
 - propriedades da adição e da igualdade;
 - equivalência.
- Setor sequências numéricas: abordado do 1º ao 4º ano com os seguintes temas:
 - sequências recursivas;
 - padrões (numéricos);
 - regularidades.
- Setor grandezas: este setor é mobilizado no 5º ano por meio do tema:
 - grandezas diretamente proporcionais.

Aqui percebemos que a generalização pode ser abordada nos três setores, mas de formas diferentes: e esta constatação vem da análise dos tópicos que derivam dos temas, que faremos logo a seguir. Dizemos, assim, que os três setores oferecem um habitat amplo para os temas que abordam a noção de generalização.

Nota-se, ainda, que os temas Padrões e Regularidades aparecem em dois dos três setores. Lembramos que, conforme abordado anteriormente, o NCTM (2000) recomenda o trabalho com sequências, padrões e regularidades nas séries iniciais. Além disso, o trabalho com propriedades da adição e da igualdade, que ocorre do 3º ao 5º ano, é altamente recomendado por Chevallard (1989-1990). O autor defende o trabalho com modelos matemáticos e explica que os sistemas numéricos contêm vastas fontes de manipulação que permitem aos estudantes lidarem com os domínios aritmético e algébrico.

[...] o sistema de números inteiros naturais é constituído como ferramenta de estudo, por um lado, como objeto de estudo, por outro. Isso fornece um exemplo notável das duas funções que qualquer objeto matemático, por sua vez, pode assumir, perspectivas duplas [...] (CHEVALLARD, 1989-1990, p. 13, tradução nossa¹⁴⁷).

Mostra o autor, portanto, que os números naturais tanto são usados como uma ferramenta (contagem, numeração) quanto objetos de investigação: nas propriedades da adição, por exemplo. Nesse momento, cabe pontuar rapidamente alguns argumentos do autor a respeito desse trabalho com modelos matemáticos. Segundo ele, isso faz com que o aluno produza conhecimento não institucionalizado e que foge, de certa maneira, do padrão de respostas aguardado pela instituição (escola ou professor). O trabalho com a modelagem (que engloba conceitos de generalização) “aparece aqui como uma soma integrada de conhecimentos produzidos quase um por

¹⁴⁷ [...] le système des entiers naturels est constitué, comme *outil d'étude*, d'une part, comme *objet d'étude*, d'autre part. Encela il fournit un exemple remarquable des deux fonctions que tout objet mathématique peut tour à tour assumer dualité de perspectives [...].

um, por modelos sucessivos, particulares e parciais, que acabam sendo evidentes e cuja gênese esquecemos” (CHEVALLARD, 1989-1990, p. 14, tradução nossa¹⁴⁸).

Assim, consideramos que o trabalho com propriedades engloba praxeologias amplas e que demandam do professor um planejamento que leve em conta modelos sucessivos e que sirvam de gênese para outras construções dos alunos. Finalmente, o tema grandezas diretamente proporcionais só é abordado no 5º ano. Uma última consideração diz respeito à possibilidade de abordagem da generalização em outros domínios, como geometria e números.

Até aqui, já se pode dizer, portanto, que a presença do objeto generalização apresenta uma coexistência paralela entre os setores, mas segue um movimento progressivo à medida que os anos avançam. Parte-se de padrões figurais até atingir grandezas proporcionais. Essa abordagem sucessiva corrobora os estudos de Chevallard (1989-1990) no sentido de serem necessários resgates e gêneses não previstas no currículo. Para o autor, há uma ilusão de homogeneidade na matemática que pode esconder o fato de o aluno precisar recuperar cognitivamente conhecimentos pretéritos. Obviamente, consideramos o fato de o autor não se referir explicitamente, aqui, ao objeto generalização, todavia ele fala de naturalização de modelos, de conhecimentos antecedentes que auxiliam na construção da ferramenta algébrica. Tal fato nos faz pensar na existência de dois tipos de praxeologias: aquelas progressivas (ascendentes, que dependem de conhecimentos já trabalhados) e as paralelas (que coexistem ao lado de outras, mas que, de certa forma, não têm relação com o conhecimento pregresso).

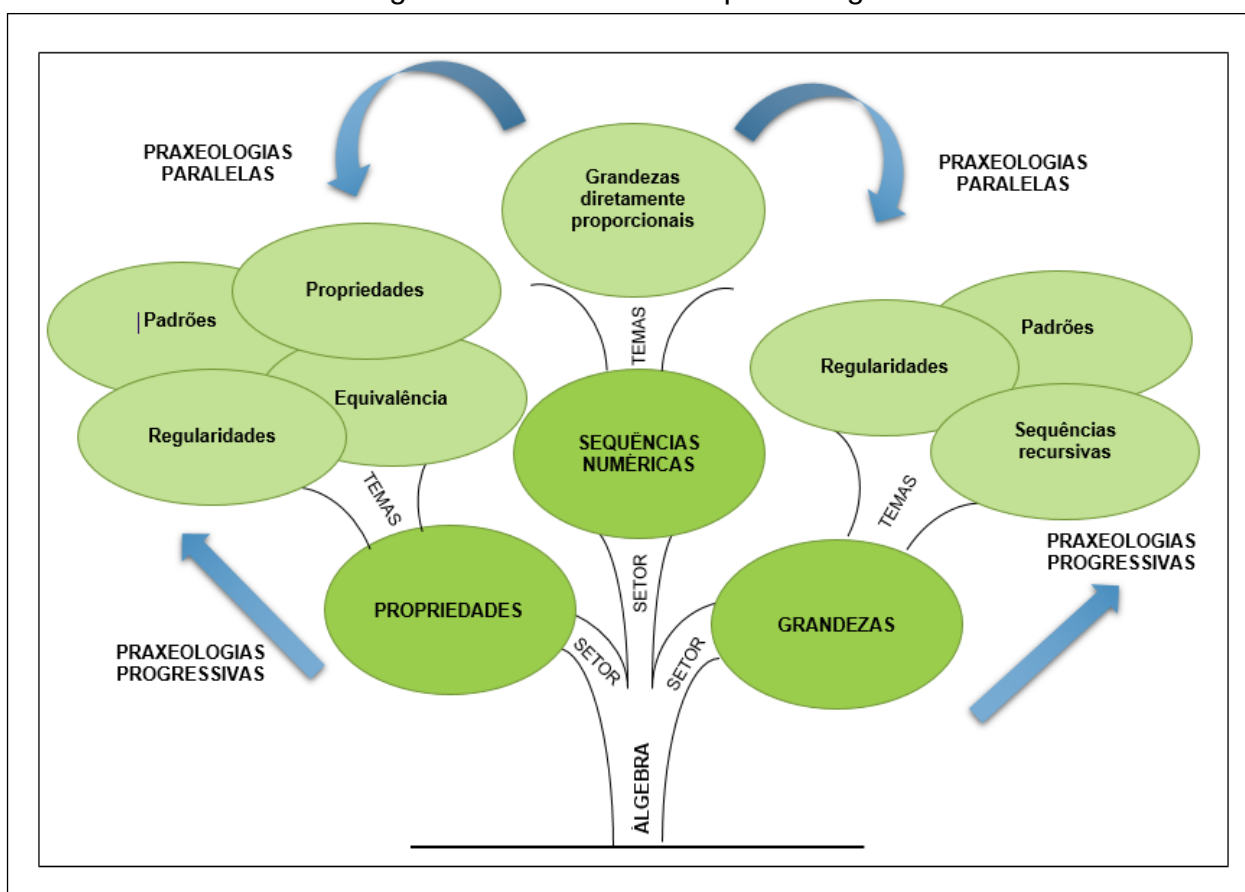
Pensando dessa forma, podemos dizer que as praxeologias progressivas comungam do mesmo elemento teórico. As paralelas podem habitar o mesmo nicho e até caminhar numa espécie de independência. Contudo, em determinado momento, as praxeologias paralelas podem auxiliar no desenvolvimento das progressivas. Identificamos que os três setores (propriedades, sequências numéricas e grandezas) permitem a gênese de praxeologias paralelas, já que cada um deles trabalha ideias

¹⁴⁸ Il apparaît ici comme une somme intégrée de connaissances produites presque une à une, par des modélisations successives, particulières et partielles, qui missent par ailer de soi et dont nous oublions la genèse.

que, em sentido restrito, independem do que é tratado no tema ao lado. Enquanto isso, cada setor trata esses temas por meio de praxeologias progressivas que abrangem vários anos de escolaridade.

Temos, até aqui, o objeto generalização habitando nichos progressivos e, outros, paralelos. A figura 16 apresenta um parco modelo do que viemos construindo até aqui. A escala de codeterminação didática é vista, neste momento, como uma árvore de nichos, em que o tronco, álgebra, abre-se nos primeiros galhos, que representariam os setores, que, por sua vez, dão origem aos temas. O que se quer modelar aqui é nossa visão de que cada setor tem uma origem própria, o que nos indica a existência de praxeologias paralelas. Já os temas assumem uma progressão de habilidades, cada qual à sua maneira.

Figura 16 – A árvore das praxeologias



Fonte: Construção nossa, 2022.

Esse modelo, contudo, permite que se façam dois comentários a respeito dessa abordagem ecológica. Primeiro, percebe-se que cada setor pode caminhar progressivamente, independente dos outros. Há vários setores no domínio álgebra, como as expressões, por exemplo, que ainda não foram aqui abordados. Isso nos leva a concluir que há uma gênese própria em cada setor. Contudo, e aqui trazemos o segundo comentário, a imagem traz a representação de uma árvore (a árvore das praxeologias) e, como tal, subentende-se que essa organização ecológica traz uma dose de interdependência entre seus elementos. Por isso, ainda que tratemos de praxeologias paralelas, nada impede que esses galhos possam (e talvez alguns precisem) se entrelaçar no futuro.

Vejamos, agora, os nichos/tópicos.

Os tópicos contêm as orientações mais específicas para os professores. Lembrando que, pelo CRMG, eles representam as habilidades. É a partir deles que serão construídas as praxeologias mais específicas. Seguindo nosso intento de investigar o caminho percorrido pelo objeto generalização segundo a escala de codeterminação didática, vamos verificar se e onde ele está presente neste último degrau da escala.

Percebe-se que os tópicos são abordados por meio de verbos que têm a pretensão de fazer uma espécie de manipulação em relação aos temas. Seguindo a definição de Chevallard (1998) no modelo praxeológico, nota-se que esses tópicos também podem se encaixar nos moldes das tarefas. Contudo, inferimos que são tarefas em nível mais amplo, ou seja, é uma habilidade esperada, aquela que o aluno deve alcançar. Portanto, é de se esperar que outras tarefas podem e devem ser construídas, e cada tópico representa uma praxeologia que pode ser regional ou global, cabendo ao professor a construção de outras mais específicas, ou locais.

O quadro 13 apresenta de que forma esses verbos orientam os tópicos à medida que os anos avançam. Percebe-se que esses verbos assumem um perfil de instrução. A partir deles, o professor vai construir as tarefas (ou as reproduzir por meio do livro didático). A análise desses verbos nos permite concluir que alguns parecem ser atendidos por um número reduzido de tarefas, enquanto outros assumem caráter mais amplo, no sentido de conclusão.

Assim, o verbo identificar traz a ideia de praxeologias bem pontuais e que, de certa forma, podem ser construídas numa perspectiva única. Ou seja, uma única tarefa pode levar o aluno a identificar o que se pede: objetos numa sequência, por exemplo. Porém, para o 3º ano, há a instrução: identificar regularidades em sequências. Imaginamos que neste caso o aluno é levado a utilizar conhecimentos já generalizados a respeito do que é uma regularidade, ou seja, para chegar neste tópico, são necessárias praxeologias sucessivas no sentido do que abordamos anteriormente.

Assim, pela análise do quadro 13, identificamos que há uma progressão na intencionalidade desses verbos, ou seja, à medida que avançam os anos, é necessário o resgate de uma ideia anterior.

Quadro 13 – Tópicos para o domínio álgebra nas séries iniciais

VERBOS	ANO DE ESCOLARIDADE				
	1º	2º	3º	4º	5º
IDENTIFICAR	Objetos por meio de atributos	Sequências de números naturais/regularidade.	Regularidades em sequências.	Regularidades em sequências de múltiplos.	
COMPARAR	Objetos por meio de atributos				
ORGANIZAR	Objetos por meio de atributos				
DESCREVER	Elementos ausentes em sequências recursivas	Padrão/regularidade. Elementos ausentes nas sequências.	Uma regra de formação em sequências.	Regularidades em sequências de múltiplos.	
CONSTRUIR		Sequências de números naturais/regularidade.			
COMPREENDER			A ideia de regularidade.		
RECONHECER				Relações inversas. Relação de igualdade. Restos iguais (regularidades).	
DETERMINAR				Número desconhecido em operações fundamentais.	
CONCLUIR					Permanência das relações de igualdade.
RESOLVER					Problemas com sentenças matemáticas e termo desconhecido. Problemas com proporcionalidade direta. Problemas com ideia de razão parte/todo.
ELABORAR					Problemas com sentenças matemáticas e termo desconhecido.

Fonte: Construção nossa, 2022.

Pela análise do quadro 13, notamos que, nas séries iniciais, a ideia de regularidade é construída por meio do trabalho com sequências recursivas e padrões. O esperado, portanto, é que até o 3º ano o aluno tenha construído a noção de regularidade para que possa aplicá-la nos anos subsequentes. Já nos 4º e 5º anos, é esperado que os alunos trabalhem com a ideia de número desconhecido. Isso se dá paralelamente ao trabalho com as propriedades da igualdade.

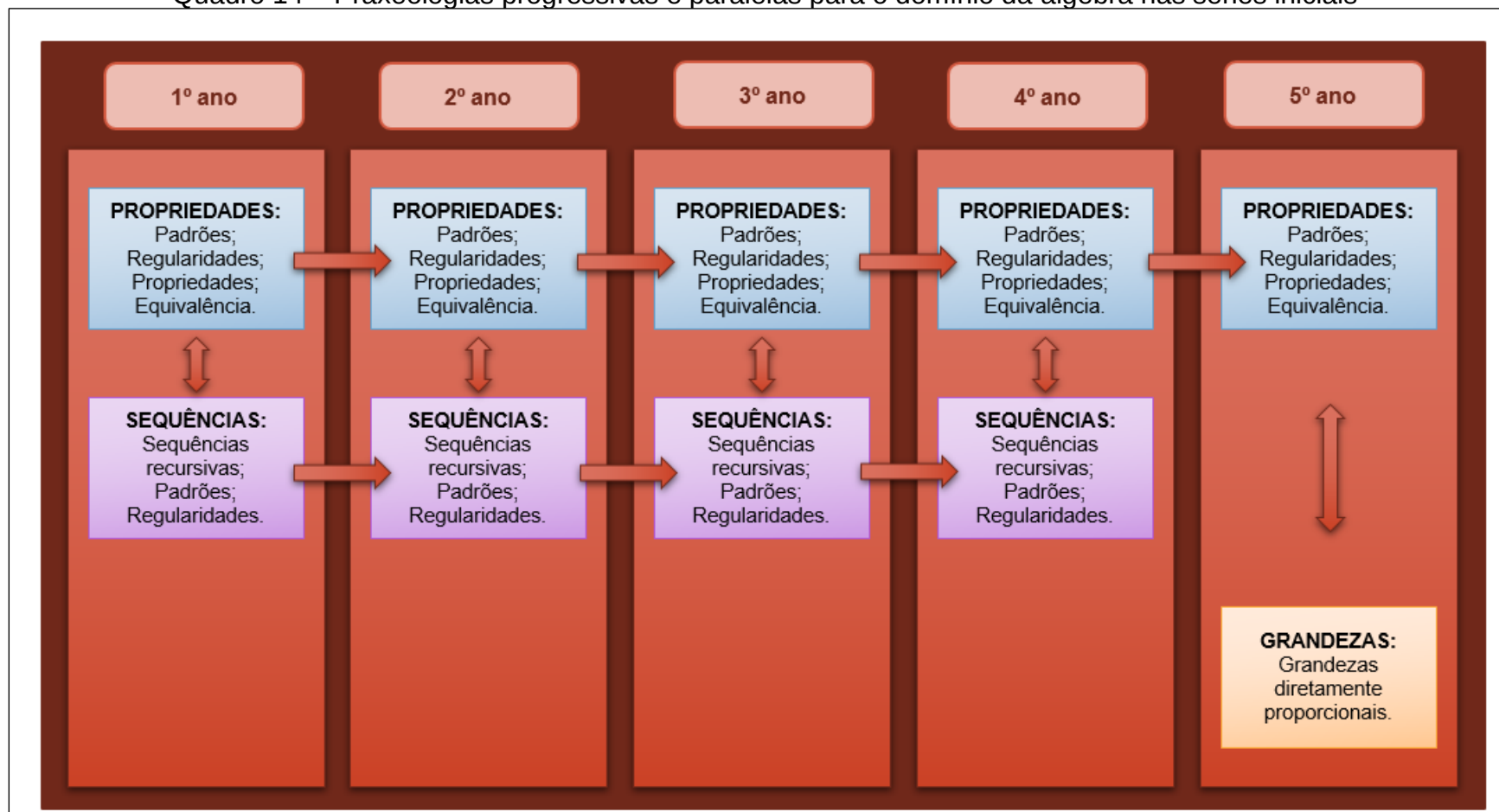
Usando a ideia desenvolvida anteriormente, percebemos que as praxeologias progressivas (ou sucessivas) podem ser trabalhadas ano a ano e, ainda, durante determinada série escolar. Em contrapartida, as praxeologias paralelas só podem ser analisadas no ano pretendido. Já mostramos anteriormente (quadro 12) quais são os setores presentes nas séries iniciais: cada um deles será abordado paralelamente, enquanto seus temas aparecem de forma progressiva. O que queremos mostrar é de que forma esses setores relacionam-se com as quatro dimensões da álgebra apresentadas no CRMG (2019), expostas anteriormente. São elas:

- o desenvolvimento de uma linguagem;
- o estabelecimento de generalizações;
- a análise da interdependência de grandezas;
- a resolução de problemas.

Percebemos que todas essas dimensões são abordadas nas séries iniciais, com exceção daquela que prevê o desenvolvimento da linguagem algébrica. Os tópicos aparecem como a última instância construída para que se atinjam esses parâmetros. Assim, por meio do setor propriedades, por exemplo, espera-se que as praxeologias levem o aluno a generalizar, a perceber a interdependência das grandezas, a resolver problemas por meio do pensamento algébrico.

Notamos que, para atingir cada dimensão da álgebra, há dois caminhos possíveis, no sentido do que argumentamos anteriormente: isso se dá por meio de praxeologias paralelas ou sucessivas. O quadro 14 pretende mostrar esses caminhos que viemos identificando.

Quadro 14 – Praxeologias progressivas e paralelas para o domínio da álgebra nas séries iniciais



Fonte: Construção nossa, 2022.

Pela análise do quadro 14, identificamos quais são as praxeologias progressivas (expostas na horizontal) e paralelas (indicadas na vertical) que coexistem no domínio algébrico. Os temas do setor propriedades são trabalhados sucessivamente do 1º ao 5º ano. Portanto, espera-se que a noção de regularidade seja desenvolvida aí por meio das propriedades. Paralelamente, o setor sequência segue o mesmo caminho, do 1º ao 4º ano, de forma sucessiva também: padrões, regularidade e generalização têm, assim, um caminho progressivo. Percebemos, assim, que as seguintes dimensões da álgebra são exploradas até aqui:

- O estabelecimento de generalizações:
 - Ano: 1º ao 5º
 - Setores: propriedades, sequências, grandezas
- A análise da interdependência de grandezas:
 - Ano: 5º
 - Setor: grandezas
- A resolução de problemas:
 - Ano: 5º
 - Setor: grandezas

O objeto generalização é trabalhado, portanto, por meio de praxeologias sucessivas e paralelas. Nota-se, ainda, pela análise dos tópicos sugeridos, que a generalização não aparece de forma direta na abordagem deles. Ou seja, entendemos que o objeto aparece numa perspectiva a ser alcançada, num parâmetro maior. No 3º ano aparece o tópico “descrever uma regra de formação em sequências” (ver quadro 7), que entendemos ser um embrião para a generalização simbólica da álgebra. Talvez seja uma base para a dimensão algébrica que prevê o desenvolvimento de uma linguagem.

Além disso, estamos supondo que os verbos “compreender” e “concluir” pressupõem uma generalização de ideias pregressas. “Compreender a ideia de regularidade” (3º ano) aparece como um fechamento para praxeologias anteriores e um requisito para conhecimentos vindouros. E “concluir que a relação de igualdade permanece” também assume a mesma ideia.

Todas essas constatações mostram que o trabalho do professor é árduo e, ao mesmo tempo, de suma importância ao construir as demais praxeologias que pertencem a cada tópico. Ou seja, cada tópico do currículo pode ser analisado como uma praxeologia final dentre outras que são necessárias e que devem (ou deveriam) vir antes. É nesse momento que enxergamos uma pretensa liberdade do professor. Ainda que seu trabalho esteja constrangido ao que determina o CRMG, ele tem um papel mais ou menos livre ao construir praxeologias pregressas.

Outras considerações serão feitas, mas vamos, antes, proceder às análises das séries finais, 6º ao 9º ano. Pretende-se aplicar os mesmos passos utilizados nas séries iniciais e utilizar os modelos que viemos desenvolvendo até aqui. Os próximos quadros, 15 a 20, apresentam, assim, o organizador curricular previsto para esses anos.

Quadro 15 – Organizador curricular para álgebra no 6º ano do EF

6º ANO			
BIMESTRE	SETOR	OBJETOS DO CONHECIMENTO/TEMA	HABILIDADES/TÓPICOS
1º BIM	_____	_____	_____
2º BIM	Propriedades. Grandezas.	-Propriedades da igualdade. -Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.	(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas. (EF06MA15A) Resolver problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo. (EF06MA15B) Elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
3º BIM	_____	_____	_____
4º BIM	_____	_____	_____

Fonte: Construção nossa, 2022, adaptada de CRMG (2019).

Quadro 16 – Organizador curricular para álgebra no 7º ano do EF (Continua)

7º ANO			
BIMESTRE	SETOR	OBJETOS DO CONHECIMENTO/TEMA	HABILIDADES/TÓPICOS
1º BIM	_____	_____	_____
2º BIM	Expressões. Sequências numéricas. Sentenças algébricas. Função. Equação.	-Linguagem algébrica: variável e incógnita. -Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica. -Equações polinomiais do 1º grau.	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas. (EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes. (EF07MA18A) Resolver problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade. (EF07MA18B) Elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade. (EF07MA49MG) Reconhecer uma equação de primeiro grau e utilizá-la na modelagem de diferentes situações. (EF07MA50MG) Identificar a raiz de uma equação do primeiro grau. (EF07MA51MG) Resolver uma equação do primeiro grau.

Fonte: Construção nossa, 2022, adaptada de CRMG (2019).

Quadro 17 – Continuação do Organizador curricular para álgebra no 7º ano do EF

7º ANO (Continuação)			
BIMESTRE	SETOR	OBJETOS DO CONHECIMENTO/TEMA	HABILIDADES/TÓPICOS
3º BIM	Grandezas.	-Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.	(EF07MA17A) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas. (EF07MA17B) Elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas. (EF07MA46MG) Reconhecer a variação e dependência de grandezas para compreender a realidade. (EF07MA47MG) Identificar grandezas diretamente proporcionais. (EF07MA48MG) Identificar grandezas inversamente proporcionais.
4º BIM	_____	_____	_____

Fonte: Construção nossa, 2022, adaptada de CRMG (2019).

Quadro 48 – Organizador curricular para Álgebra no 8º ano do EF (Continua)

8º ANO			
BIMESTRE	SETOR	OBJETOS DO CONHECIMENTO/TEMA	HABILIDADES/TÓPICOS
1º BIM	Sequências numéricas. Expressões. Sentenças algébricas. Equação.	-Sequências recursivas e não recursivas. -Valor numérico de expressões algébricas. -Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano. -Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano.	(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes. (EF08MA06A) Resolver problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações. (EF08MA06B) Elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações. (EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano. (EF08MA08A) Resolver problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso. (EF08MA08B) Elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso. (EF08MA29MG) Reconhecer um sistema de duas equações lineares e utilizá-lo para modelar problemas. (EF08MA30MG) Identificar a(s) solução (ões) de um sistema de duas equações lineares. (EF08MA31MG) Resolver um sistema de equações do primeiro grau.
2º BIM	_____	_____	_____

Fonte: Construção nossa, 2022, adaptada de CRMG (2019).

Quadro 19 – Continuação do Organizador curricular para álgebra no 8º ano do EF

8º ANO (Continuação)			
BIMESTRE	SETOR	OBJETOS DO CONHECIMENTO/TEMA	HABILIDADES/TÓPICOS
3º BIM	Sequências numéricas. Expressões. Sentenças algébricas. Equação.	-Sequências recursivas e não recursivas. -Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. (EF08MA09A) Resolver, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. (EF08MA09B) Elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. (EF08MA32MG) Reconhecer uma equação de segundo grau do tipo $ax^2 = b$. (EF08MA33MG) Identificar a(s) raiz(izes) de uma equação do segundo grau do tipo $ax^2 = b$.
4º BIM	Grandezas.	-Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. (EF08MA13A) Resolver problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas. (EF08MA13B) Elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Fonte: Construção nossa, 2022, adaptada de CRMG (2019).

Quadro 20 – Organizador curricular para Álgebra no 9º ano do EF

9º ANO			
BIMESTRE	SETOR	OBJETOS DO CONHECIMENTO/TEMA	HABILIDADES/TÓPICOS
1º BIM	_____	_____	_____
2º BIM	Expressões. Sentenças algébricas. Equações. Grandezas. Funções.	-Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis. -Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações. -Razão entre grandezas de espécies diferentes. -Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais. -Funções: representações numérica, algébrica e gráfica.	(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau. (EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica. (EF09MA08A) Resolver problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas. (EF09MA08B) Elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas. (EF09MA06A) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica. (EF09MA06B) Utilizar o conceito de função para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
3º BIM	_____	_____	_____
4º BIM	_____	_____	_____

Fonte: Construção nossa, 2022, adaptada de CRMG (2019).

Fazendo a comparação em relação às outras unidades temáticas, na figura 17, percebe-se que, nos 6º e 9º anos, o domínio álgebra é abordado em um dos quatro bimestres. No 8º ano é quando ocorre uma frequência maior: três bimestres.

Figura 17 – Unidades temáticas por bimestre nas séries finais

6º ANO				
Unidade Temática / Bimestre	1º	2º	3º	4º
NÚMEROS	X	X	X	
ÁLGEBRA		X		
GEOMETRIA	X		X	
GRAND. E MEDIDAS			X	X
PROBAB. E ESTAT.				X

7º ANO				
Unidade Temática / Bimestre	1º	2º	3º	4º
NÚMEROS	X	X	X	
ÁLGEBRA		X	X	
GEOMETRIA	X		X	X
GRAND. E MEDIDAS				X
PROBAB. E ESTAT.				X

8º ANO				
Unidade Temática / Bimestre	1º	2º	3º	4º
NÚMEROS	X	X		
ÁLGEBRA	X		X	X
GEOMETRIA		X	X	
GRAND. E MEDIDAS			X	
PROBAB. E ESTAT.		X		X

9º ANO				
Unidade Temática / Bimestre	1º	2º	3º	4º
NÚMEROS	X			
ÁLGEBRA		X		
GEOMETRIA	X		X	X
GRAND. E MEDIDAS	X			X
PROBAB. E ESTAT.				X

Fonte: Construção nossa, 2022, baseada no CRMG (2019).

O domínio que mais aparece nas séries finais, se considerarmos um total de 16 bimestres nesses quatro anos, é geometria: dez vezes. O tema números vem logo em seguida: nove bimestres.

Já a álgebra é abordada em sete bimestres. Nos 7º e 8º anos, a ocorrência do domínio algébrico é maior. Contudo, apenas no 8º ano é quando a frequência algébrica, em relação ao número de bimestres, supera os outros domínios (quadro 21).

Quadro 21 - Abordagem da álgebra por bimestre e ano de escolaridade nas séries finais

		Ano de escolaridade			
		6º	7º	8º	9º
Bimestres	1º bi			X	
	2º bi	X	X		X
	3º bi		X	X	
	4º bi			X	

Fonte: Construção nossa, 2022.

Assim como fizemos nas análises das séries iniciais, passaremos ao estudo dos setores do organizador curricular que atende os anos finais do EF em Minas Gerais. Lembramos que, do 1º ao 5º ano, identificamos três setores para o domínio álgebra: propriedades, sequências numéricas e grandezas.

Nas séries finais, estão presentes os setes setores que identificamos. No quadro 22, apresentamos todos eles (e repetimos o que já foi mostrado nos anos iniciais, para uma análise longitudinal).

Quadro 22 – Setores para o domínio álgebra nas séries iniciais e finais

Setores	Ano de escolaridade								
	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º
Expressões							X	X	X
Propriedades	X	X	X	X	X	X			
Sequências numéricas	X	X	X	X			X	X	
Sentenças algébricas							X	X	X
Grandezas					X	X	X	X	X
Funções							X		X
Equações							X	X	X

Fonte: Construção nossa, 2022.

Por meio do quadro, percebemos que o 6º ano possui a mesma configuração do ano anterior no quesito setores: são abordados dois deles, propriedades e grandezas. No entanto, a partir daí, propriedades não é mais abordado. E aparece, pela primeira vez, expressões, sentenças algébricas, funções e equações. Vejamos agora quais temas derivam desses setores nas séries finais.

- Setor propriedades: aparece no 6º ano.
 - Propriedades da igualdade.
- Setor grandezas: abordado do 6º ao 9º.
 - Razão parte/todo.
 - Grandezas diretamente proporcionais e suas variações.
 - Grandezas inversamente proporcionais e suas variações.
- Setor expressões: este setor é mobilizado nos 7º, 8º e 9º anos.
 - Equivalência de expressões algébricas.
 - Valor numérico de expressões algébricas.
 - Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis.
- Setor sequências numéricas: aparece nos 7º, 8º e 9º anos.
 - Sequências recursivas e não recursivas.
- Setor sentenças algébricas: presente nos 7º, 8º e 9º anos.
 - Linguagem algébrica: variável e incógnita.
 - Expressões algébricas.
- Setor função: abordado nos 7º e 9º anos.
 - Diferença entre variável e incógnita por meio da relação entre grandezas.
 - Representação numérica, algébrica e gráfica de funções.
- Setor equação: aparece nos 7º, 8º e 9º anos.
 - Equação polinomial do 1º grau.
 - Equação do 1º grau e retas no plano cartesiano.
 - Sistemas de equações do 1º grau.
 - Equação polinomial do 2º grau.

Notamos que os setores propriedades e sequências numéricas são os que mais aparecem do 1º ao 9º ano: seis vezes em nove anos. Contudo, têm abordagem maior nas séries iniciais. São esses dois setores que parecem cumprir uma função de base

na abordagem algébrica, aqueles que trabalham as ideias básicas. Os temas que acompanham esses dois setores até as séries finais são:

- sequências recursivas;
- padrões;
- regularidades;
- propriedades da adição e da igualdade.

Recuperando alguns objetivos para o ensino da álgebra que foram mostrados no início deste capítulo, percebe-se que os setores e temas comungam das expectativas expostas pelo CRMG¹⁴⁹.

Para os anos iniciais, é previsto o trabalho com ideias: regularidade, generalização e propriedades da igualdade. Constatamos essas noções nas análises que fizemos e repetimos o que já foi colocado: o objeto generalização é trabalhado, nas séries iniciais, por meio de praxeologias sucessivas (num mesmo setor) e paralelas (em setores diferentes).

Já nos anos finais, os objetos não ostensivos reconhecidos e que dão origem aos objetivos gerais para o domínio álgebra são¹⁵⁰:

- variação;
- generalizações;
- regularidades;
- variáveis;
- incógnitas.

Já pontuamos, também, que nesses objetivos gerais previstos, há aquele relacionado à aquisição da linguagem algébrica: “indicar o valor desconhecido em uma sentença algébrica”. Nesse caso, “valor desconhecido” e “sentença algébrica” estão no campo dos objetos ostensivos.

Cumprindo nosso intento de investigar o caminho da generalização no currículo mineiro, nota-se que ela aparece de maneira mais explícita em um dos objetivos gerais para a unidade temática álgebra (“Estabelecer generalizações de propriedades”), em

¹⁴⁹ Cabe lembrar que foi a partir desses objetivos gerais que extraímos os setores presentes no domínio álgebra já que, no CRMG, aparecem os temas e domínios. O setor, portanto, é construção nossa.

¹⁵⁰Ver Quadro 3.

seguida habita os setores de forma implícita e surge nos temas a serem trabalhados por meio de praxeologias sucessivas e paralelas. Esta conclusão, à maneira do que foi feito nas séries iniciais, também vem da análise dos verbos que aparecem nos tópicos das séries finais.

Antes de passarmos a essas análises, vamos pontuar que o estudo desses tópicos tem-nos feito conjecturar que a análise praxeológica do CRMG vai permitir identificar com mais clareza como se comporta o objeto generalização – se aparece como ostensivo, não ostensivo, se tem caráter de objeto manipulável ou de processo. Na próxima seção, traremos essas considerações.

Os próximos quadros mostram, agora, os tópicos previstos para as séries finais organizados por meio dos verbos que o acompanham. Assim, completaremos a análise ecológica do CRMG.

Quadro 23 - Tópicos para o domínio álgebra nas séries finais (Continua)

VERBOS	ANO DE ESCOLARIDADE			
	6º	7º	8º	9º
RECONHECER	A inalterabilidade da relação de igualdade.	A equivalência de duas expressões algébricas. Equações de 1º grau. Variação e dependência entre grandezas.	Sistema de duas equações lineares. Equação do 2º grau, tipo $ax^2=b$.	
RESOLVER	Problemas que envolvam razão parte/todo.	Equações do 1º grau. Problemas com equações do 1º grau. Problemas com proporcionalidade direta e indireta.	Problemas com valor numérico de expressões algébricas. Problemas com sistemas de equações. Um sistema de duas equações lineares. Problemas com equações do 2º grau, tipo $ax^2=b$. Problemas com grandezas direta ou indiretamente proporcionais.	Problemas com duas grandezas de espécies diferentes. Problemas com grandezas direta ou indiretamente proporcionais.
ELABORAR	Problemas que envolvam razão parte/todo.	Problemas com equações do 1º grau. Problemas com proporcionalidade direta e indireta.	Problemas com valor numérico de expressões algébricas. Problemas com valor numérico de expressões algébricas. Problemas com equações do 2º grau, tipo $ax^2=b$. Problemas com grandezas direta ou indiretamente proporcionais.	Problemas que possam ser representados por equações do 2º grau. Problemas com grandezas direta ou indiretamente proporcionais.
COMPREENDER		A ideia de variável.		Processos de fatoração de expressões algébricas. O conceito de função.

Fonte: Construção nossa, 2022.

Quadro 24 – Continuação dos Tópicos para o domínio álgebra nas séries finais

VERBOS	ANO DE ESCOLARIDADE			
	6º	7º	8º	9º
CLASSIFICAR		Sequências recursivas e não recursivas.		
UTILIZAR		Simbologia algébrica em regularidades. Equações de 1º grau em situações de modelagem.	Sentença algébrica para expressar a variação entre grandezas.	
IDENTIFICAR		A raiz de uma equação do 1º grau. Grandezas direta e inversamente proporcionais.	Regularidade em sequências numéricas recursivas. A solução de um sistema de duas equações lineares. A raiz da equação do 2º grau, tipo $ax^2=b$. A variação de duas grandezas.	
CONSTRUIR			Algoritmos para indicar os próximos números de sequências recursivas.	
ASSOCIAR			Equação do 1º grau com duas incógnitas a uma reta.	

Fonte: Construção nossa, 2022.

O que chama a atenção, numa breve análise dos tópicos previstos, é a concentração de um grande número de verbos nos 7º e 8º anos. São nesses anos que aparecem, com ênfase maior, os temas relacionados à aquisição da linguagem algébrica e mais focados nos setores expressões, sentenças algébricas e equações¹⁵¹.

Relacionando esses tópicos com as quatro dimensões previstas para a álgebra no CRMG, nota-se que todas são abordadas:

- o desenvolvimento de uma linguagem;
- o estabelecimento de generalizações;
- a análise da interdependência de grandezas;
- a resolução de problemas.

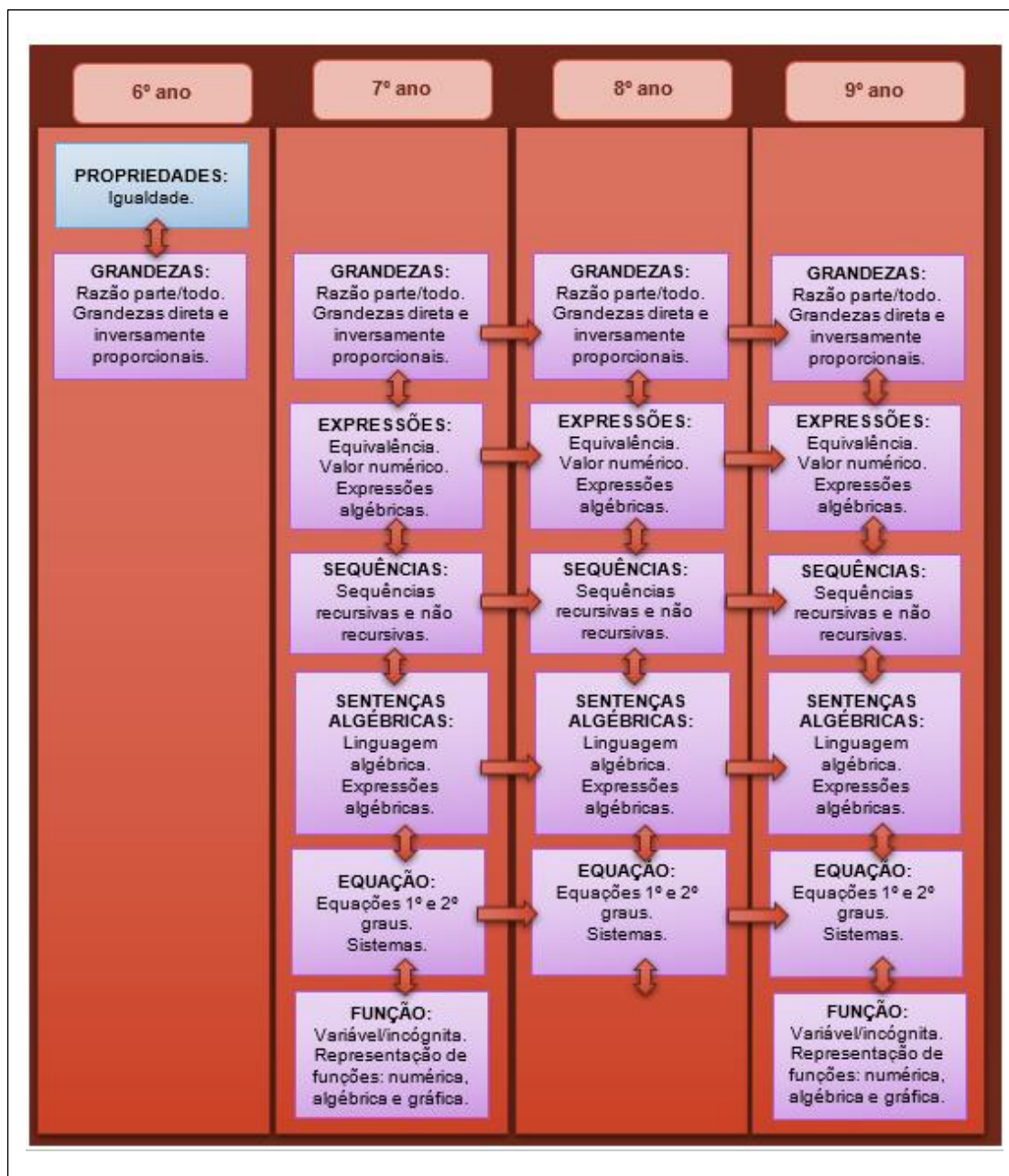
Seguindo, agora, o intuito de utilizar as noções discutidas aqui, anteriormente, passamos às considerações sobre as praxeologias sucessivas e paralelas nas séries finais. Desenvolvemos a ideia de que os setores englobam aquelas que são paralelas e podem ser construídas/observadas durante o ano escolar considerado e em setores distintos. As praxeologias sucessivas podem ser construídas/observadas de ano a ano e, ainda, dentro do próprio setor.

O quadro 25 mostra essas praxeologias do 6º ao 9º ano à maneira do que fizemos nas séries iniciais (quadro 14). O quadro permite visualizar de que forma as praxeologias estão distribuídas nessas séries. São sete setores no total, contudo, no 6º ano são mobilizados dois deles: propriedades e grandezas. No 7º e no 9º não aparece o setor propriedades (portanto, estão seis presentes) e no 8º ano não ocorrem propriedades e função, num total de cinco setores abordados nessa série.

Estamos considerando que cada setor desenvolve um aspecto ligado à álgebra, já que eles estão relacionados aos objetivos gerais para este domínio, como já foi visto. Para tanto, são previstas praxeologias paralelas, que podem ser trabalhadas concomitantemente a outras, de outros setores.

¹⁵¹ Não consideramos o setor funções como responsável pela aquisição da linguagem algébrica. Ao contrário, a nosso ver, a função seria uma instância a ser alcançada e que só pode ser manipulada por meio da linguagem simbólica (que, pressupõe-se, já teria sido adquirida).

Quadro 25 - Praxeologias progressivas e paralelas para o domínio da álgebra nas séries finais



Fonte: Construção nossa, 2022.

Dos sete setores, quadro 25, notamos que três deles possuem objetos e tópicos relacionados à aquisição da linguagem algébrica, com ênfase no trabalho com os símbolos: expressões, sentenças algébricas e equações. O setor função é aquele que aparece no 7º ano com foco no trabalho com a ideia de variável, e retorna no 9º ano, já com expectativas de trabalho com toda a potencialidade que o instrumento permite,

inclusive nas três diferentes formas de representação: numérica; algébrica e gráfica. Ou seja, é esperado que o setor função consolide e utilize todas as habilidades pregressas.

O setor grandezas também é trabalhado progressivamente numa perspectiva cada vez mais abrangente no que diz respeito à utilização dos símbolos algébricos. E o setor sequência segue o mesmo parâmetro: o esperado é que o aluno generalize e até mesmo construa algoritmos e leis matemáticas que possam descrever as séries numéricas. Vamos condensar no quadro 26 essas constatações a respeito da característica dos setores quanto à linguagem algébrica abordada tanto nas séries iniciais e finais (ele complementa o quadro 22).

Quadro 26 – Setores e tipo de linguagem algébrica

SETOR	SÉRIES INICIAIS	SÉRIES FINAIS	Linguagem
PROPRIEDADES	X	X	Linguagem pré-algébrica
GRANDEZAS	X	X	Linguagem pré-algébrica
SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS	X	X	Linguagem pré-algébrica
EXPRESSÕES		X	Linguagem simbólica/algébrica
SENTENÇAS ALGÉBRICAS		X	Linguagem simbólica/algébrica
EQUAÇÃO		X	Linguagem simbólica/algébrica
FUNÇÃO		X	Linguagem simbólica/algébrica

Fonte: Construção nossa, 2022.

É importante considerar que, embora os setores propriedades, grandezas e sequências numéricas abordem uma linguagem pré-algébrica, conforme apontado no quadro anterior, notamos que seus temas apresentam uma perspectiva de ampliação no seu escopo. Assim, no 9º ano aparece o seguinte tópico, no setor grandezas: “Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica”. Ou seja, nesse momento é esperado que o aluno utilize uma linguagem simbólica. Isso se dá, conforme já constatamos, pela coexistência de praxeologias paralelas.

Dessa forma, o setor grandezas espera que, paralelamente, seja trabalhada a aquisição da linguagem simbólica em setores vizinhos. Ao mesmo tempo, por meio das praxeologias progressivas, neste setor grandezas, é possível que o aluno amplie

seus conhecimentos partindo, por exemplo, do tópico: “Concluir que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência”, no 5º ano; para “Resolver problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas”, no 9º ano.

Com relação às dimensões da álgebra, seguem os anos e os setores em que são abordadas.

- O desenvolvimento de uma linguagem
 - Ano: 7º ao 9º
 - Setores: expressões, sentenças algébricas, equação
- O estabelecimento de generalizações
 - Ano: 7º ao 9º
 - Setores: expressões, sequências, sentenças algébricas, equação, função
- A análise da interdependência de grandezas
 - Ano: 6º ao 9º
 - Setores: grandezas
- A resolução de problemas
 - Ano: 6º ao 9º
 - Setores: grandezas, expressões, sequências, sentenças algébricas, equação, função

Nota-se que o objeto generalização, nas séries finais, também aparece como um processo, ou seja, como o meio para se chegar a determinado ponto. A dimensão algébrica “estabelecer generalização” pressupõe que o aluno generalize, que ele chegue à determinada conclusão, que feche um processo. Ora, pela análise que viemos fazendo até aqui, todo o currículo foi construído nessa perspectiva. Como o intento deste estudo é focar na generalização algébrica, entendemos que, até este momento, o CRMG forneceu os setores, temas e tópicos para que o professor desenvolva suas praxeologias. E o que foi constatado até aqui é que há duas maneiras

para que o docente percorra esse caminho: por meio de praxeologias paralelas e progressivas.

Para encerrar esta seção, vamos explorar um pouco mais o comportamento das praxeologias focando especificamente nos verbos que acompanham os tópicos. Conforme já mostramos, o organizador curricular de Minas Gerais é apresentado por meio de verbos, os quais estamos tratando como tópicos, pela escala de codeterminação de Chevallard (2002a).

Nesse sentido, fizemos uma análise das praxeologias que vão do 1º ao 9º ano por meio desses verbos que tipificam os tópicos. Sempre levando em conta o percurso dos objetos que vão desde o setor até o tópico, percebemos que as praxeologias neste último degrau da escala podem ser divididas em três tipos, os quais vamos chamar de: iniciais, intermediárias e finais. Vamos começar com os verbos/tópicos que aparecem apenas nas séries iniciais: quadro 27.

Para esta análise, separamos todos os verbos que aparecem apenas do 1º ao 5º ano. Percebe-se um padrão geral nessas orientações. Pelo quadro, vê-se que cinco verbos tipificam os tópicos. Isso não significa que há cinco praxeologias, pois um mesmo verbo aparece orientando outras distintas.

Mas, notamos que é possível classificar essas praxeologias nos três tipos: iniciais, intermediárias e praxeologias finais. As iniciais são aquelas que têm por objetivo apresentar o tema ao aluno. Contudo, não é esperado que o tema seja de todo inédito: nas séries finais, há praxeologias iniciais que utilizam técnicas já abordadas, por exemplo. Essa classificação permite enxergar de uma maneira mais ampla como os objetos se comportam: partiram de que ponto para chegar a algum lugar. Dessa forma, notamos que, nas séries iniciais, há um trabalho com as ideias gerais da álgebra, conforme vem sendo mostrado.

Quadro 27 – Praxeologia exclusiva das séries iniciais

SÉRIES INICIAIS		
VERBOS	PRAXEOLOGIAS	
COMPARAR	PRAXEOLOGIA INICIAL	• IDEIAS/NOÇÕES de ATRIBUTOS
ORGANIZAR	PRAXEOLOGIA INICIAL	• IDEIAS/NOÇÕES de ATRIBUTOS
DESCREVER	PRAXEOLOGIA INICIAL	• PADRÕES • REGULARIDADES
DETERMINAR	PRAXEOLOGIA INTERMEDIÁRIA	• NÚMERO DESCONHECIDO (operações básicas)
CONCLUIR	PRAXEOLOGIA FINAL	• PERMANÊNCIA NAS RELAÇÕES DE IGUALDADE

Fonte: Construção nossa, 2022.

Assim, o aluno parte seu estudo da álgebra pela comparação, organização e descrição de atributos (verbos que aparecem nos 1º e 2º anos). A ideia é que apareça aí a noção de regularidade observando os padrões, que ele generalize alguns aspectos das sequências. A generalização é, então, uma noção passível de ser acessada, evocada. Portanto, nesse momento, entendemos que ela está sendo construída como um objeto institucional, ou seja, o estudante vai observando que “é assim que se faz”, embora ele já possa ter utilizado a generalização em vários momentos da sua vida. Mas, para a escola, ela está sendo constituída como um objeto validado.

Como praxeologia intermediária, identificamos as praxeologias do tipo “determinar”, que aparecem no 4º ano. Vê-se que já há uma expectativa para que o aluno mostre o número desconhecido. Portanto, outras noções já precisam estar sedimentadas: a noção de igualdade, de sequência. E, na praxeologia final, aparece o verbo “concluir”, já no 5º ano: concluir que a relação de igualdade permanece. Concluir significa, entre outras coisas, entender, perceber, constatar. De fato, só é

capaz de concluir aquele que já percebeu certos padrões, certos comportamentos. A nosso ver, concluir é generalizar sobre. Portanto, a generalização aparece aí dando termo a um processo, firmando ideias.

Com isso, notamos que as praxeologias exclusivas das séries iniciais são aquelas que constroem o objeto institucional generalização e que utilizam esse objeto para construir a ideia de regularidade, identificar padrões e a noção de equivalência.

Por ocasião da exposição teórica deste trabalho, já foi colocado que, na TAD, os objetos são entes que precisam ser reconhecidos pela instituição e que, de alguma forma, estabelecem uma relação com ela e com o sujeito. Nota-se aqui, portanto, que o objeto generalização é reconhecido, no campo algébrico, por meio do trabalho com regularidades, em primeiro lugar. Isso se dá a partir da observação de sequências e padrões.

Explorando um pouco mais a noção de ostensivos e não ostensivos nesse momento, Chevallard (1994a) mostra que os ostensivos discursivos são essenciais na atividade humana. Vale lembrar que, no trabalho com observação de sequências e regularidades, esse tipo de ostensivo assume papel preponderante. O professor, por meio de suas palavras e orientação, questiona e direciona o aluno para que venham à tona as características daquela série pretendida. Portanto, a generalização pode ser manipulada por meio de discursos, de palavras, mas também por meio de desenhos e esquemas que se façam necessários para a compreensão do aluno.

Assim, no tópico do 1º ano, “Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras”, é esperado que o aluno reconheça o padrão em primeiro lugar para, em seguida, apontar o elemento ausente. Essa atividade só pode ser resolvida por meio dos ostensivos: linguagem oral, gestos e sequências. Os não ostensivos, aqueles que serão evocados, acessados por meio dos ostensivos, são a generalização do padrão e a regularidade.

Essas ideias são colocadas para evidenciar o que Bosch e Chevallard (1999) chamam de ambivalência ostensivos-não ostensivos e a impossibilidade (ou equívoco) de se querer focar a atenção na exclusividade de um ou outro, visto que toda a atividade matemática se resume na coativação de ambos os objetos. Os

autores mostram que tanto ostensivos quanto não ostensivos servem para explicar e justificar o que fazemos. Além disso, ao falarmos de gênese dos objetos, “[...] pode-se dizer que os ostensivos e não ostensivos **emergem juntos** na práxis humana, que estão **emergindo** dessa prática, sem serem capazes de estabelecer *a priori* a relação de prioridade que teriam em relação ao outro” (BOSCH, CHEVALLARD, 1999, p. 13, grifo dos autores, tradução nossa¹⁵²). De fato, até aqui se tem notado que “o estabelecimento de generalizações” é uma dimensão a ser alcançada por meio de objetos que são manipulados e/ou são acessados no campo das noções.

Portanto, estamos entendendo que o objeto generalização possui características que o colocam no campo tanto dos ostensivos quanto dos não ostensivos. Ele parece ser abordado à maneira de um processo dialético: sua noção é construída por meio do trabalho com regularidades e padrões, e, ao mesmo tempo, essas noções são sedimentadas pela própria ideia da generalização. Um processo que o qualifica à maneira do que foi pontuado anteriormente por Bosch e Chevallard (1999): o trabalho com a generalização permite – e exige – a coativação conjunta de registros e noções, de gestos e ideias, de materialidade e de conceitos.

Vamos analisar, agora, os verbos/tópicos que aparecem tanto nas séries iniciais quanto finais. Dividimos em três quadros, para auxiliar na visualização. Os quadros 28 e 29 mostram as praxeologias intermediárias. E o quadro 30 traz as praxeologias finais, todas trabalhadas em conjunto do 1º ao 9º ano do EF.

Os verbos que aparecem na praxeologia intermediária são: resolver, construir, identificar e elaborar. Chamamos de intermediária, pois enxergamos um processo, um progresso no trabalho com as ideias. Assim, há uma espécie de continuação das praxeologias iniciais. Como já visto, os objetos construídos no âmbito algébrico são aqueles ligados à noção de regularidade. Então, há um progresso que percorre não só os anos iniciais como também os finais. Portanto, algumas ideias são “concluídas” nas primeiras séries (a noção de igualdade) enquanto outras mantêm seu curso nos anos finais: a noção de regularidade é utilizada nos anos finais para que os alunos

¹⁵² On peut dire que les ostensifs et les non-ostensifs *émergent ensemble* dans la praxis humaine, qu'ils *sont des émergents* de cette praxis, sans qu'on puisse établir *a priori* d'antériorité des uns par rapport aux autres.

construam seu próprio algoritmo para estudar determinada sequência. Entendemos que “resolver” é um processo intermediário, que está entre uma ideia inicial, já construída, e um conceito mais amplo a ser alcançado (quadro 28).

Quadro 28 – Praxeologia em conjunto nas séries iniciais e finais (Continua)

SÉRIES INICIAIS E FINAIS		
VERBOS	PRAXEOLOGIAS	
RESOLVER	PRAXEOLOGIA INTERMEDIÁRIA	- ANOS INICIAIS • PROBLEMAS: TERMO DESCONHECIDO • PROBLEMAS: PROPORCIONALIDADE • PROBLEMAS: RAZÃO PARTE/TODO - ANOS FINAIS • PROBLEMAS: RAZÃO PARTE/TODO • EQUAÇÕES • PROBLEMAS: EQUAÇÕES • PROBLEMAS: EXPRESSÕES ALGÉBRICAS • SISTEMAS • PROBLEMAS: SISTEMAS • PROBLEMAS: PROPORCIONALIDADE
		- ANOS INICIAIS • SEQUÊNCIAS (regularidade) - ANOS FINAIS • ALGORITMOS: SEQUÊNCIAS RECURSIVAS
CONSTRUIR	PRAXEOLOGIA INTERMEDIÁRIA	

Fonte: Construção nossa, 2022.

No quadro anterior, 28, notamos que os alunos são levados a resolver problemas sobre a maioria dos tópicos: termo desconhecido, proporcionalidade, razão, equações, sistemas. Além disso, é esperado que construam suas próprias sequências envolvendo regularidades. Já no quadro 29, mostramos que o verbo

“identificar” também está relacionado a vários conteúdos. É esperado, ainda, que eles possam elaborar seus próprios problemas, à maneira do que foram levados a resolver.

Quadro 29 – Praxeologia em conjunto nas séries iniciais e finais (Continua)

SÉRIES INICIAIS E FINAIS		
VERBOS	PRAXEOLOGIAS	
IDENTIFICAR	PRAXEOLOGIA INTERMEDIÁRIA	- ANOS INICIAIS REGULARIDADE: SEQUÊNCIAS RECURSIVAS
		- ANOS FINAIS - RAIZ DAS EQUAÇÕES - GRANDEZAS PROPORCIONAIS - REGULARIDADE: SEQUÊNCIAS RECURSIVAS - SOLUÇÃO DE SISTEMAS - VARIAÇÃO ENTRE GRANDEZAS
ELABORAR	PRAXEOLOGIA INTERMEDIÁRIA	- ANOS INICIAIS - PROBLEMAS: TERMO DESCONHECIDO - PROBLEMAS: PROPORCIONALIDADE - PROBLEMAS: RAZÃO PARTE/TODO
		- ANOS FINAIS - PROBLEMAS: RAZÃO PARTE/TODO - EQUAÇÕES - PROBLEMAS: EQUAÇÕES - PROBLEMAS: EXPRESSÕES ALGÉBRICAS - SISTEMAS - PROBLEMAS: SISTEMAS - PROBLEMAS: PROPORCIONALIDADE

Fonte: Construção nossa, 2022.

Na praxeologia final (quadro 30) aparecem os verbos: compreender e reconhecer. Julgamos que eles estão relacionados ao final de um processo. Sempre

lembrando que são praxeologias que pertencem tanto aos anos iniciais quanto finais. É interessante observar que elas pretendem fechar um processo. Portanto, as praxeologias finais são uma boa ferramenta de análise daquilo que foi construído antes. Nas séries iniciais, os alunos devem compreender a ideia de regularidade e reconhecê-las, também. Já foi mostrado, anteriormente, que essa noção está na gênese dos objetos algébricos reconhecidos institucionalmente.

Quadro 30 – Continuação da Praxeologia em conjunto nas séries iniciais e finais

SÉRIES INICIAIS E FINAIS		
VERBOS	PRAXEOLOGIAS	
COMPREENDER	PRAXEOLOGIA FINAL	- ANOS INICIAIS • IDEIA DE REGULARIDADE - ANOS FINAIS • IDEIA DE VARIÁVEL • PROCESSO DE FATORAÇÃO • CONCEITO DE FUNÇÃO
RECONHECER	PRAXEOLOGIA FINAL	- ANOS INICIAIS • REGULARIDADE EM RELAÇÕES - ANOS FINAIS • REGULARIDADE EM RELAÇÕES • EXPRESSÕES ALGÉBRICAS • EQUAÇÕES • VARIAÇÃO • DEPENDÊNCIA • SISTEMAS

Fonte: Construção nossa, 2022.

A partir daí, nos anos finais, os alunos devem compreender variável, fatoração e função. Para isso, precisam reconhecer regularidades, expressões algébricas,

variação, equação, dependências e sistemas – muitos tópicos ligados à aquisição da linguagem algébrica. Vamos, ainda, apresentar as praxeologias exclusivas dos anos finais, mas já adiantamos que são apenas 3. Portanto, entendemos que a maioria dos verbos são trabalhados em conjunto com as séries iniciais. Isso indica uma expectativa de processo amplo e construído em longo prazo.

Finalmente, exclusivamente nas séries finais, encontramos os seguintes verbos: classificar, associar e utilizar (quadro 31). Pode-se identificar as três praxeologias presentes: entendemos que classificar uma sequência é inicial e, a partir daí, tem-se a associação no meio do processo e a utilização dos conceitos como uma praxeologia final. Esse verbo parece complementar o que foi mostrado anteriormente a respeito das outras praxeologias finais. A diferença, aqui, é que o verbo “utilizar” aparece, exclusivamente, nos anos finais.

Quadro 31 – Praxeologia exclusiva das séries finais

SÉRIES FINAIS		
VERBOS	PRAXEOLOGIAS	
CLASSIFICAR	PRAXEOLOGIA INICIAL	• SEQUÊNCIAS RECURSIVAS E NÃO RECURSIVAS
ASSOCIAR	PRAXEOLOGIA INTERMEDIÁRIA	• EQUAÇÃO COM DUAS INCÓGNITAS A UMA RETA
UTILIZAR	PRAXEOLOGIA FINAL	• SÍMBOLOS ALGÉBRICOS EM REGULARIDADES • EQUAÇÕES EM MODELAGEM • SENTENÇA ALGÉBRICA PARA VARIAÇÃO TERRE GRANDEZAS

Fonte: Construção nossa, 2022.

A análise desses três tipos de praxeologia nos auxiliam na indicação do *topos* do aluno e do professor. O *topos* do docente engloba todos os papéis que pertencem a ele. Entendemos que a análise praxeológica do CRMG também auxiliará nesse sentido, mas já é possível perceber que nem sempre cabe ao mesmo professor desenvolver todas as praxeologias ligadas à álgebra. Portanto, é um lugar importante a ser analisado. Assim, o professor encarregado das praxeologias finais pode precisar recuperar tópicos antigos. Além disso, é esperado que esse professor tenha conhecimento daquilo que foi trabalhado anteriormente.

A respeito do *topos* do aluno, é conveniente lembrar o trabalho autônomo que muitas vezes ele desenvolve à revelia do professor. Chevallard (1998) alerta que o próprio aluno é seu diretor de estudos várias vezes. E pela análise das três praxeologias, percebe-se que as praxeologias finais são aquelas mais suscetíveis de que isso ocorra, já que, conforme dissemos, pode haver conhecimentos anteriores não consolidados ou uma má gestão decente ao não perceber que praxeologias anteriores são necessárias.

Estes últimos quadros nos permitem, ainda, identificar quais são os temas trabalhados nas séries iniciais e finais. Aparece, apenas de 1º ao 5º ano, o tema seguinte:

- relações de igualdade.

São temas trabalhados tanto nas séries iniciais quanto finais:

- sequências;
- padrões;
- regularidades;
- razão/proporção/grandezas.

Temas exclusivos dos anos finais:

- equações;
- sistemas;
- expressões algébricas;
- função.

Vamos notando que boa parte das ideias fundamentais do campo da álgebra abrange os tópicos do 1º ao 9º ano, e que, nos anos finais, há a introdução do símbolo

e manipulação algébrica. Analisando sob o prisma dos ostensivos e não ostensivos, podemos afirmar que os não ostensivos ligados às noções de regularidade e generalização percorrem boa parte do EF enquanto os ostensivos que vêm da manipulação simbólica ditam os temas dos anos finais.

Já foi colocado que essa classificação em ostensivos e não ostensivos não é tão preponderante quanto ao fato de esses objetos trabalharem juntos. Chevallard (1994a) fornece um exemplo: tanto a noção de equivalência quanto seu sinal são desenvolvidos juntos, de forma que há uma dialética descrevendo tanto o sinal quanto seu emprego. Com isso, estamos querendo desenvolver a ideia de que o objeto generalização permite esse duplo emprego: como uma noção e como um registro, conforme já abordamos anteriormente. Vejamos:

Há uma generalização relacionada ao campo das noções quando empregamos os verbos¹⁵³:

- comparar;
- organizar;
- concluir;
- identificar;
- compreender;
- reconhecer;
- classificar;
- associar.

De fato, para organizar uma sequência, é preciso considerar determinados atributos, generalizar um padrão. Da mesma forma, para concluir que a relação de igualdade permanece, é necessária uma generalização a respeito. Assim, todos esses verbos se comportam dessa forma. Em contrapartida, há uma generalização no sentido do registro, da manipulação, quando aparecem os verbos:

- descrever;
- determinar;

¹⁵³ Os verbos são colocados na ordem em aparecem nos quadros 27 a 31.

- resolver;
- construir;
- elaborar;
- utilizar.

De fato, Bosch e Chevallard (1999) alertam que não se deve relacionar objetos ostensivos à percepção aos sentidos, ou seja, à manipulação direta. O fato é que eles são uma construção institucional. O que importa, segundo os autores, é focar na união entre ostensivos e não ostensivos. Além disso, a ênfase em um desses elementos pode levar à busca pela compreensão em detrimento da atividade ou, inversamente, destacar apenas o momento do fazer, enfraquecendo o lado conceitual. Nas palavras dos autores:

[...] a análise do papel dos não ostensivos como condições para a manipulação dos ostensivos parece ambivalente. Pode levar tanto a dar primazia aos não ostensivos, como se a "administração ostensiva" deva necessariamente seguir, ou a dar primazia aos ostensivos, como se o condicionamento por objetos não ostensivos pudesse ser considerado não essencial. O primeiro caso corresponde, em termos de ensino, à ênfase na "compreensão" em detrimento da própria atividade; o segundo caso, ao destaque dos elementos ostensivos que bastam ao "fazer" – com um correlato enfraquecimento dos aspectos "conceituais" que deveriam permitir compreender e controlar esse fazer (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 12, tradução nossa¹⁵⁴).

Com isso, vamos dizer que o domínio algébrico lida com o campo das noções por meio da manipulação de outros objetos e que, pela análise que viemos fazendo até aqui, a generalização parece estar situada neste movimento que vai ora do manipular generalizando, ora do evocar a noção para que outras generalizações sejam feitas. Enxergamos a generalização, portanto, ora como instrumento, ora como processo.

¹⁵⁴ [...] du rôle des non-ostensifs comme conditions de la manipulation d'ostensifs apparaît ce pendant ambivalente. Elle peut conduire, soit à donner le primataux non-ostensifs, comme si «l'intendance ostensive» devait nécessairement suivre, soit à donner le primataux ostensifs, comme si le conditionnement par des objets non ostensifs pouvait être le plus essentiel. Le premier cas correspond, en matière d'enseignement, à la mise en avant de la «compréhension» au détriment de l'activité elle-même; le second cas, à la mise en avant des éléments ostensifs qui suffisent à «faire» – avec un affaiblissement corrélatif des aspects «conceptuels» supposés permettre de comprendre et de contrôler ce faire.

Parece que os verbos ligados ao registro e à manipulação utilizam a generalização como instrumento: é por meio dela que as tarefas são cumpridas. Ainda assim, o ostensivo do registro será sempre uma expressão, equação ou mesmo uma sequência, de forma que não é possível “enxergar” o objeto generalização. Ela parece se comportar como um ostensivo por contribuir na manipulação dos símbolos escritos. Isso não é, de forma alguma, taxativo, dada a dificuldade mostrada pelos próprios autores Bosch e Chevallard (1999) anteriormente. Além disso, precisamos reiterar: não é a classificação dos objetos o mais preponderante, mas o fato de eles trabalharem de forma conjunta.

Assim, construímos, com o auxílio da noção de objetos ostensivos e não ostensivos, a ideia de que a generalização pode ser trabalhada por meio da manipulação de outros objetos e, ainda, estar no campo das noções ao ser evocada na compreensão e conclusão dos tópicos. Fechando esta seção, cabe lembrar que o intuito aqui foi desenvolver as ideias condensadas em duas partes principais:

- identificar os conhecimentos naturalizados e os objetos ostensivos e não ostensivos que são reconhecidos pela instituição no campo da álgebra;
- analisar como é o sujeito bom previsto pela instituição; o *topos* do aluno.

Lembrando que o sujeito bom é aquele que cumpre a relação institucional $R_1(p, O)$ esperada pela escola. Portanto, trata-se dos tópicos e temas expostos até aqui. São essas as relações esperadas pelo currículo mineiro.

Aqui encerra-se a abordagem ecológica do CRMG. Acreditamos ter conseguido localizar o objeto generalização no currículo, mostrando como ele chega à sala de aula e em quais temas pode ser abordado.

A próxima seção complementa esta, porém estaremos mais focados nos elementos da praxeologia e das organizações didáticas que permeiam o currículo. A ideia é analisar o objeto generalização por meio do modelo praxeológico.

5.2.2 Análise praxeológica do Currículo Referência de Matemática para Minas Gerais

A análise ecológica do CRMG permitiu identificar que o *habitat* do objeto generalização é amplo e compreende os sete setores identificados para o domínio da

álgebra. Construiu-se a ideia de que há praxeologias paralelas e sucessivas permeando toda a escala de codeterminação didática que vai dos setores aos tópicos. Argumentou-se, ainda, que a generalização pode ser analisada tanto do ponto de vista do objeto ostensivo como do não ostensivo. E, nesse sentido, pode-se enxergá-la de dois modos: como um ente a ser manipulado ou como noção a ser evocada.

A análise praxeológica, neste momento, vai nos permitir compreender como se comporta o objeto generalização nessas praxeologias paralelas e sucessivas. Na seção anterior, identificamos que o domínio álgebra é abordado no Ensino Fundamental de Minas Gerais por meio de nove temas:

- relações de igualdade;
- sequências;
- padrões;
- regularidades;
- razão/proporção/grandezas;
- equações;
- sistemas;
- expressões algébricas;
- função.

Vamos relacionar as quatro dimensões da álgebra e os sete setores para esse domínio identificado aqui. Vejamos o quadro 32, na próxima página.

Quadro 32 - Dimensões da álgebra e setores previstos no domínio algébrico

		AS QUATRO DIMENSÕES DA ÁLGEBRA			
SETOR/ SÉRIE		Estabelecimento de generalizações	Análise da interdependência de grandezas	Resolução de problemas	Desenvolvimento de uma linguagem
PROPRIEDADES	1º	1º			
	2º	2º			
	3º	3º			
	4º	4º			
	5º	5º			
	6º				
	7º				
	8º				
	9º				
GRANDEZAS	1º	1º			
	2º	2º			
	3º	3º			
	4º	4º			
	5º	5º	5º	5º	
	6º		6º	6º	
	7º		7º	7º	
	8º		8º	8º	
	9º		9º	9º	
SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS	1º	1º			
	2º	2º			
	3º	3º			
	4º	4º			
	5º	5º		5º	
	6º			6º	
	7º	7º		7º	
	8º	8º		8º	
	9º	9º		9º	
EXPRESSÕES	1º				
	2º				
	3º				
	4º				
	5º			5º	
	6º			6º	
	7º	7º		7º	7º
	8º	8º		8º	8º
	9º	9º		9º	9º
SENTENÇAS ALGÉBRICAS	1º				
	2º				
	3º				
	4º				
	5º			5º	
	6º			6º	
	7º	7º		7º	7º
	8º	8º		8º	8º
	9º	9º		9º	9º
EQUAÇÃO	1º				
	2º				
	3º				
	4º				
	5º			5º	
	6º			6º	
	7º	7º		7º	7º
	8º	8º		8º	8º
	9º	9º		9º	9º
FUNÇÃO	1º				
	2º				
	3º				
	4º				
	5º			5º	
	6º			6º	
	7º	7º		7º	
	8º	8º		8º	
	9º	9º		9º	

Fonte: Construção nossa, 2022.

Os temas são apresentados aos alunos por meio de tópicos como: linguagem algébrica, variável, incógnitas. Ou seja, os tópicos representam uma fragmentação daqueles temas. O que queremos afirmar é que, primeiro, não há um tema ou tópico específico para o objeto generalização. Ele aparece mais especificamente em uma das dimensões da álgebra (estabelecer generalizações). E, segundo, o fato de enxergarmos a generalização como ostensivo e não ostensivo faz com que ele possa habitar as organizações didáticas em diversos momentos. Além disso, podemos investigar como ele se comporta ao ser tratado como técnica ou tecnologia, já no modelo praxeológico. É o que pretende esta seção.

A análise do quadro anterior, 32, faz perceber que a única dimensão contemplada em todos os setores é a que prevê o estabelecimento de generalizações. Isso nos permite construir a hipótese de que há, de fato, uma fragmentação dos temas que abordam a generalização, visto que ela alcança todos os setores previstos. Nota-se, por exemplo, que a dimensão “Estabelecimento de generalizações” é trabalhada nos setores “propriedades e grandezas” do 1º ao 5º ano; já no setor “sentenças algébricas”, do 7º ao 9º ano.

Para explorar um pouco mais o fato de o objeto generalização pertencer a todos os setores, é prudente citar Mason (1988) a esse respeito. O autor mostra que a generalidade é um aspecto que está presente em toda a matemática. Não se trata, assim, de estudar um tópico específico, mas de enxergá-la em todo um campo do conhecimento. É um modo de ver a matemática.

Expressar generalidade não é tanto um tópico a ser ensinado em uma aula específica, mas uma maneira de ver o que é a matemática. Quase todos os momentos em quase todas as aulas de matemática têm algum aspecto de generalidade em seu cerne. A álgebra surge como resultado do desejo ou necessidade de manipular generalidades (MASON, 1988, p. 54, tradução nossa)¹⁵⁵.

Desse fragmento vamos também extrair um argumento que parece compactuar com os objetivos deste trabalho: o autor explica que a álgebra vem de uma

¹⁵⁵ Expressing generality is not so much a topic to be taught in a specific lesson, as a way of looking at what mathematics is about. Almost any moment in almost any mathematics lesson has some aspect of generality at its heart. Algebra arises as a result of wishing or needing to manipulate generalities.

necessidade de manipulação de generalidades. De fato, quando focamos este estudo na generalização, não perdemos de vista que ela é uma dimensão de um domínio. Para tanto, temos percebido que as análises feitas até aqui mostram a construção do currículo numa direção que prevê a expressão dessas generalidades. Contudo, para que isso ocorra, os setores desenvolvem outras dimensões e necessidades. Tudo isso para que o aluno no final do 9º ano possa, por exemplo, “utilizar o conceito de função para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis¹⁵⁶”. Ou seja, neste tópico, prevê-se que muitas generalidades já tenham sido consolidadas na forma de habilidades.

Para compreender melhor este horizonte que abriga o objeto de nosso estudo, vamos focar nos elementos do modelo praxeológico utilizando os dados da seção anterior. A ideia é analisar as praxeologias na perspectiva que construímos até aqui: paralelas, progressivas, iniciais, intermediárias e finais. Portanto, tratamos aqui de praxeologias a serem construídas, aquelas esperadas pela instituição.

Para fins de organização, cabe explicar que vamos, primeiro, utilizar os quadros que expuseram as praxeologias iniciais, intermediárias e finais do 1º ao 9º ano. Tal disposição vai auxiliar na análise dos verbos que acompanham os tópicos. O próximo quadro, 33, permite uma visualização mais adequada do que é pretendido. Nele destacamos os verbos, a praxeologia encontrada e as séries envolvidas.

A análise do quadro 33 permite afirmar que há onze verbos tipificando as praxeologias das séries iniciais e nove para as séries finais, incluindo aquelas que atendem ambos os níveis de ensino. Tal fato, conforme já afirmado anteriormente, não indica a presença de vinte praxeologias no total, visto que cada verbo dá origem a várias outras. Contudo, acreditamos ser um bom guia para uma análise longitudinal, como a que estamos fazendo. Assim, dado o elevado número de praxeologias possíveis, vamos eleger, para análise, uma inicial, uma intermediária e uma praxeologia final de cada segmento.

¹⁵⁶ Último tópico previsto para o 9º ano em álgebra, no 2º bimestre.

Quadro 33 – Praxeologia longitudinal das séries iniciais e finais

TIPO DE PRAXEOLOGIA		SEGMENTO	VERBO
Predomínio para as Séries Iniciais	INICIAL	Séries Iniciais	COMPARAR
	INICIAL	Séries Iniciais	ORGANIZAR
	INICIAL	Séries Iniciais	DESCREVER
	INTERMEDIÁRIA	Séries Iniciais	DETERMINAR
	INTERMEDIÁRIA	Séries Iniciais e Finais	RESOLVER
	INTERMEDIÁRIA	Séries Iniciais e Finais	CONSTRUIR
	INTERMEDIÁRIA	Séries Iniciais e Finais	IDENTIFICAR
	INTERMEDIÁRIA	Séries Iniciais e Finais	ELABORAR
	FINAL	Séries Iniciais	CONCLUIR
	FINAL	Séries Iniciais e Finais	COMPREENDER
	FINAL	Séries Iniciais e Finais	RECONHECER
TIPO DE PRAXEOLOGIA		SEGMENTO	VERBO
Predomínio para as Séries Finais	INICIAL	Séries Finais	CLASSIFICAR
	INTERMEDIÁRIA	Séries Finais	ASSOCIAR
	INTERMEDIÁRIA	Séries Iniciais e Finais	RESOLVER
	INTERMEDIÁRIA	Séries Iniciais e Finais	CONSTRUIR
	INTERMEDIÁRIA	Séries Iniciais e Finais	IDENTIFICAR
	INTERMEDIÁRIA	Séries Iniciais e Finais	ELABORAR
	FINAL	Séries Iniciais e Finais	COMPREENDER
	FINAL	Séries Iniciais e Finais	RECONHECER
	FINAL	Séries Finais	UTILIZAR

Fonte: Construção nossa.

Antes, é sempre prudente recordar os apontamentos de Chevallard (1998) a respeito do modelo praxeológico. O autor explica que é possível analisar as práticas institucionais por meio da praxeologia: tarefa, técnica, tecnologia e teoria compõem a quádrupla que descreve as relações entre a instituição, seus objetos e sujeitos. As tarefas, segundo o autor, são construções das instituições, são produtos delas, ou seja, não existem por conta própria. Além disso, Chevallard (1998) mostra que, em relação às tarefas, há um pequeno número de técnicas a elas relacionado. Portanto, a instituição reconhece algumas técnicas, dá validade a elas. Mas isso não significa que outras técnicas não possam existir.

Esses pontos foram repassados, pois tratamos aqui de tópicos institucionais indicados pelo currículo mineiro. Ou seja, analisamos o que a instituição reconhece no campo algébrico; contudo, outras praxeologias derivam daí: aquelas construídas

pelo professor e pelo livro didático, por exemplo. Portanto, uma análise praxeológica institucional será sempre uma relação esperada.

Dessa forma, procuramos extrair dos tópicos do CRMG as técnicas e tecnologias que podem ser construídas a partir daí. Consideramos, a partir dos apontamentos de Chevallard (1998), que o último nível do modelo praxeológico, a teoria, possui um caráter de justificativa que ultrapassa os tópicos apresentados no currículo. Vamos, assim, considerar a praxeologia em seus níveis prático e teórico, privilegiando a análise na perspectiva desses dois blocos.

Já foi exposto que, segundo Chevallard (1998), o professor se vê diante de uma organização didática (OD) quando vai conduzir as reconstruções previstas no currículo oficial, ou seja, em uma organização matemática (OM). O autor explica que o docente é responsável por conduzir o desenvolvimento aos componentes técnicos, tecnológicos e teóricos das praxeologias previstas.

Essa condução das organizações didáticas é feita por meio de situações que, de acordo com Chevallard (1997, 1998), estarão presentes: são os momentos didáticos, conforme já mostrado no capítulo 3. Repassando alguns tópicos teóricos, é importante lembrar que o autor descreve seis momentos didáticos no fazer pedagógico do professor. O primeiro e o segundo momentos são aqueles que apresentam e exploram as técnicas envolvidas nas tarefas de um conteúdo específico. Eles, portanto, constituem o ambiente técnico-prático da praxeologia: $[T, \tau]$. O que cabe explorar desse momento é que esse ambiente prático visa, de alguma forma, atingir o bloco teórico, ou seja, busca-se o apoio em uma generalidade, uma conclusão. Contudo, é conveniente destacar que há componentes práticos, técnicos, que necessitam de uma generalização anterior. Há um encadeamento nesses ambientes prático e teórico que faz com que um tópico institucionalizado possa ser recapitulado mais adiante.

Assim, os próximos momentos didáticos buscam compor o bloco teórico-tecnológico: $[\theta, \Theta]$. As técnicas vão ganhando uma generalidade cada vez maior, numa direção que se aproxima da institucionalização da organização matemática

trabalhada. Já argumentamos¹⁵⁷ que há uma direção prática → teoria que busca atingir o nível teórico da OM, e, para isso, as técnicas são imbuídas de um discurso matemático cada vez mais elaborado, genérico.

Uma primeira constatação, já feita na seção anterior, é que foi possível identificar praxeologias iniciais, intermediárias e finais para o domínio da álgebra. As praxeologias iniciais são aquelas acompanhadas dos verbos: comparar, organizar, descrever e classificar. Essa classificação vem do fato de percebermos que esses verbos moldam praxeologias mais focadas no ambiente prático, cujas técnicas não dependem de uma formalização teórica anterior trabalhada em outros tópicos. Assim, são praxeologias que servem de base para o desenvolvimento de outros momentos didáticos, aqueles de formalização teórica. Foram encontradas quatro praxeologias iniciais as quais aparecem nos 1º, 2º, 3º, 4º e 6º anos.

As praxeologias intermediárias são aquelas que estão mais ligadas à construção de um ambiente tecnológico-teórico, de acordo com a descrição dos momentos didáticos. Seus verbos são: determinar, resolver, construir, identificar, elaborar, associar. São elas que elaboram as técnicas mais apuradas. Das vinte praxeologias identificadas no CRMG, dez são intermediárias. Isso demonstra a relevância desse tipo de praxeologia. De fato, é nesse momento que há um trabalho de formalização de conceitos e uma recuperação de ideias anteriores. Chevallard (1997) mostra que uma OM pode ser sempre ampliada e que, a cada ampliação, o ambiente teórico fica em destaque. Além disso, a teoria permite gerar novas técnicas. Essas técnicas podem compor, assim, o ambiente prático de outra praxeologia. Outra constatação é que quase a totalidade desse tipo de praxeologia aparece tanto nas séries iniciais quanto finais. Há, portanto, um movimento constante de ampliação e retomada de conceitos que percorre praticamente todo o Ensino Fundamental.

As praxeologias finais, num total de seis, estão relacionadas aos dois últimos momentos didáticos: a institucionalização da OM e a avaliação. Os verbos que acompanham essas praxeologias dão uma ideia do que se pretende alcançar:

¹⁵⁷ Esses apontamentos teóricos foram desenvolvidos no capítulo 3 e são retomados à medida que as análises estão sendo feitas.

concluir, compreender, reconhecer, utilizar. São verbos que tipificam uma formalização, uma conclusão final, ou seja, é o final de um processo.

A seguir, apresentamos no quadro 34 quais tópicos serão analisados com um pouco mais de profundidade e as séries envolvidas. A ideia é verificar em que momentos didáticos o objeto generalização aparece e como se dá esse encadeamento entre os ambientes prático e teórico. Uma breve leitura do quadro já permite observar de que forma as praxeologias podem ser construídas no Ensino Fundamental para o domínio algébrico. Parte-se da análise de regularidades em sequências, no 1º ano, até atingir a compreensão das ideias de função no 9º ano.

Quadro 34 – Tópicos para a análise praxeológica

SÉRIES INICIAIS	PRAXEOLOGIA INICIAL	
	1º ano	Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
	PRAXEOLOGIA INTERMEDIÁRIA	
	3º ano	Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
SÉRIES FINAIS	PRAXEOLOGIA FINAL	
	5º ano	Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
	PRAXEOLOGIA INICIAL	
	7º ano	Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
	PRAXEOLOGIA INTERMEDIÁRIA	
	8º ano	Resolver problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	PRAXEOLOGIA FINAL	
	9º ano	Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica.

Fonte: Construção nossa, 2022.

Desenvolvendo a ideia de que a praxeologia inicial está relacionada ao primeiro e ao segundo momento didático, percebe-se que há um primeiro encontro com a tarefa

e o estabelecimento de uma técnica. O tópico analisado, no 1º ano, apresenta uma tarefa sobre sequência recursiva¹⁵⁸. O aluno deve identificar o elemento que falta, ou seja, ele precisa reconhecer a lei de formação dessa sequência. A técnica utilizada diz respeito à identificação do padrão. Não há, nesse caso, um algoritmo a ser seguido, ou seja, não há um conjunto de regras a serem cumpridas para que essa tarefa seja resolvida. Espera-se que o aluno capte a ideia de que há um padrão.

É, portanto, uma tarefa que busca construir o conceito de regularidade. O objetivo é que haja uma consciência desse padrão, ou seja, ele já existe. Será por meio desse reconhecimento que os elementos ausentes serão encontrados. E não há uma técnica específica para esse tipo de reconhecimento, de modo que o professor pode contribuir fornecendo exemplos, mostrando como construir uma lei de formação, por exemplo. O que queremos mostrar é que esta praxeologia está bem concentrada no bloco prático, no sentido de não haver uma justificativa em nível teórico que dependa exclusivamente de outro conteúdo matemático anterior. Esse ambiente teórico está sendo construído e é a ideia de regularidade. No quadro 35 há a exposição desses elementos praxeológicos.

Quadro 35 - Análise praxeológica: tópico do 1º ano

Elementos praxeológicos	PRAXEOLOGIA INICIAL – 1º ano
TAREFA T	Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
TÉCNICA τ	Identificação de padrões.
TECNOLOGIA/ TEORIA θ/Θ	Leis matemáticas (operações básicas); Regularidade – EM CONSTRUÇÃO.

Fonte: Construção nossa, 2022.

Como tratamos aqui de uma análise praxeológica em nível institucional, é sempre importante ressaltar que este tópico prevê uma habilidade a ser alcançada.

¹⁵⁸Uma sequência recursiva é aquela em que os termos são obtidos por meio de uma regra, uma lei.

Assim, consideramos que o bloco teórico abrange uma expectativa da instituição escola. Portanto, vamos considerar que há uma generalização a nível praxeológico neste movimento que começa no bloco prático e que, de alguma forma, prevê a construção de uma habilidade (neste caso, em nível tecnológico/teórico). Há, portanto, um caminho esperado.

Conforme analisado anteriormente, no 1º ano são trabalhados dois setores, propriedades e sequências, por meio de praxeologias paralelas. O tópico apresentado no quadro anterior pertence ao setor sequências, o qual será abordado progressivamente até o 5º ano. Identificamos que o objeto generalização aparece neste tópico analisado por meio da identificação dos padrões e na ideia de regularidade que está sendo construída. Particularmente, este tópico pode ser trabalhado paralelamente com as outras praxeologias que serão construídas no outro setor de forma independente, ou seja, não há aspectos teóricos paralelos (ou anteriores) que sejam necessários na construção da ideia de regularidade.

Para encerrar a análise deste tópico, destacamos mais uma vez que se trata de uma praxeologia inicial, a qual estamos relacionando aos dois primeiros momentos didáticos de acordo com Chevallard (1997, 1998): há o trabalho com uma tarefa relativa a uma organização matemática (OM) e a sua exploração por meio de uma técnica. Constatamos, por meio desta análise, que os seis momentos didáticos aparecem de maneira particular em cada praxeologia, uma vez que nem sempre teremos a presença de todos os gestos didáticos que compõem esses momentos num mesmo tópico. Por exemplo, se considerarmos a institucionalização (quinto momento didático) da linguagem algébrica, é esperado que ela ocorra no oitavo ano, e, para isso, podemos considerar que os momentos didáticos anteriores ocorrem durante todo o Ensino Fundamental. Para tanto, neste tópico do 1º ano, vê-se uma exploração do bloco técnico-prático da praxeologia.

Com relação ao 3º ano, vamos analisar uma praxeologia intermediária. Conforme mostrado anteriormente, trata-se do momento da construção do ambiente teórico. Relacionamos esta praxeologia ao segundo e terceiro momento didático. No tópico em questão, uma habilidade esperada pelo CRMG, prevê-se que o aluno identifique regularidades em sequências numéricas. Deve, ainda, descrever a lei

matemática: “identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes”. A técnica é, portanto, a identificação dos padrões, nos moldes do que foi trabalhado no tópico do 1º ano analisado. Nesse caso, porém, nota-se que há uma ampliação do ambiente teórico, ou seja, espera-se que esse conceito esteja cada vez mais formalizado.

Podemos afirmar, ainda, que a técnica utilizada recupera, de certa forma, o que já foi trabalhado anteriormente, bem nos moldes do que prevê o segundo e o terceiro momento didático: constituição ou construção de um ambiente tecnológico-teórico relativo a T_i e em consonância com OM; elaboração, constituição e trabalho com uma técnica mais apurada. Nesta praxeologia há, portanto, um trabalho que conecta tanto o ambiente prático quanto o teórico. O quadro 36 mostra tais elementos do tópico analisado.

Quadro 36 – Análise praxeológica: tópico do 3º ano

Elementos praxeológicos	PRAXEOLOGIA INTERMEDIÁRIA – 3º ano
TAREFA T	Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
TÉCNICA τ	Identificação de padrões.
TECNOLOGIA/ TEORIA θ/Θ	Leis matemáticas; Regularidade.

Fonte: Construção nossa, 2022.

No 3º ano, são trabalhados os setores sequências e propriedades. O tópico analisado pertence ao setor sequências. É, portanto, uma progressão da praxeologia analisada anteriormente, no 1º ano.

Vamos analisar, agora, um tópico do 5º ano, uma praxeologia final. Conforme já abordado, neste tipo de praxeologia admitimos que há uma expectativa de fechamento de um processo, uma generalização de conceitos trabalhados. O tópico

escolhido aponta que o aluno deve concluir que uma relação de igualdade entre dois membros permanece, para que se tenha a noção de equivalência: “Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência”. A técnica está no campo das operações básicas, das sentenças matemáticas. É por meio da manipulação delas que o aluno chegará a essa conclusão. Entendemos que o campo teórico, aquele utilizado para justificar o que está sendo feito, também são as operações básicas. Elas justificam o processo e servem de base para a construção da noção de equivalência.

Conjecturamos, ainda, que as praxeologias finais são aquelas que dependem de um número maior de outros tópicos. De fato, elas estão relacionadas aos dois últimos momentos didáticos: a institucionalização e a avaliação. Para tanto, espera-se que o professor explore as praxeologias intermediárias para que atinja o nível de conclusão esperado nas finais. O quadro 37 traz os elementos analisados.

Quadro 37 – Análise praxeológica: tópico do 5º ano

Elementos praxeológicos	PRAXEOLOGIA FINAL – 5º ano
TAREFA T	Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
TÉCNICA τ	Sentenças matemáticas; operações básicas.
TECNOLOGIA/ TEORIA θ/Θ	Sentenças matemáticas; operações básicas.

Fonte: Construção nossa, 2022.

Este tópico aparece no setor propriedades. No 5º ano aparece, ainda, o setor grandezas. São estes dois setores que são trabalhados paralelamente. Com relação aos ambientes prático e teórico, notamos que neste tópico, em particular, há uma exploração de objetos ostensivos em nível de operações básicas. Prevê-se que o aluno já tenha contato com as sentenças matemáticas. Como se trata de uma

formalização, percebemos que o campo teórico busca a generalização de um processo.

Finalizando esta análise praxeológica das séries iniciais, percebe-se, de maneira geral, que há uma exploração do bloco prático por meio de noções ligadas às ideias de regularidade e equivalência. Essas noções estão sendo construídas por meio de ostensivos ligados ao registro, à observação e à linguagem. Nota-se que o *topos* do professor assume um papel preponderante no sentido da construção desses conceitos. Espera-se que, mais adiante, o aluno utilize esse conhecimento na ampliação do campo algébrico. Notamos, ainda, a presença dos momentos didáticos relacionados às praxeologias iniciais, intermediárias e finais. Essas praxeologias finais serão a base para outras que serão construídas do 6º ao 9º ano. Vejamos como isso se dá nos próximos parágrafos.

Elegemos tópicos dos 7º, 8º e 9º anos. Enquanto nas séries iniciais há a presença de apenas dois setores em cada ano, a situação muda daí para frente. Verificamos a existência de seis setores no 7º e no 9º e cinco no 8º ano. Como estamos admitindo a presença de praxeologias paralelas e progressivas, notamos que muitos tópicos são trabalhados nesses dois moldes. Para o 7º ano, temos o tópico: “Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura”. Aqui, a técnica é a identificação de padrões. Ela é utilizada desde as séries iniciais assim como a teoria da regularidade. Esse tópico, na verdade, já foi abordado anteriormente. Isso mostra que há uma previsão de ampliação e resgate de conhecimentos anteriores no campo da álgebra. Ver quadro 38.

Quadro 38 – Análise praxeológica: tópico do 7º ano

Elementos praxeológicos	PRAXEOLOGIA INICIAL – 7º ano
TAREFA T	Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
TÉCNICA τ	Identificação de padrões.
TECNOLOGIA/ TEORIA θ/Θ	Leis matemáticas; Regularidade.

Fonte: Construção nossa, 2022.

Trata-se de uma praxeologia inicial, e a relacionamos, portanto, ao primeiro e ao segundo momento didático. Foi visto que esses momentos estão mais atrelados ao ambiente prático. Tal constatação ficou bem evidente no tópico do 1º ano. Percebemos a mesma configuração no 7º ano; contudo, o ambiente teórico “regularidade” vem sendo explorado nas séries anteriores.

Assim, esse movimento de ampliação teórica que vai da exploração técnica até a institucionalização admite um resgate previsto e esperado de acordo com essa instituição. O *topos* do aluno, nesse caso, é um local previsto no documento oficial como sedimentado. Este tópico faz parte do setor sequências e é trabalhado paralelamente com os setores: expressões, sentenças algébricas, função e equação.

Vejamos, agora, uma praxeologia intermediária do 8º ano, quadro 39.

Quadro 39 – Análise praxeológica: tópico do 8º ano

Elementos praxeológicos	PRAXEOLOGIA INTERMEDIÁRIA – 8º ano
TAREFA T	Resolver problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
TÉCNICA τ	Expressões algébricas; equações.
TECNOLOGIA/ TEORIA θ/Θ	Relação de igualdade; sentenças matemáticas.

Fonte: Construção nossa, 2022.

Na análise ecológica do CRMG feita na seção anterior, viu-se que o domínio álgebra é trabalhado por mais tempo no 8º ano: são três bimestres. É previsto, ainda, o trabalho com a construção da linguagem algébrica. Como elegemos apenas um tópico para a análise praxeológica, é conveniente ressaltar que neste ano há um número considerável de praxeologias intermediárias as quais buscam construir um ambiente teórico relacionado a todos os setores envolvidos: sentenças algébricas, sequências, expressões e equações. Assim, as praxeologias paralelas acabam abordando momentos didáticos relacionados a diferentes conceitos.

Neste tópico analisado, “Resolver problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações”, nota-se que a técnica usada está no campo das expressões algébricas e equações. E este campo foi trabalhado no ano anterior, momento em que foi tratado como ambiente teórico¹⁵⁹. Ou seja, as construções teóricas de determinado setor podem se tornar uma técnica em outros momentos. Com relação ao bloco teórico, tem-se a presença das sentenças matemáticas e da relação de igualdade. Este tópico do 8º ano pertence ao setor sentenças algébricas. Paralelamente, nesta série, são abordados os setores sequências, expressões e equação. Percebe-se, neste momento, a presença do objeto generalização atuando como agente de formalização teórica, nos moldes do que já foi verificado em tópicos anteriores.

Encerrando esta seção, apresentamos uma praxeologia final presente no 9º ano, quadro 40.

¹⁵⁹ No 7º ano, há o tópico “Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas”.

Quadro 405 – Análise praxeológica: tópico do 9º ano

Elementos praxeológicos	PRAXEOLOGIA FINAL – 9º ano
TAREFA T	Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica.
TÉCNICA τ	Expressões algébricas; gráficos.
TECNOLOGIA/ TEORIA θ/Θ	Conceito de variável; relação de dependência.

Fonte: Construção nossa, 2022.

Trata-se de uma formalização no sentido do que viemos associando aos momentos didáticos institucionalização e avaliação. Como praxeologia final, nota-se esta intenção de fechamento de um processo. O próprio verbo “compreender” traz essa ideia de uma relação esperada pelo currículo. Para “Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica”, é previsto que o ambiente prático utilize os conteúdos expressões algébricas e gráficos, ou seja, tópicos trabalhados anteriormente. O bloco teórico está a cargo do conceito de variável e da relação de dependência.

Foi possível verificar, portanto, por meio da análise praxeológica, que há um movimento que parece unir os blocos prático e teórico por meio de formalizações cada vez mais amplas. Ainda que tenhamos escolhido poucos tópicos, acreditamos ser possível enxergar uma espécie de transição entre os ambientes no modelo praxeológico. E nunca é demais afirmar que se trata aqui da análise de uma relação institucional; portanto, esperada pela escola. Esse movimento assume, então, que há uma perspectiva crescente na abordagem dos conteúdos em álgebra.

Dado que este capítulo assumiu grandes pretensões no âmbito da investigação, na próxima seção vamos resgatar e sintetizar as principais ideias construídas.

5.3. Síntese e considerações finais do capítulo

Não se pode perder de vista que este trabalho, sendo interpretado à luz da TAD, só pode fazer sua análise por meio desses parâmetros teóricos. Ou seja, à maneira do exposto por Caraça (2010), uma realidade fluente precisa ser recortada para fins de estudo e organização. Contudo, conforme já expusemos em momentos anteriores, é de nossa concepção que cada filtro teórico direciona sua lente a determinado aspecto dessa realidade. Ora, não é possível estudar e analisar tudo ao mesmo tempo. Para tanto, cada teoria contribui à sua maneira e vai formando, junto a outros constructos, um espelho mais ou menos ordenado do mundo real. Dessa forma, é preciso apresentar os resultados das nossas análises por meio das interpretações construídas pela TAD.

Esta teoria constrói a base de suas concepções mostrando que é a posição p do sujeito (em determinada instituição I) que molda as relações deste com os objetos de I. Ou seja, a relação pessoal fica condicionada às conformidades da relação institucional. De fato, Chevallard (1991) mostra que o sujeito acaba por se submeter ao “campo de forças” da instituição, e daí emergem dois comportamentos: o sujeito compõe uma relação pessoal com o objeto nos moldes do que determina a instituição e, segundo, o objetivo de I será sempre transformar essa relação pessoal no que preveem os acordos institucionais.

A noção de instituição é, assim, a espinha dorsal da TAD. A teoria nos mostra que os objetos só existem por meio da relação mantida com o sujeito, mas sempre sob as restrições impostas pela instituição. Sabe-se, ainda, que a TAD possui outros desdobramentos não menos importantes. Contudo, neste trabalho, optamos por utilizar como filtro interpretativo os elementos básicos da teoria e suas relações entre si.

É sempre prudente recordar que o objetivo geral deste estudo é analisar o *corpus* prático e teórico mobilizado por alunos dos 7º e 8º anos do Ensino Fundamental no contato com a generalização algébrica. Porém, pelas concepções da TAD, é preciso levar em conta o papel da instituição escola/sala de aula, visto que, de acordo com a teoria, o aluno mantém-se sob o jugo institucional e relaciona-se com

objetos reconhecidos por ela. A análise da relação que envolve o objeto e a instituição torna-se, portanto, imprescindível a nosso ver.

Para tanto, neste capítulo cumprimos a segunda etapa prevista neste estudo, cujo intento foi identificar as relações institucionais existentes e esperadas para o campo algébrico e a noção de generalização. Esta análise buscou, então, trazer à tona aspectos que nos fizeram interpretar a relação entre os entes objeto: generalização; sujeito: aluno; e instituição: escola/sala de aula. Ou seja, por força teórica, foi preciso cumprir o objetivo maior desta pesquisa por meio dos elementos básicos da TAD.

Dado que esta etapa é de grande preponderância nesta pesquisa, optamos por sintetizar este capítulo fazendo um compilado das principais constatações feitas até aqui e colhidas nesta análise institucional. É o momento, ainda, de responder a algumas questões levantadas na exposição teórica, capítulo 3.

O objeto, pelo viés da TAD, é um ente que precisa ser reconhecido – tanto pela instituição quanto pelo sujeito – e, segundo Chevallard (2003), há diversas maneiras de cumprir esse roteiro, ou seja, é praticamente impossível garantir que haverá sempre uma boa relação entre instituição e sujeito. É o conceito de relatividade institucional. A escola, por meio do seu currículo oficial, prevê determinados comportamentos por meio dos objetos que ela reconhece. Na análise institucional feita, por meio do Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG), percebemos que os objetos que compõem o domínio da álgebra têm sua origem na Base Nacional Curricular Comum (BNCC), até chegar à sala de aula por meio de habilidades e tópicos a serem trabalhados.

O currículo mineiro é centrado no trabalho com habilidades e, no tocante ao campo da álgebra, é guiado por quatro dimensões: dessas, uma delas prevê “o estabelecimento de generalizações”. Portanto, localizamos o objeto de nosso interesse numa dimensão a ser alcançada por meio do trabalho com outros tópicos e conteúdos. Assim, notamos que a generalização aparece como ente a ser reconhecido antes mesmo de chegar à sala de aula. Há uma espécie de gênese institucional que é direcionada ao professor. Ou seja, é previsto que o docente reconheça o que a instituição escola espera. É o momento de estabelecer as diretrizes

a serem adquiridas. A generalização é, portanto, um objeto construído institucionalmente para que se alcance o pensamento algébrico. É sua primeira localização.

Com relação ao sujeito, podemos considerar tanto o aluno como o professor como os ocupantes dessa posição. Como tratamos aqui da relação institucional, é momento de considerarmos o papel docente. A TAD explica que a posição ocupada pela pessoa explica sua maneira de lidar com o objeto. Neste trabalho, contudo, só podemos nos referir a comportamentos docentes previstos pelo CRMG, já que não temos uma pesquisa que investigue o trabalho docente em primeiro plano. Assim, consideramos que as conclusões advindas da instituição escola abracem indiretamente a posição p relacionada ao professor. Ou seja, vamos admitir que o papel do sujeito professor seja cumprir o estabelecido na relação institucional. É, portanto, um comportamento esperado. Por ocasião das análises das tarefas dos alunos, traremos outras constatações a respeito do ente sujeito à maneira que prevê a TAD.

O terceiro e último elemento básico da teoria, instituição, é considerado aqui como a escola. Falamos de escola num sentido bem amplo, que vai além do espaço físico, visto que, pelo corpo teórico e a análise feita, nota-se que o CRMG e a BNCC assumem também o papel de instituição.

Retomando outros aportes da TAD, Chevallard (2001a) nos fala, já por meio do conceito de escala de codeterminação didática, que essa hierarquia de níveis deve ser pensada, construída, elaborada praxeologicamente. Ou seja, deve haver uma intenção didática a esse respeito para que se possa percorrer todo o caminho de uma organização matemática. O que se percebe, contudo, é que, embora possamos afirmar que o currículo oficial, de alguma forma, é elaborado nos moldes da codeterminação didática, na prática, essa reconstrução acaba ficando fragmentada ao longo do percurso escolar.

Portanto, o argumento que levantamos aqui, por meio dos aportes da TAD, é que os tópicos matemáticos precisam ser analisados por meio de uma perspectiva longitudinal e local, já que são as organizações matemáticas (OM) que dão origem aos gestos didáticos do professor. Assim, localizamos o objeto de nossa pesquisa ao

longo do tempo didático previsto na educação básica, identificamos seu habitat e nicho e o analisamos sob o ponto de vista da reconstrução praxeológica.

O que ocorre é que podemos separar os constructos da TAD em dois segmentos. De um lado, temos os elementos básicos: objeto, sujeito, instituição. São os entes principais que habitam a realidade moldada pela teoria. E de outro, aparecem os modelos teóricos: praxeologia e níveis de codeterminação didática. Esses modelos são espécies de comportamentos mais ou menos padronizados que explicam a forma como esses entes se relacionam.

De todo esse filtro, percebe-se que a hierarquia de níveis de codeterminação assume o papel de modelo mais amplo. Ou seja, todos os aportes construídos pela TAD podem ser observados nessa escala. Ela mostra a perspectiva longitudinal e local que mencionamos anteriormente das OM. Longitudinal porque traz o caminho percorrido pelo objeto que se quer analisar – de fora para dentro, por meio da concepção de que a escola, como instituição, “importa” conteúdos do mundo acima para o mundo abaixo. E local porque permite uma análise dessa importação de cima para baixo já no último degrau, os tópicos.

Sintetizando, quer-se afirmar que a análise deste capítulo permite assumir que o objeto generalização habita a instituição sob formas e momentos distintos. Aparece como objeto, nos moldes de elemento básico, que possui gênese a ser reconhecida tanto por professor quanto por aluno; aparece nas construções praxeológicas no seu bloco prático e, ainda, no bloco teórico. Portanto, nossas observações mostram que esse objeto pode ser analisado sob perspectivas diferentes. Vejamos.

A análise ecológica do currículo mineiro mostrou que o objeto generalização é citado, pela primeira vez e de forma direta, como uma das quatro dimensões a serem alcançadas em álgebra. Neste momento, podemos configurá-lo como um habitante dos níveis mais altos na escala de codeterminação. Nesse sentido, percebe-se que o “mundo acima” que exporta a generalização para os setores do currículo de Minas Gerais é o NCTM e a BNCC.

Os objetivos gerais para o domínio algébrico nos auxiliaram na determinação dos setores no CRMG. Nesse sentido, nas séries iniciais, o objeto generalização aparece por meio de objetivos gerais na recomendação do trabalho com padrões e,

nas séries finais, no estabelecimento de generalizações de propriedades. Podemos admitir, ainda, a presença indireta do referido objeto no trabalho com funções e variáveis.

A análise dos setores nos fez construir a ideia de que há diversas praxeologias capazes de cumprir todos os níveis da escala de codeterminação. Dessa forma, há praxeologias progressivas (ou sucessivas) e paralelas. As primeiras assumem uma perspectiva ascendente e, de alguma forma, dependem de conhecimentos já trabalhados. As paralelas são aquelas que coexistem ao lado de outras, que podem ser trabalhadas explorando diferentes setores num mesmo ano escolar.

São esses dois tipos de praxeologias que transportam os temas e tópicos por todo o Ensino Fundamental. O caminho da generalização perpassa, portanto, tópicos, temas e praxeologias diversas, do 1º ao 9º ano. Ainda a respeito das praxeologias, percebemos que podemos classificá-las, também, em três outros tipos: iniciais, intermediárias e finais. Esta análise permitiu que enxergássemos o momento de construção institucional do objeto generalização: isso se dá nas praxeologias iniciais e ocorre no 1º e 2º ano, principalmente.

Já a análise praxeológica do currículo teve o intuito de analisar os blocos prático e teórico de alguns tópicos eleitos. Para isso, utilizamos a ideia de que o tipo de praxeologia determina, mais ou menos, o momento didático do professor. As praxeologias iniciais estão mais focadas no trabalho com uma técnica, ou seja, relacionadas ao ambiente prático. Já as intermediárias buscam construir o campo teórico e, de certa forma, apoiam-se nele para o trabalho com as praxeologias sucessivas. Já as praxeologias finais pretendem fechar o processo. O que importa dizer é que essa sucessão praxeológica prevê um trabalho cada vez mais amplo no que diz respeito ao bloco teórico. Ou seja, há um movimento que vai unindo as técnicas às suas justificativas teóricas de modo que o que é bloco teórico numa série pode se tornar a técnica em outra praxeologia mais adiante. E aqui também enxergamos a presença da generalização fazendo esse transporte, essa migração da técnica à teoria.

Por fim, cabe destacar que as análises nos levam a admitir que a generalização é um objeto que se comporta tanto como ostensivo como não ostensivo. Na ocasião,

defendemos a ideia de que o trabalho com a generalização parece exigir uma coativação conjunta tanto de registros quanto de noções. Além disso, quando falamos em registro, é importante frisar que a notação sempre se dará por outros objetos (uma sequência numérica, por exemplo), visto que não se pode “enxergar” o objeto generalização. O que importa é considerar o duplo papel assumido pela generalização: um registro e uma noção.

Como última consideração, mas não menos importante, vale ressaltar que a análise por meio da escala de codeterminação didática nos fala de um caminho que pode ser analisado tanto de fora para dentro da escola quanto no sentido contrário: da sala de aula para os níveis mais altos. E a esse respeito, nossas interpretações nos levam a crer que daí derivam comportamentos específicos tanto para o professor quanto para o aluno. Conjecturamos que o trabalho do professor o leva a enxergar esse caminho sempre de fora para dentro ou, de outra forma, de cima para baixo, numa perspectiva de afunilamento. Já o aluno acaba percebendo-o de baixo para cima. Ou seja, ele convive com fragmentos de um tema que chegam à sala de aula por meio de tarefas cujas técnicas e teorias pretendem conectar essas frações a um todo. Perguntamo-nos, porém, se o aluno percebe que há um caminho construído na escola para conectar esses conhecimentos fragmentados.

Assim, pensamos que há um movimento na direção de uma fragmentação dos temas. Contudo, não se pode garantir que o aluno consiga, por conta própria, fazer o movimento reverso, ou seja, concluir que determinado tópico é, na verdade, resultado da fusão de tantos outros. Consideramos, evidentemente, que todo o currículo é construído para que tal fato ocorra, como nos momentos das praxeologias finais, conforme já explorado. Contudo, o que queremos argumentar é que parece não haver um movimento intencional nesse sentido.

Vamos encerrar este capítulo recuperando seu objetivo: caracterizar as formas de generalização presentes no currículo de matemática em Minas Gerais. As principais constatações foram:

- a generalização é objeto que aparece tanto no campo dos registros quanto das noções;

- ela aparece pela primeira vez no trabalho com regularidades e ideias de padrão nas séries iniciais;
- a generalização está presente em diferentes tipos de praxeologia, cada uma delas explorando um aspecto do objeto;
- a generalização surge fazendo a ligação entre os blocos prático e teórico nas praxeologias.

As observações acima não conseguem sintetizar todas as constatações feitas, mas são trazidas neste momento como forma de organização. Desse modo encerramos a análise institucional. O próximo capítulo, de alguma forma, complementa este e utiliza as ideias aqui construídas para analisar as tarefas aplicadas aos alunos.

6. ANÁLISE DA RELAÇÃO PESSOAL

O trabalho do cientista é, portanto, o de observar e descrever os fenômenos e ordenar os resultados da sua observação num *quadro explicativo* – construção intelectual – coerente, e cujas consequências e previsões sejam confirmadas pela observação e experimentação.
(Bento de Jesus Caraça)

Este é o último capítulo das análises deste trabalho. Representa mais um esforço na tentativa de colhermos argumentos a respeito do que viemos questionando até aqui. Apesar da questão que orienta nossa pesquisa estar relacionada diretamente às concepções dos alunos¹⁶⁰, optamos, propositalmente, por deixar a análise de suas tarefas para o final do estudo. Há nisso uma justificativa e um propósito.

O corpo teórico adotado direciona suas lentes para as múltiplas relações que acontecem em determinada instituição I. A TAD é enfática ao afirmar que o sujeito vive atrelado aos valores e restrições impostas pelo crivo institucional. Até mesmo os objetos necessitam ser observados de acordo com uma gênese que os molda por meio de estruturas da própria instituição. O sujeito só o é após assumir posições nesta instituição. Aliás, já dissemos anteriormente que essa posição p do sujeito em I determina a forma como ele se relaciona com os objetos.

Outra razão de cunho teórico que adotamos para justificar o lugar reservado à análise das tarefas dos alunos é o fato de Chevallard (1991) mostrar que o sujeito X acaba por se submeter ao campo de força das relações institucionais. Tal fato, para nós, faz com que a relação pessoal do sujeito com o objeto siga o que determina a

¹⁶⁰ Quais são os conhecimentos mobilizados por alunos de 7º e 8º anos no ambiente prático e teórico ao lidarem com a generalização algébrica?

instituição. Portanto, e aí está o propósito que mencionamos, julgamos que, para ter mostras do papel da instituição nas tarefas dos alunos, é necessário, antes, analisar de que forma ela constrói sua relação com o objeto de nosso estudo.

Dessa forma, retomaremos alguns questionamentos feitos durante a exposição teórica e vamos procurar, de alguma forma, relacionar os dados colhidos nas tarefas com o que foi observado no capítulo anterior. Seguindo a perspectiva adotada nos níveis de codeterminação didática, observamos que o último degrau¹⁶¹ é aquele que chega ao aluno, à sala de aula. Cremos já conhecer os panoramas que moldam os níveis acima e, assim, proceder a uma análise munidos de observações mais robustas e fundamentadas.

6.1. Os sujeitos e o contexto da experimentação

Já se pontuou, brevemente, por ocasião da apresentação deste estudo, que nossa pesquisa sofreu os impactos da pandemia da COVID-19. A previsão inicial era que aplicássemos as tarefas aos alunos envolvidos neste trabalho no ano de 2020. Contudo, no mês de março daquele ano, as aulas foram suspensas devido à quarentena. Em Minas Gerais, adotou-se o regime de aulas remotas a partir do mês de junho de 2020. Essa rotina inédita, somada aos incontáveis impactos de ordem social, econômica e emocional causados por essa pandemia, fez com que não pudéssemos aplicar nenhuma tarefa aos alunos naquele ano letivo.

Em 2021, com uma rotina remota um pouco melhor em relação ao ano anterior, conseguimos nos comunicar com os alunos por meio do aplicativo de troca de mensagens *WhatsApp*. Tal fato se deu a partir do mês de junho de 2021. O retorno das tarefas era escasso e não convinha aos nossos objetivos. Já a partir do mês de outubro de 2021, com o retorno obrigatório das aulas presenciais, conseguimos

¹⁶¹ Sempre que nos referimos à escala de codeterminação didática, chamamos de último degrau o nível mais baixo. Contudo, conforme já argumentamos, essa escala pode ser lida nos dois sentidos: de cima para baixo e de baixo para cima. Essa perspectiva, aliás, será retomada aqui, mais vezes, neste capítulo.

aplicar outras tarefas aos participantes. O atraso nessa coleta dos dados com os alunos fez com que prorrogássemos nosso estudo em mais seis meses.

Para fins de contextualização, vale dizer que este estudo foi aplicado em uma escola pública estadual no município de Cataguases, em Minas Gerais. Atuamos nesse estabelecimento desde o mês de agosto de 2004. Nossa pesquisa de mestrado também foi feita nesse local. É uma escola localizada na periferia da cidade e recebe todas as modalidades de ensino, com exceção da educação infantil, que é atendida pelo município¹⁶².

Como professora, atuamos, preferencialmente, nas turmas de 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. Os estudos do doutorado iniciaram-se em 2018. Na ocasião, precisamos renunciar a outras três escolas em que atuávamos. Mas tal situação fez com que pudéssemos, a partir daquele ano, atuar nos períodos manhã e tarde, e, assim, assumir turmas de 6º e 7º anos.

Ainda na fase de cumprimento dos créditos, tivemos a oportunidade de aplicar inúmeras tarefas aos nossos alunos, não só de 8º e 9º anos, mas em turmas de 6º e 7º anos também. Foi uma espécie de laboratório para que pudéssemos amadurecer nossa questão de pesquisa. Uma dessas tarefas será objeto de análise a seguir.

6.2. Análise praxeológica das tarefas aplicadas

Recordamos que o objetivo geral deste trabalho é analisar o *corpus* prático e teórico mobilizado por alunos de 7º e 8º anos do Ensino Fundamental no contato com a generalização algébrica. As tarefas foram construídas por meio do que preveem os textos oficiais. Não é demais lembrar que a pesquisadora, como professora da turma, desenvolveu as tarefas deste estudo como parte do programa previsto para aquela série, ou seja, a professora atuou de acordo com o que prevê a instituição, seus programas e textos oficiais. Os alunos tiveram contato com essas atividades dentro

¹⁶² A Escola Estadual Professor Clóvis Salgado foi fundada em 10 de abril de 1960 e atende alunos do 1º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio. Possui, ainda, turmas da Educação Integral, Educação de Jovens e Adultos além do ensino técnico. Atualmente conta com quase 900 alunos distribuídos em três turnos.

de um contexto que envolve a introdução e o trabalho com o pensamento algébrico – o que, de fato, prevê o Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG). Assim, tais tarefas foram construídas pela professora/pesquisadora segundo uma relação institucional prevista.

Conforme já explorado no capítulo 3, a TAD desenvolveu o modelo praxeológico para analisar as interações entre o sujeito e o objeto, ou seja, as práticas institucionais (CHEVALLARD, 1998). Faz-se, portanto, necessário destacar alguns apontamentos da teoria que conferem a essa investigação embasamento e segurança nas análises. Para esse intento, recorreremos a quatro vertentes da TAD que serão utilizadas neste momento.

Primeiro, há que se considerar o conceito de aprendizagem na teoria adotada: Chevallard (1992) fala em mudança na relação pessoal entre o sujeito e o objeto. Quando entra na instituição, o aluno pode conhecer ou não o objeto trabalhado, mas, de qualquer forma, haverá uma mudança nessa relação, o que, para a TAD, é uma aprendizagem. Algumas questões a esse respeito já foram por nós levantadas e serão aqui expostas novamente, já que esse será o momento de analisá-las. Assim, é necessário levar em conta que, nas tarefas aplicadas, alguns objetos já foram apresentados à turma e outros não. Traremos, portanto, de volta as questões seguintes:

- De que forma o aluno lida com objetos que são por ele já conhecidos e aqueles os quais tomou conhecimento no momento da aplicação da tarefa?
- Como o aluno utiliza objetos novos e antigos na atividade proposta?
- É possível dizer que houve uma mudança na relação pessoal do aluno com o objeto estudado?

O escopo principal deste estudo é trazer uma discussão sobre o que estamos chamando de *corpus* [prático] e [teórico] em tarefas que envolvam generalização algébrica. Assim, o modelo praxeológico de Chevallard (1998) configura-se em um bloco técnico, composto por tarefa e técnica $[T / \tau]$ e um bloco teórico, formado por tecnologia e teoria $[\theta, \Theta]$. Essa é, portanto, a segunda vertente da TAD utilizada nesta seção: a análise praxeológica das tarefas. Na visão de Chevallard (1998), as

instituições praticamente eliminam as praxeologias específicas, aquelas que respondem por um único tipo de tarefa. Ou seja, o que mais aparece são as organizações locais (várias técnicas sob uma mesma tecnologia) e as organizações regionais (uma teoria para várias tecnologias). Além disso, as organizações globais são formadas por várias organizações regionais.

A análise praxeológica, segunda vertente teórica adotada neste estudo, voltada às organizações matemáticas, permite, portanto, localizar em que níveis se situam as tarefas aplicadas, compará-las ao final do estudo e localizá-las numa perspectiva institucional. Contudo, é preciso admitir que, embora a pesquisadora, por motivos já explicitados anteriormente, tenha optado por trabalhar com várias tarefas, os desenvolvimentos teóricos posteriores da TAD afirmam que essas tarefas compõem um modelo praxeológico de referência (MPR). Esse modelo é um desenvolvimento das ideias da praxeologia.

Sabe-se que a praxeologia modela as relações institucionais. O que ocorre é que podemos admitir que ela é uma espécie de modelo “universal” para as práticas da instituição. Ou seja, fala-se em tarefas, técnicas, tecnologias e teorias que serão, de alguma forma, contextualizadas. Assim, o modelo praxeológico descreve uma organização matemática (OM) e, a partir daí, pode-se conceber que uma OM é um modelo praxeológico de referência em determinada instituição. O currículo de matemática é, portanto, um MPR. É a partir dele que o professor constrói sua prática. É por meio de um MPR, ainda, que o pesquisador faz sua análise.

Chaachoua e Bittar (2016) explicam que uma etapa praticamente obrigatória dos trabalhos que são desenvolvidos no âmbito da TAD é a elaboração de um MPR. Nas palavras dos autores, um MPR “é em si um resultado didático e também uma ferramenta para conduzir análises didáticas” (CHAACHOUA, BITTAR, 2016, p. 10).¹⁶³ Gascón (2014) fala em modelos gerais e específicos de referência. Nesse sentido, cabe pontuar que, para o autor, um modelo de referência específico será sempre

¹⁶³ Os autores Josep Gascón e Marianna Bosch desenvolveram a ideia de modelos epistemológicos de referência (MER) e modelos didáticos de referência (MDR). Neste trabalho não nos cabe analisar ou propor MER ou MDR para o estudo da generalização. A nosso ver, isso é pesquisa para ser feita com o devido aprofundamento e possibilidades que este modelo permite. Entretanto, torna-se necessário alguns apontamentos a respeito deste tema.

utilizado para analisar um modelo epistemológico dominante. Um modelo epistemológico de referência (MER) específico tem, portanto, a capacidade de formular questões associadas aos fenômenos estudados.

O que se quer pontuar, com relação a este trabalho, é que as tarefas elaboradas pela pesquisadora compõem, de certa forma, um MPR. Estas tarefas adotam um modelo teórico desenvolvido pela TAD. Contudo, as análises aqui não têm a pretensão de trazer elementos que possam eleger tais sequências como um MER ou MPR. Julgamos que tal intento é assunto para trabalhos futuros.

A terceira vertente que será utilizada aqui é a noção de objetos ostensivos e não ostensivos, à maneira do que foi definido por Chevallard (1994a) e levando em consideração, também, as ideias desenvolvidas na análise institucional.

Finalmente, é necessário analisar as tarefas de acordo com a noção de momentos didáticos proposto por Chevallard (1998). Se uma OM é desenvolvida por meio de uma praxeologia específica (aquilo que será estudado), uma organização didática vai descrever essa praxeologia (como será estudado) por meio dos momentos didáticos. Passemos agora à descrição das tarefas aplicadas.

6.2.1 Tarefa 1

Esta tarefa foi aplicada em 2019 para alunos do 7º ano. Foi criada pela professora/pesquisadora com o objetivo de verificar de que forma os alunos lidariam com questões sobre generalização de uma sequência numérica. As tarefas 1, 2 e 3 são um mesmo bloco e formam o que chamamos de tarefa 1 nesta seção. A seguir, serão feitas considerações a respeito de cada uma delas. Posteriormente, os dados levantados nas três subseções serão condensados.

Cabe lembrar que, no viés praxeológico, uma tarefa T vem da noção de tarefa τ , a qual é mais ampla. Portanto, quando se fala em “tarefas T ” na TAD, depreende-se que se trata de um tipo de tarefa τ , a qual é expressa por verbos e objetos bem precisos. A figura 18 seguinte apresenta a tarefa T aplicada e, embora não esteja diretamente registrado, considera-se que os verbos de comando são: observar e determinar. Segue a tarefa 1 com três itens: letras a , b , c .

Figura 18 – Tarefa 1 aplicada

1) Observe a sequência numérica:
6, 8, 10, 12, 14, ...

a) Qual é o 1º número dessa sequência:
b) Qual é o padrão que você observou?

c) Preencha o quadro:

Posição	Número
1º	
2º	
5º	
10º	
20º	

d) Como você encontrou o 20º termo?

Fonte: Construção nossa, 2019.

Para os dois primeiros itens, não houve maiores dificuldades. Os alunos conseguiram perceber que o padrão da sequência estava de 2 em 2.

O terceiro item da tarefa, letra c, pedia que fosse preenchida uma tabela e deveriam ser encontrados o 10º e o 20º termo da sequência. A professora/pesquisadora pediu que os alunos não escrevessem os números, mas tentassem descobrir uma forma de determinar esse número. Os alunos demonstraram uma tendência em generalizar apressadamente o resultado para os valores da 10ª e 20ª posição. Boa parte deles julgou que, já que o 5º número é 14, o 10º seria 28. Na figura 19, vê-se que uma estudante chegou ao resultado correto e, para isso, disse que foi contando até a posição pedida. Escolhemos este protocolo para representar o pensamento geral da turma.

Figura 19 – Tarefa 1: protocolo de uma estudante

1- Observe a sequência numérica:

6, 8, 10, 12, 14...

a) Qual é o 1º número dessa sequência?
R= 6.

e o 6º? 16

b) Qual é o padrão que você observou?
R= A sequência está de 2 em 2.

c) Preencha o quadro

Posição	Número	Como você encontrou o 10º?
1º	6	Recontando de 2 em 2 até encontrar o resultado.
2º	8	
5º	14	
10º	24	
20	44	

Fonte: Construção nossa, 2019.

Conforme já foi dito em capítulos anteriores, o campo matemático que abriga o tema de nossa pesquisa é a álgebra. A capacidade de generalizar é uma das abordagens do pensamento algébrico. Seguimos na direção apontada por Bronner (2019) quando o autor localiza o pensamento algébrico em uma corrente de pesquisa que busca investigar o ingresso da álgebra antes da aprendizagem formal da álgebra, ou seja, antes do seu tratamento matematizado por meio de símbolos e leis matemáticas. Nesse sentido, Squalli (2015) mostra que a abordagem por meio da generalização é um dos vários aspectos da álgebra. Assim, “dois componentes do pensamento algébrico são particularmente enfatizados: 1) a tendência a generalizar;

2) a tendência a raciocinar analiticamente” (SQUALLI, 2015, p. 347, tradução nossa¹⁶⁴).

Na tarefa aplicada, percebe-se que os alunos encontraram o padrão da sequência e perceberam que ela pode seguir infinitamente. Contudo, a generalização adotada por alguns estudantes fez com que eles utilizassem como técnica e como tecnologia um raciocínio proporcional, e isso permite algumas considerações. Em seu trabalho publicado em 2016, Kieran e outros citam alguns trabalhos cujos resultados estão em consonância com o observado nesta tarefa. Por exemplo, pesquisas por volta dos anos 1990 mostram que os alunos não têm dificuldades em **encontrar uma maneira de generalizar**, mas tendem a tomar soluções rápidas, que envolvem multiplicações – no caso, um raciocínio proporcional. Outra observação feita pela autora, há trabalhos que defendem que, se os alunos conseguem justificar e explicar propriedades da aritmética nos seus cálculos, pode-se dizer que eles aprenderam **fundamentos críticos** da álgebra (KIERAN *et al*, 2016).

O trabalho de Chevallard (1989) também contribui sobremaneira aqui, pois o autor traz questões sobre a álgebra que a relaciona com a aritmética. Chevallard argumenta que a ferramenta essencial da aritmética é a linguagem comum. A aritmética, segundo ele, fica presa em um conhecimento oral que dá conta de justificar seus procedimentos. Já a álgebra fornece uma ferramenta, um meio, muito mais poderoso. Não é à toa que, de fato, a aritmética não vai muito além dos problemas de primeiro grau (CHEVALLARD, 1989).

Esse apontamento do autor embasa o que foi observado quando os alunos deveriam justificar como encontraram o 20º termo da sequência. Todos os participantes responderam: contando. Com efeito, até o 7º ano, a turma não havia tido contato com esse tipo de raciocínio, e os alunos demonstraram apoio na linguagem oral e na aritmética. É importante frisar aqui, conforme foi apresentado no momento das análises institucionais, que o CRMG estava sendo implantado em 2019, ano em que esta tarefa foi aplicada. Portanto, esses alunos estavam sob a regência

¹⁶⁴ Deux composantes de la pensée algébrique sont particulièrement soulignées: 1) latendance à généraliser; 2) latendance à raisonner de manière analytique.

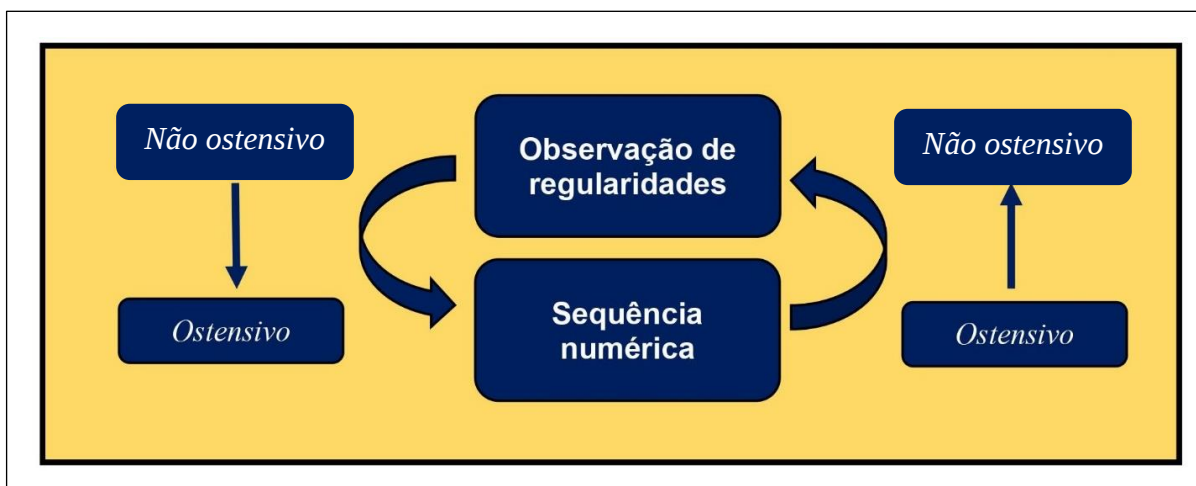
institucional do CBC, o qual não previa um trabalho formalizado a respeito de ideias como generalização nos anos anteriores.

Condensando, por enquanto, esses três argumentos de Squalli (2015), Kieran e outros (2016) e Chevallard (1989), vê-se que a tarefa aplicada foi ao encontro das observações dos autores. O que chama a atenção, de fato, é o apoio dos alunos no raciocínio proporcional ao perceber que, se a posição dobrou, então o número da sequência também deveria dobrar. Em termos praxeológicos, esse foi o ambiente tecnológico utilizado por eles.

Uma técnica, na praxeologia, também deve ser vista em sentido amplo, ou seja, é a maneira de resolver uma situação, não se referindo, portanto, a algo específico. O que se observa, nesta tarefa, é que os alunos lançaram mão da observação de uma regularidade para chegar às conclusões das letras a e b, ou seja, utilizaram um objeto não ostensivo. É conveniente repetir o que já foi colocado a esse respeito no capítulo 2. Casabò (1994) lembra que as técnicas podem se articular entre si, de modo que uma técnica parcial pode ser descrita como um “momento” de outra técnica mais ampla. Enxergamos a observação da regularidade nesta sequência como uma técnica parcial, já que, no próximo item, os alunos seriam levados a utilizar essa observação de regularidade mais uma vez.

Até aqui, portanto, no bloco [tarefa, técnica] ou [prático], como viemos chamando, os estudantes lançaram mão de um objeto não ostensivo na tarefa que envolve a análise de um padrão: observação de regularidade. Essa observação veio à tona por meio do ostensivo: sequência numérica. Chevallard (1999) lembra que não se deve estabelecer uma dicotomia entre ostensivos e não ostensivos, como se os últimos fossem estritamente mentais. O autor mostra que a base fundamental desses objetos institucionais é o fato de haver uma dialética que os orienta: os não ostensivos emergem da manipulação dos ostensivos. Além do mais, ostensivos são manipulados por meio dos não ostensivos. Na tarefa em questão, há de fato uma dialética que permite dizer que foi por meio da sequência numérica que emergiu a observação de regularidade, enquanto esta, a partir do momento que foi notada, orientou a manipulação dos demais números da sequência. Vide esquema a seguir, figura 20.

Figura 20 – Esquema ostensivo x não ostensivo



Fonte: Construção nossa, 2019.

Esses elementos da teoria permitem afirmar que, pelo viés praxeológico, observou-se que o discurso tecnológico que sustentou essa análise dos alunos ao descobrir o padrão da sequência (item b) veio das operações elementares (somar de 2 em 2). Vamos um pouco mais adiante e a seguir retornamos a este ponto.

No item c, para encontrar o 10º e 20º termo da sequência, percebe-se que os alunos utilizaram técnicas mais amplas em relação à primeira, no dizer de Casabò (1994). De fato, a turma já tinha de antemão a conclusão de que havia uma regularidade, de 2 em 2. Contudo, tal fato não foi levado em consideração já que dobraram o valor pedido para o 10º e 20º termo. Ficou evidente, o que já foi denominado de generalização apressada, que os alunos utilizaram, como apoio tecnológico, conteúdos que julgaram suficientes. Ou seja, eles utilizaram como técnica uma multiplicação (no caso, um raciocínio proporcional). Além do mais, já foi visto que, segundo Chevallard (1998), uma técnica pode ser utilizada como um discurso tecnológico, como é o caso da multiplicação em problemas que envolvem proporção. Tal fato se verifica nas análises aqui.

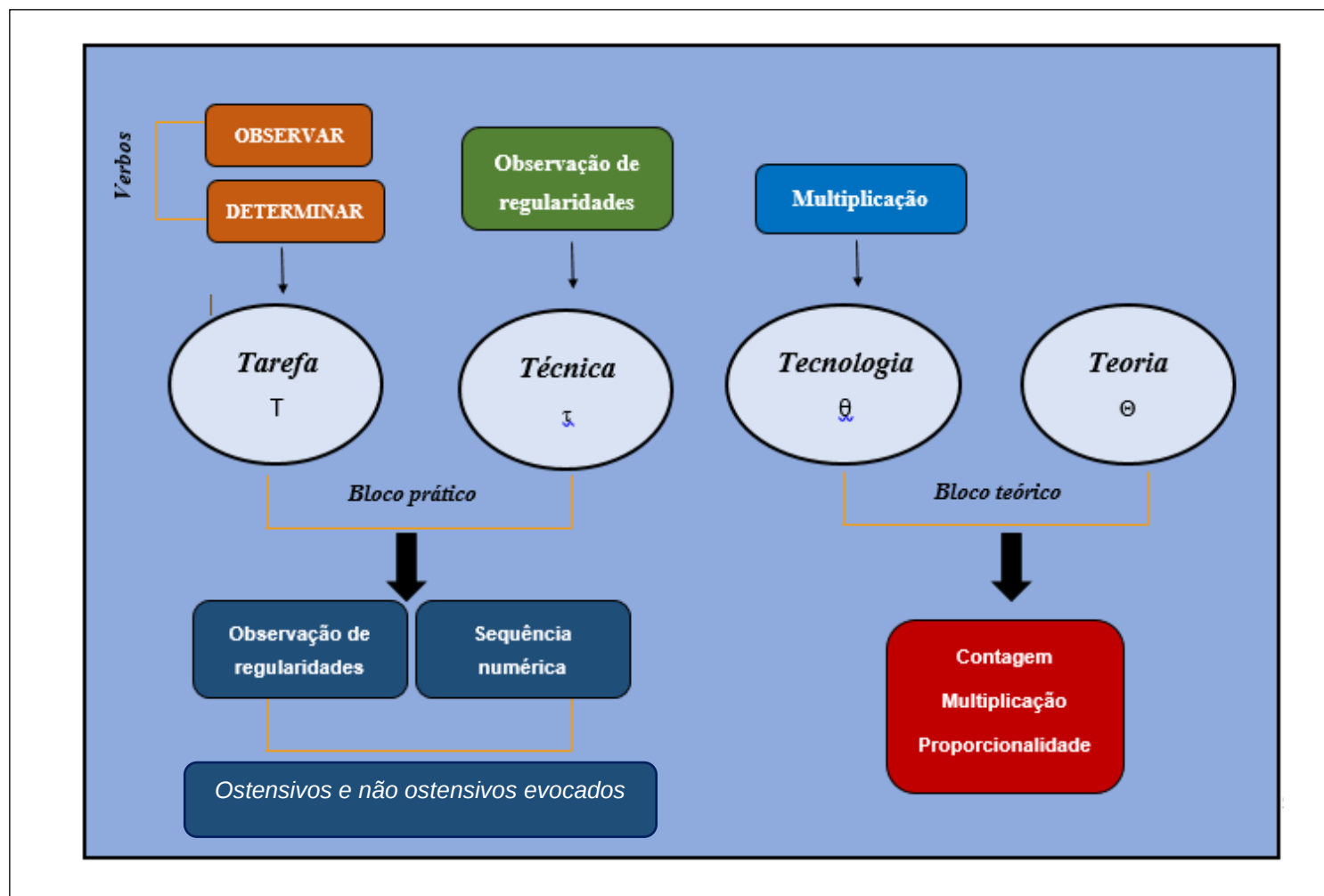
O esquema praxeológico, figura 21 a seguir, busca sintetizar o que viemos expondo até este momento. Por meio dele, percebe-se que, para esta primeira tarefa, os alunos lançaram mão do objeto não ostensivo “observação de regularidades” para manipular o ostensivo escrito “sequência numérica”. O [bloco prático] foi, portanto,

manipulado por meio desses objetos institucionais. A regularidade é um viés do pensamento algébrico e observou-se aqui que os alunos não tiveram maior dificuldade em percebê-la. Sabe-se que a álgebra generaliza essas regularidades por meio de uma linguagem simbólica e formal. Esse caminho que vai da percepção ao simbólico é composto por várias praxeologias. O que a tarefa 1 traz é uma delas, uma possibilidade.

O caminho, portanto, é caminhar do bloco prático ao teórico, em generalizações cada vez mais amplas. Na tarefa 01, cujo caminho vai de uma regularidade à determinação de seus termos, percebemos que o campo teórico do aluno foi fundamentado por duas alternativas: contagem e proporcionalidade. Vamos admitir, neste momento, que houve uma generalização baseada em termos aritméticos. A ausência de um algoritmo pré-definido fez emergir a tecnologia que o aluno julgou mais apropriada. Até, aqui, portanto, a justificativa aritmética sobressaiu.

O esquema (figura 21) busca mostrar o que estamos argumentando.

Figura 21 – Esquema praxeológico: Tarefa 1



Fonte: Construção nossa, 2019.

Antes de prosseguirmos com a próxima tarefa, alguns pontos serão colocados em evidência, numa tentativa de direcionar o que já foi visto em relação a algumas colocações da teoria. Do esquema anterior, figura 21, quer-se argumentar que, para caminhar do bloco prático ao teórico, é necessário, pela própria definição da teoria, justificar a técnica e garantir que ela funcione (CHEVALLARD, 1998). Por vezes, essa justificação não passa de uma demonstração que fica ali, no passo a passo de alguma tarefa, como a garantir que o processo não admita mais argumentação. A nosso ver, essa justificativa tecnológica e teórica carrega generalizações que dão uma formalidade à técnica. Há, portanto, um caminhar que vai de um particular para o geral. Chevallard (1998) deixa isso muito claro.

De fato, as afirmações teóricas frequentemente parecem abstratas e muito distantes das preocupações dos tecnólogos e técnicos "simples". **Esse efeito de abstração está correlacionado com o que funda a grande generalidade dos enunciados teóricos – sua capacidade de justificar, explicar, produzir** (CHEVALLARD, 1998, p.5, grifo e tradução nossa¹⁶⁵).

Tecnologia, teoria, justificativas, carregam em si características de generalidade. O aluno, portanto, ao buscar embasamento para sua técnica, cria seu ambiente teórico, seu ambiente de generalidade, de abstração. O que ocorre é que suas justificativas podem não ser amparadas no ambiente teórico que prevê a instituição. Isso abre duas possibilidades. Vejamos.

Primeiro, o modelo praxeológico permite analisar o que o aluno utiliza como tecnologia/teoria. E aqui chegamos ao conceito de aprendizagem na TAD. Chevallard (1992) fala em mudança na relação pessoal com o objeto. Há objetos (ostensivos e não ostensivos) conhecidos pelo aluno e que são visíveis naquele momento. Outros não aparecem. E, nesse momento, entendemos que o ambiente teórico é construído com os objetos que são por ele conhecidos. A relação pessoal dá-se, portanto, com o objeto O, com o qual ele já teve algum contato. Assim, depreende-se que o aluno utiliza seu próprio cabedal de objetos para fundamentar, para justificar sua relação

¹⁶⁵ De fait, les énoncés théoriques apparaissent fréquemment comme abstraits, éloignés des préoccupations des «simples» technologues et techniciens. Cet effet d'abstraction est corrélé à ce qui fonde la grande générativité des énoncés théoriques – leur capacité à justifier, à expliquer, à produire.

pessoal no trato com o ambiente prático [T / τ], tarefa-técnica, construindo, portanto, seu *corpus* teórico [θ , Θ].

A segunda possibilidade que se abre pelo fato de o aluno construir seu [bloco teórico] de maneira diferente do que prevê a instituição é que esse apoio teórico pode – e deve – ser criado. Na álgebra, a generalização cada vez mais ampla pede ambientes tecnológicos e teóricos cada vez mais formais. Um deles é a linguagem algébrica. Ela precisa ser introduzida, trabalhada, para que o aluno tenha esse ambiente tecnológico como apoio. A esse respeito, Bosch e Chevallard (1999) explicam que não se deve imaginar que objetos ostensivos são percebidos naturalmente. É necessário um trabalho intencional do professor. Os autores, inclusive, chamam de “estratégias didáticas de ostensão” a prática docente que “[...] se limita a mostrar aos alunos um objeto ostensivo na crença de que ele criará espontaneamente uma relação adequada com os ostensivos e não ostensivos” (BOSCH, CHEVALLARD, 1999, p. 12, tradução nossa¹⁶⁶).

É sempre conveniente lembrar que a noção de objeto é um dos fundamentos da TAD e que a teoria prevê que as tarefas matemáticas devem ser problematizadas de modo que os objetos se tornem parte ativa da atividade matemática. É fundamental, na TAD, o papel dos ostensivos e não ostensivos na análise e construção de uma praxeologia. Na citação a seguir, os autores reforçam que técnicas não são espontâneas, e expõem seu desapreço pelas abordagens teóricas que focam apenas no cognitivo, em detrimento de uma atividade matemática.

[...] referindo-se apenas ao funcionamento cognitivo, em oposição ao processamento matemático, consiste na verdade em outra forma de naturalização – e ocultação – da técnica matemática que possibilitaria a realização da tarefa e, além disso, da praxeologia construída – ou a construir, em construção – em torno desse tipo de tarefa. Vemos, assim, que, em certos tipos de teorização, os objetos ostensivos não são integrados à descrição do conhecimento matemático como objetos matemáticos: eles não são considerados como parte do "conhecimento matemático" ou da atividade matemática, mas apenas como ingredientes matematicamente contingentes,

¹⁶⁶ [...] se limite à montreraux élèves un objet ostensif en croyant qu'il se créera spontanément un rapport adéquat à cet ostensif et, sur tout, aux non ostensifs aux quels il est censé en voyer.

mas necessários para o funcionamento cognitivo subjacente a esta atividade (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 31, tradução nossa¹⁶⁷).

Essas colocações levam à sugestão de que a análise de ostensivos e não ostensivos elencados pelos alunos pode indicar o que eles já têm por ambiente teórico e o que precisa ser construído. Ou seja, vamos admitir que há certos níveis de generalização que são da instituição, e aqueles que são do aluno. Vejamos como isso se dá nos parágrafos seguintes.

Nossas análises constataram que o objeto generalização assume características de ostensivo e não ostensivo, ou seja, é uma noção e é um registro. Bosch e Chevallard (1999) mostram que é importante focar nesta dialética que une essas características e não na classificação dos objetos em si. Com isso, dissemos que a generalização parece comportar-se como um objeto que está em constante movimento e que vai de uma manipulação simbólica que generaliza determinado aspecto da matemática a uma generalização que permite manipular simbolicamente outros objetos. Ou seja, não é possível enxergar a generalização em si, e não há, ainda, nenhum tema em matemática que trate este objeto de maneira explícita. Ele é citado no campo das dimensões da álgebra como algo a ser desenvolvido.

O objetivo geral deste estudo é analisar o *corpus* prático e teórico mobilizado por alunos de 7º e 8º anos do Ensino Fundamental no contato com a generalização algébrica. Para tanto, é sempre prudente levar em conta que esta pesquisa trata do tema generalização a partir de uma perspectiva institucional, nos moldes do que preveem os elementos básicos da TAD. Portanto, vamos admitir que essa escala de concepções dos alunos está distribuída no parâmetro praxeológico previsto pela instituição. Ou seja, os alunos vão se relacionar com os objetos por meio do que é construído institucionalmente. Mas não é possível afirmar que há um acordo perfeito

¹⁶⁷ [...] se référer uniquement au fonctionnement cognitif, par opposition autrement mathématique, consiste en réalité en une autre forme de naturalisation – et d’occultation – de la technique mathématique qui permettrait de réaliser la tâche et, au-delà, de la praxéologie construite – ou à construire, encours de construction – autour de ce type de tâches. On voit ainsi que, dans certains types de théorisations, les objets ostensifs ne sont pas intégrés dans la description du savoir mathématique en tant qu’objets mathématiques: ils ne sont pas considérés comme faisant partie des «connaissances mathématiques» ou de l’activité mathématique, mais uniquement comme des ingrédients mathématiquement contingents, mais nécessaires au fonctionnement cognitif sous-jacent à cette activité.

entre o que prevê o currículo e o que de fato ocorre na manipulação dos objetos pelo aluno. Tal situação é o que Chevallard (2003) chama de relatividade institucional: há infinitas maneiras de conhecer um objeto.

Assim, o currículo é construído numa perspectiva escalar, de ampliação dos conteúdos, de retomada constante. O que ocorre é que o aluno também enxerga esse movimento de ampliação e resgate; contudo, ele pode resgatar e apoiar-se em vários objetos institucionais, conforme visto na análise da tarefa 1. E tal situação, a nosso ver, configura nossa visão de que podemos falar em escalas de generalização que são da instituição e aquelas que são do aluno.

Ampliando um pouco mais o horizonte teórico, Mason (1996) defende que é necessária a presença de alguém que possa levar a turma a aspectos importantes da generalização. Mason (1996) fala em contextos cada vez mais amplos no ato de generalizar e que a ausência de um plano intencional direcionado ao trabalho com a generalização desvia a atenção do geral e foca demasiadamente no particular. É quando ele afirma que o professor possui uma consciência mais ampla, capaz de trazer essa abordagem.

Ao afirmar que o docente tem essa visão ampliada do conteúdo, os apontamentos de Mason (1996) comungam com a visão institucional da TAD, a qual permite compreender o porquê de alguns conteúdos precisarem ser construídos, outros, retomados. Ou seja, a distribuição dos temas em matemática prevê uma ampliação no [bloco teórico] nas praxeologia regionais ou globais, por exemplo. Nesse caminho, admitimos que o campo teórico que é construído hoje pela turma, é – ou deveria ser – usado como justificativa nas técnicas de amanhã, as quais comporão um novo ambiente teórico, e assim por diante. E Mason (1996) tem uma afirmativa que corrobora nossos argumentos. O autor afirma que “[...] o que é simbólico ou abstrato para um pode ser concreto para outro¹⁶⁸” (MASON, 1996, p. 11, tradução nossa¹⁶⁹). Ou seja, pontuamos que o professor, ou o currículo, pode prever que o aluno tenha atingido um nível de generalidade em expressões algébricas, por

¹⁶⁸ Aqui o autor trata o abstrato como uma generalização do concreto.

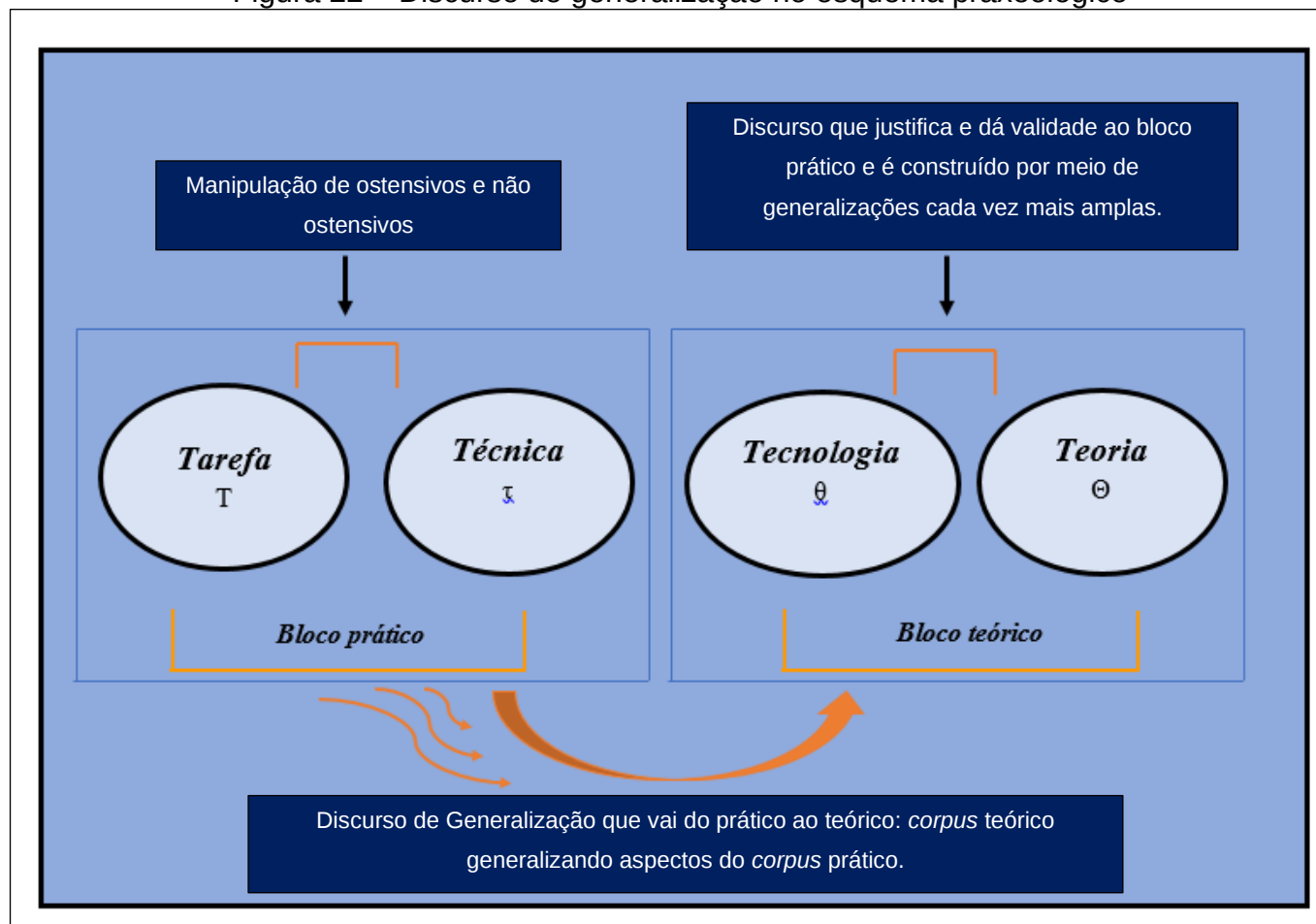
¹⁶⁹ What is symbolic or abstract to one may be concrete to another.

exemplo. Nesse caso, o aluno pode enxergar um monômio como um ambiente teórico a ser construído, ou já pode utilizá-lo para formalizar um teorema, por exemplo.

Há, claramente, diferenças nessas abordagens. A percepção que se tem até aqui é que o aluno generaliza por meio de manipulações sucessivas que vão do [bloco prático] ao [teórico]. Suas justificativas são baseadas em conteúdos e conceitos anteriores. Essa é a teoria e a tecnologia do aluno. E a ideia que queremos desenvolver, a partir daí, é que falar em níveis de generalização ou em escalas de generalização na perspectiva do aluno é analisar seu campo tecnológico/teórico. Vamos explorar essas ideias nas próximas análises.

O esquema praxeológico anterior será refeito com a inclusão de algumas ideias que foram colocadas até aqui: figura 22. Passamos a falar, a partir de agora, de um discurso de generalização dentro do esquema praxeológico. A seguir, a análise da tarefa 2.

Figura 22 – Discurso de generalização no esquema praxeológico



Fonte: Construção nossa, 2022.

6.2.2 Tarefa 2

Conforme a análise institucional apontou, o objeto generalização está presente em diferentes tipos de praxeologia e surge, ainda, fazendo a ligação entre os blocos prático e teórico. Ele aparece tanto no campo dos registros quanto das noções. Portanto, tal fato se constituiu em grande desafio para nós: selecionar as tarefas que seriam objeto de análise. Estamos percorrendo durante todo o trabalho que nosso foco está no momento da aquisição da linguagem algébrica. Referimo-nos ao momento da introdução dos símbolos algébricos. No currículo mineiro, este momento ocorre no 8º ano. A próxima tarefa, figura 23, foi aplicada em outubro de 2021 a uma turma de 8º ano.

Figura 23 – Tarefa 2 aplicada

➤ Para seu aniversário, Dora recebe um cofrinho com R\$ 10,00. Ela vai economizar R\$ 5,00 por semana. Então, no fim da 1ª semana ela terá R\$ 15,00. No fim da 2ª semana ela terá R\$ 20,00. E assim por diante.

a) Faça uma tabela e represente o que Dora tem até a 10ª semana.

b) Agora, tente representar cada semana com um desenho: pode ser pontinhos, fichinhas, quadradinhos etc. Algo que represente o que Dora tem semana a semana, mas em forma de desenho.

c) Quanto Dora tem na 10ª semana?

d) Como fazer para descobrir quanto Dora tem no fim da 30ª semana?

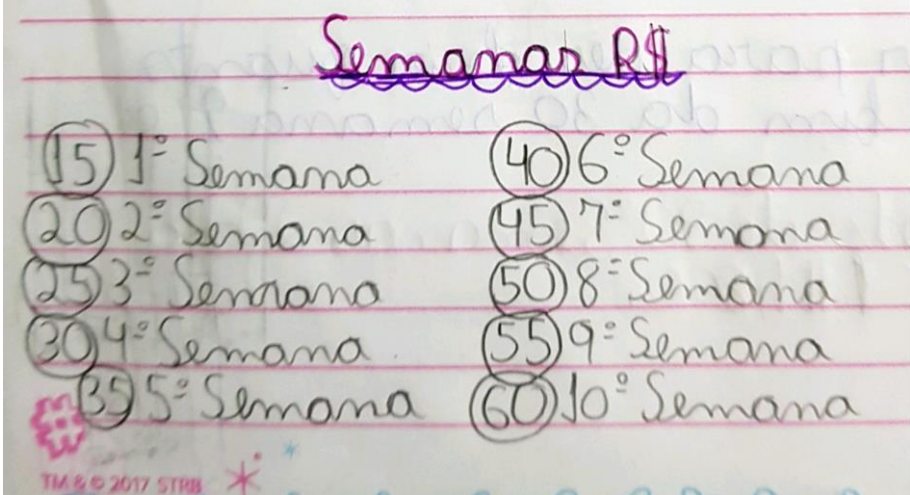
Fonte: Construção nossa, 2021.

A ideia que viemos construindo é que há uma ampliação no trato com os conteúdos. Portanto, analisar determinado ano escolar envolve considerar objetos anteriores e posteriores a ele. Por isso, a escolha das tarefas não levou em conta algum período cronológico. Ao contrário, optamos por elaborar atividades que nos

trouxessem dados que pudessem ser analisados numa perspectiva bem ampla. A ideia principal desta tarefa foi trabalhar com as ideias de leis matemáticas, nos moldes do que foi feito na tarefa 1¹⁷⁰. O objetivo da tarefa 2 foi analisar de que forma os alunos iriam generalizar a lei matemática proposta. Já havíamos verificado na análise da tarefa anterior que o bloco teórico havia sido construído por meio da multiplicação e da proporcionalidade. O intuito foi investigar se tal fato ocorreria mais uma vez, já que se tratava de outros participantes.

Para a letra a da tarefa, não houve maiores dificuldades. O intuito era aproximar os alunos da ideia a ser desenvolvida. Escolhemos a tarefa de uma das estudantes como protocolo, figura 24. A turma generalizou a lei e preencheu até a 10ª semana. Na letra b, a ideia era que os alunos visualizassem a lei por meio de um padrão retangular. Essa instrução não está colocada diretamente no enunciado, mas foi orientada pela professora/pesquisadora. Na letra c, era preciso, apenas, reafirmar que, na 10ª semana, Dora teria R\$ 60,00.

Figura 24 – Tarefa 2: protocolo de uma estudante (a)



Semana R\$	
(15) 1ª Semana	(40) 6ª Semana
(20) 2ª Semana	(45) 7ª Semana
(25) 3ª Semana	(50) 8ª Semana
(30) 4ª Semana	(55) 9ª Semana
(35) 5ª Semana	(60) 10ª Semana

Fonte: Construção nossa, 2021.

¹⁷⁰ Não se trata da mesma turma. A tarefa 2 foi aplicada a outros alunos.

A letra d da tarefa era a questão em que os alunos deveriam apontar como descobrir a quantia de Dora no fim da 30ª semana. Nesta turma, a professora não deu maiores orientações. O objetivo, conforme dito, era identificar que conhecimentos seriam levados em conta pelos estudantes. E a maioria deles utilizou uma operação de multiplicar, à maneira do constatado na tarefa 1. Alguns alunos escreveram que Dora teria $R\$ 60,00 \times 3 = R\$ 180,00$, e outros colocaram $R\$ 60,00 \times 30 = R\$ 1.800,00$. A figura 25 mostra um desses protocolos.

Figura 25 – Tarefa 2: protocolo de uma estudante (b)

b) Agora tente representar cada semana com desenhos; pode ser pontinhos, bichinhos, quadradinhos, etc. Algo que represente o que a Dora tem semana a semana, mas em forma de desenhos.

c) Quanto Dora tem na 10ª semana?
Dora na 10ª Semana vai ter R\$ 60,00

d) Como fazer para descobrir quanto ela tem no fim da 30ª semana?

60	As todos de 30ª Semanas Dora
x 30	tera R\$ 1,800.
1,800	

Fonte: Construção nossa, 2021.

Mais uma vez houve uma generalização da lei por meio de aspectos aritméticos. De acordo com as ideias que estamos desenvolvendo, isso revela o bloco teórico usado pelos alunos como forma de justificar sua técnica. E esse bloco teórico é usado levando em conta conteúdos e praxeologias passadas. Tendo isso em mente, aplicamos a mesma tarefa em outra turma de 8º ano. Entretanto, introduzimos a ideia de construção de leis matemáticas por meio da relação entre os termos e a posição ocupada. Ou seja, trabalhamos uma nova praxeologia, e os resultados foram diferentes.

6.2.3 Tarefa 3

Nesta turma, a ideia foi enfatizar a linguagem simbólica. A tarefa foi a mesma analisada na seção anterior. No entanto, dessa vez, construímos juntos o padrão figural solicitado, e os alunos deveriam determinar quantos pontos haveria na 30ª figura. Para isso, a professora/pesquisadora apresentou aos alunos a construção da lei matemática que descrevia aquela sequência. A turma não apresentou nenhuma dificuldade. Ao contrário, a maioria dos alunos disse ter gostado muito daquele tipo de “dever”. Alguns, inclusive, pediram para refazer a tarefa com outras leis.

O que vamos argumentar neste momento é que tal situação, de fato, não traz nada de surpreendente, ou de novidade. É de se esperar que o professor conduza sua turma e que seus alunos correspondam àquilo que é trabalhado. No entanto, o que queremos destacar é o tipo de conhecimento desenvolvido. Neste estudo, a investigação diz respeito a conhecimentos mobilizados envolvidos na generalização algébrica. E tratamos aqui de um objeto institucional. Um objeto construído. Além disso, é de nosso interesse analisar esta construção numa perspectiva escalar, de possíveis níveis. Uma espécie de crescimento que prevê determinadas fases. Essas fases, a nosso ver, estão relacionadas aos ambientes prático e teórico na perspectiva praxeológica. E o que estamos percebendo é que podemos nos referir à praxeologia do currículo, à praxeologia do professor e à praxeologia do aluno. Cada uma delas com uma característica. Vamos tentar desenvolver essa ideia nos próximos parágrafos.

A figura 26 mostra um protocolo da tarefa 3.

Figura 26 – Tarefa 3: protocolo de um estudante

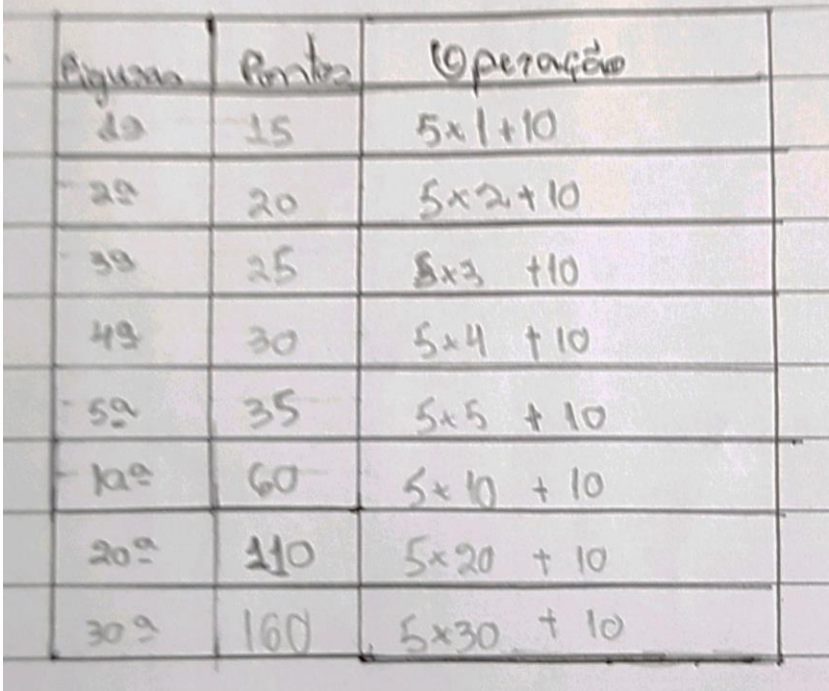


Figura	Pontos	Operação
1ª	15	$5 \times 1 + 10$
2ª	20	$5 \times 2 + 10$
3ª	25	$5 \times 3 + 10$
4ª	30	$5 \times 4 + 10$
5ª	35	$5 \times 5 + 10$
10ª	60	$5 \times 10 + 10$
20ª	110	$5 \times 20 + 10$
30ª	160	$5 \times 30 + 10$

Fonte: Construção nossa, 2021.

Quando procedemos à análise praxeológica do currículo de Minas Gerais, vimos que há uma previsão de conteúdos distribuídos de forma a desenvolver as habilidades a nível algébrico. E, nesse sentido, podemos pensar em praxeologias sucessivas, paralelas, iniciais, intermediárias e finais. Todas elas são construídas numa perspectiva de ampliação, ou seja, conteúdos anteriores são base para os próximos. As tarefas são justificadas em seu ambiente teórico tomando por base conhecimentos anteriores. Nesse sentido, podemos afirmar que o ambiente teórico de hoje será o ambiente prático de amanhã. Essa ideia foi desenvolvida na seção de análise praxeológica do CRMG. Vejamos.

No 1º ano do EF, a tarefa “Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou uma regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras” possui como ambiente tecnológico/teórico a identificação de padrões e a regularidade. Podemos dizer que

essa ideia justifica a técnica e, ao mesmo tempo, será base para tarefas futuras. Observemos agora uma praxeologia do 7º ano, por exemplo: “Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes”. Aqui, a ideia de regularidades e padrões já é usada como técnica no trabalho com equivalência de expressões algébricas.

Com isso, estamos chamando a atenção para a distribuição perfeita dos conteúdos, ou seja, o que é previsto pelo currículo da instituição é um desenrolar bem ordenado do conhecimento. E esse desenrolar é, a nosso ver, ideal, mas não real. Há um crescimento bem previsto no tempo e no espaço escolar. Contudo, precisamos analisar, também, as praxeologias do professor e do aluno. A tarefa 2 ilustra bem o que queremos dizer. É necessária uma construção praxeológica intencional no sentido de formar boas bases para os alunos, ou seja, é necessário que o professor consiga construir o ambiente teórico futuro da turma, pois é esse ambiente que vai justificar as tarefas mais elaboradas no campo da álgebra. Essas ideias que estamos defendendo vão na direção do que argumenta Chevallard (1998).

O autor mostra que a escola tem uma tendência de recriar respostas prontas e que, por conta disso, as praxeologias são todas construídas com o fim de recriar uma obra já pronta. O que ocorre é que inúmeras tarefas são propostas com o intuito de refazer o que já está pronto, ou seja, tudo é trabalhado visando ao ambiente teórico pretendido. A consequência é que, segundo o autor, as tarefas têm o único objetivo de aplicação de ideias e não de geração de novos conhecimentos. Em outras palavras, as tarefas têm o poder de gerar as praxeologias¹⁷¹– e, conseqüentemente, geram teorias –, mas a escola parece movimentar-se apenas em torno do ambiente teórico, assentando num lugar comum que prevê as respostas prontas.

Assim, todo o enredo é construído numa perspectiva da resposta e não da pergunta.

¹⁷¹ Na tarefa 2 podemos perceber como uma mesma tarefa pode gerar outra praxeologia, outro ambiente teórico, se for manipulada por meio de outros constructos teóricos.

[Estudar é] estudar uma obra que existe em outro lugar da sociedade, reconstruí-la, transpô-la para a instituição que serve de habitat para o estudo. A passagem do estudo de uma pergunta para o estudo de uma resposta – uma obra – não ocorre sem algumas modificações na própria noção de estudo (CHEVALLARD, 1998, tradução nossa¹⁷²).

Estamos observando, dessa forma, que a praxeologia do professor deve considerar ambientes teóricos futuros, mas também pretéritos. E com relação à praxeologia dos alunos, o que essas tarefas estão nos mostrando é que não há uma relação direta entre os ambientes prático e teórico desses estudantes, do professor e do currículo.

Há uma ordenação nos conteúdos prevista na instituição, e há, por parte do professor, uma sensação de que ele está seguindo o que é esperado para aquela série, mas nada disso é percebido pelo aluno. O estudante está na base da escala de codeterminação, o professor enxerga um pouco mais acima e a escola trabalha como se todos os degraus fossem percorridos de maneira uniforme.

Nesse sentido, estamos percebendo que, em relação à generalização algébrica:

- o currículo trata esse objeto de maneira longitudinal;
- o professor fica confinado na construção de ambientes teóricos futuros;
- o aluno está sempre considerando ambientes teóricos passados;

Não gostaríamos que este estudo tomasse uma conotação de crítica. Ao contrário. O intento é investigar possíveis comportamentos previsíveis. E o que temos notado é que, no campo da álgebra, a generalização:

- é trabalhada institucionalmente em vários conteúdos;
- está presente nos ambientes práticos por meio de tarefas que nunca serão capazes de torná-la visível, manipulável, palpável;
- compõe o ambiente da álgebra por meio de várias ideias (variável, regularidade).

¹⁷² C'est étudier une *oeuvre* existant ailleurs dans la société, pour la reconstruire, la *transposer* dans l'institution qui sert d'habitat à l'étude. Le passage de l'étude d'une question à l'étude d'une réponse – d'une *oeuvre* – ne va passans quelques modifications dans la notion même d'étude.

Portanto, quando falamos em perspectiva escalar no trabalho com a generalização, estamos percebendo que os alunos percorrem alguns degraus mais ou menos previsíveis. Assim, nota-se que a aquisição da linguagem simbólica é etapa de vulto e que necessita ser trabalhada intencionalmente, numa perspectiva de alfabetização algébrica, pois o aluno vai recorrer a ambientes teóricos passados e, portanto, é necessária uma construção nesse sentido.

Dessa forma, enxergamos uma escala de níveis que podem ser agrupados numa perspectiva de antes e depois da linguagem algébrica. Podemos, então, pensar em níveis pré-simbólicos e simbólicos. A generalização pode, portanto, ser pensada como um ostensivo e um não ostensivo percorrendo toda essa escala. Nessa perspectiva, podemos ainda pensar na alfabetização algébrica como uma praxeologia paralela a tantas outras necessárias.

Trazendo esta ideia para as praxeologias do currículo, do professor e do aluno, nossas análises estão mostrando que:

- o currículo é construído numa perspectiva de sucessão “perfeita” das praxeologias;
- o professor toma cada praxeologia por início e trabalha numa perspectiva de construção futura dos ambientes teóricos;
- o aluno percebe cada conteúdo apoiando-se em praxeologias pretéritas, trabalhando sempre no ambiente prático.

Dessa forma, podemos analisar o objeto de nosso estudo nestas três vertentes. A generalização aparece percorrendo todas as praxeologias como objeto institucional; está presente na construção dos ambientes teóricos como objeto não ostensivo, uma noção, um processo; aparece no ambiente teórico do aluno generalizando os conteúdos apresentados com base naquilo que já foi estudado.

Para encerrar essas colocações, trazemos um apontamento de Bosch e Chevallard (1999) que auxiliam na construção de nossos argumentos. Ao discorrer sobre o papel desempenhado pelos objetos, os autores explicam que “a distinção de ostensivo/não ostensivo [...] toca nos próprios objetos, não no papel que esses objetos desempenham na prática. Ambos servem tanto para fazer quanto para explicar e

justificar o que fazemos” (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 13, tradução nossa¹⁷³). É dessa forma que analisamos o papel do objeto generalização. Ele explica e justifica. Ou seja, é possível fazer uma tarefa generalizando – ambiente prático. E é possível, por meio de uma tarefa, generalizar – ambiente teórico.

6.3. Síntese e considerações finais do capítulo

O capítulo 6 arremata este estudo trazendo as três tarefas que foram aplicadas aos estudantes de 7º e 8º anos. A primeira delas buscou analisar como esses participantes lidariam com questões envolvendo a generalização de uma sequência numérica. Identificamos que os alunos não demonstram nenhuma dificuldade em encontrar uma maneira de generalizar, o que é corroborado por pesquisas feitas por Kieran e outros (2016). O que cabe considerar é a maneira como isso é levado a efeito. No caso aqui analisado, os estudantes utilizaram um raciocínio proporcional como justificativa de seu pensamento. Levando em conta que esta tarefa pode ser concebida à luz de um recorte da realidade, de um isolado no dizer de Caraça (2010), buscamos devolver este resultado ao universo maior e fluente, e chegamos à conclusão de que esta justificativa dos alunos é seu ambiente teórico, no modelo praxeológico que estamos adotando. Há, portanto, um ambiente que precisa sustentar o raciocínio dos estudantes, que dá validade ao seu pensamento.

Nesta pesquisa, constatamos que a turma utilizou objetos da aritmética como apoio às técnicas utilizadas. Notamos, ainda, que o caminho parece ser caminhar do bloco prático ao teórico em generalizações cada vez mais amplas. Isso, de fato, ocorre no modo como o currículo é concebido. Contudo, não se pode garantir que o aluno percebe esse caminhar na mesma direção que é apontada pela instituição. Sintetizando, o aluno, ao embasar sua técnica, acaba criando seu ambiente teórico. Contudo, essas justificativas podem não estar amparadas pelo texto institucional oficial. Além disso, levando em conta este nosso argumento, é possível admitir que é

¹⁷³ La distinction ostensif/non-ostensif ou che donc aux objets eux-mêmes, et non au rôle que jouent ces objets dans la pratique. Les uns et les autres servent autant à faire qu'à expliquer et justifier ce que l'on fait.

necessário um movimento intencional que vise criar este ambiente teórico. Portanto, na generalização algébrica, defendemos, é necessário um trabalho com as praxeologias paralelas no sentido de “alfabetizar simbolicamente” o estudante para que este perceba e utilize o registro simbólico como apoio no seu campo teórico.

Dado que é nosso intento perceber se é possível analisar numa perspectiva escalar as concepções dos estudantes, chegamos à conclusão de que é possível pensar numa escala de níveis envolvendo a generalização algébrica desde que levemos em conta este movimento que vai do prático ao teórico. Ou seja, cada vez que há uma expansão da técnica à teoria, podemos enxergar aí um nível, um degrau a mais nesta escala que vai das partes ao todo. É nesse sentido que falamos em discurso de generalização no esquema praxeológico. Este é, portanto, um objeto que assume características especiais uma vez que é ostensivo, no campo do registro, é não ostensivo, no campo das ideias e é discurso unindo os elementos praxeológicos.

Ele pode ser usado para analisar tanto a praxeologia do aluno quanto a do currículo, e até mesmo a do professor. Mostra um movimento quase infinito em que as tarefas precisam ser justificadas por um ambiente teórico, ao passo que este ambiente teórico é base para a construção de novas tarefas. Neste modelo, podemos imaginar que há ambientes teóricos que são construídos por meio de outras tarefas, em outras praxeologias, as paralelas, conforme já foi exposto. Dessa forma, cremos ser possível prever que, no caso da álgebra, a generalização algébrica carece de tantas outras escadas paralelas no intuito de construir um ambiente teórico simbólico.

Essa ideia que estamos defendendo a respeito de um movimento praxeológico no sentido de trabalhar a noção simbólica da álgebra nas turmas é corroborada pelas tarefas 2 e 3 que aplicamos. Na primeira delas, também houve uma generalização por meios aritméticos. Ou seja, a turma (diferente daquela participante na tarefa 1), também utilizou conceitos passados como ambiente teórico. A professora/pesquisadora então procedeu de forma diferente na outra turma de oitavo ano participante. Dessa vez, houve um trabalho no sentido de construir novas ideias que levassem os estudantes a criar leis matemáticas que relacionassem – de forma simbólica – os termos e a posição ocupada. Foi, então, aplicada a mesma tarefa (que chamamos de 3 neste trabalho) e os resultados foram diferentes. O ambiente teórico

A imagem a seguir, figura 27, é um parque modelo do que estamos entendendo por perspectiva escalar na generalização dos estudantes.

Diagrama de uma escada com três degraus, representando a evolução da tecnologia e da tarefa técnica. Os degraus são rotacionados 45 graus. Os degraus ímpares (1 e 3) são rotacionados para cima e à esquerda, com o rótulo $[T / \tau]$, tarefa-técnica à esquerda. Os degraus pares (2) são rotacionados para cima e à direita, com o rótulo $[\theta, \Theta]$, tecnologia/teoria à direita. Setas curvas azuis indicam a progressão ascendente entre os degraus.

Por fim, estamos enxergando que, em termos de generalização algébrica, parece haver uma perspectiva antes e depois da aquisição da linguagem simbólica. Há, portanto, uma generalização pré e pós simbólica, tornando necessária a construção intencional de praxeologias direcionadas, exclusivamente, à aquisição do símbolo algébrico.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS E FUTURAS

Vamos admitir que pontuar as conclusões deste estudo é para nós o momento de maior desafio. É de nossa concepção defender que estudos na área da educação são tão abrangentes e profundos que se torna muito complexo o ato de apresentar seus arremates finais. Ainda que seja o objetivo de uma pesquisa, cremos ser praticamente impossível lidar com as concepções da educação numa perspectiva final. Mas é aí que enxergamos o potencial de trabalhos desta envergadura: o servir como caminho, como ponte, como elo. E dessa forma, vai-se pavimentando o universo do estudo escolhido. Nos próximos parágrafos, vamos repassar as ideias que foram construídas no decorrer de cada capítulo, numa tentativa de visualizar o caminho percorrido até aqui.

No primeiro capítulo, apresentamos os contornos gerais deste estudo e a maneira como o tema foi sendo absorvido por uma professora que foi se embrenhando no campo da pesquisa. O tema maior deste estudo – a generalização algébrica – foi escolhido por fazer parte de anos de observação da professora em sua experiência na área da matemática. Foram apresentados estudos que embasam e dão pertinência ao tema bem como apontamentos que justificam o poder e a necessidade de estudos como este no universo da Didática da Matemática. A questão de pesquisa – *Quais são as concepções de alunos de 7º e 8º anos envolvendo a generalização na aquisição da linguagem algébrica?* – foi construída seguindo critérios como criatividade e sensibilidade ao tema. Seguindo o preceito de Marconi e Lakatos (2019), construímos nossa hipótese levando em consideração a ideia de atingir níveis de interpretação cada vez mais altos.

A metodologia foi mostrada no capítulo 2 e, por meio dela, localizamos nossa investigação em quatro vertentes: sensibilidade, caminho, validade e ciência. Os dois primeiros foram defendidos no primeiro capítulo. A metodologia escolhida buscou validar e dar cientificidade a este trabalho. Assim, adotando pilares defendidos por Caraça (2010), tomamos como referência da realidade critérios como interdependência e fluência. Essas concepções embasam a questão de pesquisa numa perspectiva de recorte do real, ou seja, admitimos que as concepções dos

estudantes podem ser tratadas como um isolado, na visão de Caraça (2010). Portanto, aceitamos que as análises são tratadas como uma delimitação que foi, por um instante, recortada de um universo maior e fluente, mas que necessita de interpretações que a “devolvam” a essa realidade que se movimenta e flui constantemente.

Além disso, exploramos as características que conferem a este trabalho contornos de abordagem qualitativa. Bogdan e Biklen (1994) apresentam cinco características de uma pesquisa qualitativa, as quais adotamos: ambiente natural do pesquisador como instrumento principal de coleta de dados; necessidade de descrição minuciosa dos fenômenos; foco no processo e não apenas nos resultados; análise indutiva dos dados e, finalmente, consideração à dinâmica interna e especificidade das situações consideradas. Ainda pontuamos que este trabalho possui características de um estudo de caso nos moldes defendidos por Yin (2001), já que se trata de um fenômeno contemporâneo e num contexto de vida real.

Já no capítulo 3, foi explorado o quadro teórico que sustenta esta pesquisa. O universo mais amplo é o da Didática da Matemática. A partir dela, exploramos o campo da Teoria Antropológica do Didático, a TAD, de Yves Chevallard. Exploramos os elementos básicos da teoria (objeto, sujeito e instituição) e, a partir deles, levantamos algumas questões que guiaram esta investigação. Já de início, perguntamo-nos, com o filtro da teoria, que objetos fariam parte do campo algébrico e se a generalização poderia ser reconhecida pelos estudantes como um objeto. Por ocasião das análises, foi visto que a álgebra é uma construção institucional composta de várias fases e que os estudantes acabam percebendo esses objetos de maneira diversa daquilo que é proposto no currículo. Além disso, a generalização é objeto presente como um ostensivo e não ostensivo e, portanto, pode ser creditada como um registro e como uma noção.

O conceito de relatividade institucional da TAD trouxe a necessidade de investigar se há diversas formas de se conhecer o objeto. Assim, as análises permitiram uma interpretação a respeito da forma com que o conteúdo é abordado pelo currículo, pelo professor e, ainda, das maneiras pelas quais é visto pelo estudante. Na ocasião, foi questionado se esses estudantes produzem algum tipo de

conhecimento que não é validado institucionalmente. As análises mostraram que não é possível garantir que o aluno absorva o conteúdo da maneira que aparece nos documentos oficiais. Além disso, dado que a generalização não é conteúdo que aparece abordado de forma direta, ela permeia todo o currículo num movimento crescente. Esse movimento é percebido pelo aluno por meio do que ele toma como referência para justificar seu pensamento. Isso se dá com o que chamamos de ambiente teórico, dentro do conceito de praxeologia da TAD.

O modelo praxeológico forja a atividade humana por meio de dois blocos principais: o técnico, formado por tarefas e técnicas $[T / \tau]$, e o teórico, que abrange tecnologia e teoria $[\theta, \Theta]$, o qual busca justificar essas técnicas por meio de um discurso que vai teorizando essa parte prática da atividade. Essa abordagem da TAD é o cerne de nosso trabalho, uma vez que buscamos trazer uma abordagem praxeológica do objeto generalização. Ou seja, focamos a investigação na análise destes blocos prático e teórico, não só das tarefas dos estudantes, mas também do currículo mineiro.

Foi questionado, neste capítulo, quais seriam os momentos teóricos do estudo na sala de aula. Viu-se, já por meio do conceito de momentos didáticos, que há um fazer praxeológico do professor mais ou menos previsto e que há, num desses momentos, aquele que pretende construir teoricamente o que foi apresentado. Esta seria a praxeologia do professor. O que argumentamos é que o aluno também absorve o que é apresentado a partir de construções práticas e teóricas e que sua teoria é aquilo que é utilizado como suporte para a compreensão do conteúdo – o que, estamos concluindo, é também uma forma de generalizar.

Outro aporte da TAD que adotamos foi o conceito de níveis de codeterminação. Esta escala admite que o conhecimento, no caso aqui uma organização matemática – OM, chega à escola partindo de fora dela: da humanidade até atingir a sala de aula no último degrau, o tópico. Esta escala foi bastante explorada por ocasião da análise institucional. Por meio desta interpretação, viu-se que cada nível desta escala representa uma espécie de generalização do nível anterior, e que, ainda, é possível enxergar essa escala de cima para baixo (de fora para dentro da escola) – o que parece ser o movimento adotado pelo professor – e de baixo para cima (de dentro

para fora da escola) – o que é notado pelo estudante. Ademais, por meio dos níveis de codeterminação, admitimos que a escola, na figura do professor, foca seu trabalho no todo, no conjunto. Já o aluno enxerga as peças separadas deste quebra-cabeça, cabendo a ele, na maioria das vezes, juntar esses fragmentos por conta própria e por meio de uma generalização própria.

No capítulo 4, apresentamos alguns trabalhos que se ocupam do mesmo tema de nosso interesse, numa tentativa de mostrar o que vem sendo pesquisado a respeito de generalização algébrica. Os estudos escolhidos mostram que a maioria dos trabalhos no país trata da generalização por meio das tarefas envolvendo padrões. Não encontramos pesquisas a esse respeito que utilizam a TAD como filtro teórico – o que justifica o ineditismo deste trabalho. Além disso, estudos internacionais, como os de Chevallard (1989, 1990), Denis e outros (2004), Radford (2010), Bronner (2019) e Mason (1996) mostram que o tema é passível de análises diversas, mostrando que esta pesquisa vem somar ao que vem sendo discutido a respeito não só no Brasil, como em outras partes do mundo.

Com o capítulo 5, trouxemos a análise da relação institucional em álgebra no Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG). Acreditamos ter procedido a um estudo bem criterioso e com a devida profundidade que pede um trabalho deste porte. Vamos repassar as principais constatações. Tratamos do currículo como uma construção que obedece à concepção parte-todo. Ao aluno, cabe lidar com os fragmentos de um conteúdo maior que chega a ele por meio de tarefas. Viu-se que o currículo é construído em direção à composição dessas partes, sempre visando a níveis mais altos. Nesse sentido, enxergamos diversos tipos de praxeologias que são construídas com esse fim: atingir um nível de generalização cada vez maior. Para isso, a álgebra é tratada em conteúdos não simbólicos e simbólicos. E a generalização aparece como uma dimensão a ser alcançada neste campo.

Por meio de uma análise dos tópicos e objetivos para matemática do 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental, percebemos que a generalização é abordada de maneira mais explícita por meio do trabalho com padrões e investigação de propriedades e regularidades. É o momento e o modo como a instituição reconhece este objeto. Para isso, identificamos o que chamamos de praxeologias progressivas e paralelas. As

progressivas são aquelas que apresentam o mesmo elemento teórico. Já as paralelas podem aparecer lado a lado com as progressivas e, de alguma forma, caminham numa espécie de independência em relação a estas.

A análise ecológica do CRMG permitiu que, por meio da noção de objetos ostensivos e não ostensivos, construíssemos a ideia de que a generalização pode ser trabalhada por meio da manipulação de outros objetos e, ainda, estar no campo das noções ao ser evocada na compreensão e conclusão dos tópicos. Isso nos leva a afirmar que ela é um objeto que pode ser classificado tanto como ostensivo como não ostensivo.

Já a análise praxeológica do currículo mineiro fez com que identificássemos três tipos de praxeologias nesse documento oficial: a praxeologia inicial, a intermediária e a final. Desenvolvemos a ideia de que as praxeologias iniciais são aquelas mais focadas no ambiente prático. As intermediárias estão centralizadas na construção do ambiente tecnológico-teórico, aquele mais formalizado. Já as praxeologias finais pretendem institucionalizar uma organização matemática e/ou avaliar o processo. O que importa dizer é que há um movimento que vai unindo as técnicas às suas justificativas teóricas. Assim, o que é bloco teórico numa série pode se tornar a técnica em outra praxeologia mais adiante. Enxergamos, portanto, a presença da generalização fazendo o transporte, a migração da técnica à teoria em formalizações cada vez mais abrangentes.

Finalmente, no capítulo 6 apresentamos as tarefas aplicadas aos estudantes com o intuito de investigar suas concepções a respeito da generalização. O que ficou constatado é que, nesse movimento que vai do ambiente prático ao teórico, o estudante utiliza conhecimentos anteriores como suporte para justificar suas técnicas. Foi interesse nosso notar, nas tarefas aplicadas às turmas de 7º e 8º anos, que justificativas de ordem aritmética foram utilizadas por esses estudantes para compor o ambiente teórico em atividades de generalização.

Aplicou-se, ainda, a mesma tarefa em duas turmas distintas de 8º ano, com a diferença de, numa delas, a professora/pesquisadora ter trabalhado, numa praxeologia paralela, conteúdos de álgebra simbólica. Isso fez com que os estudantes

compusessem um novo ambiente teórico e o utilizassem na tarefa, que também buscava a generalização de uma sequência.

Para encerrar, vamos retomar a questão de pesquisa apresentada no início deste trabalho.

- Quais são os conhecimentos mobilizados por alunos de 7º e 8º anos no ambiente prático e teórico ao lidarem com a generalização algébrica?

Por meio de um modelo da perspectiva escalar para a generalização, entendemos que é possível falar em níveis que levem em conta o movimento que vai da técnica à teoria. Ou seja, a teoria utilizada em determinado conteúdo pode se tornar base para uma técnica futura. Com isso, defendemos que **no ambiente prático, faz-se uma tarefa generalizando – a generalização é uma técnica; no ambiente teórico, é possível generalizar por meio daquela tarefa – a generalização é, então, um discurso teórico.**

Numa perspectiva futura, entendemos que este trabalho lança um novo olhar sobre o objeto generalização: falamos em possibilidades práticas e teóricas. Com isso, vamos defender que as ideias aqui desenvolvidas mostram que é necessário um trabalho que preveja a construção de conceitos por meio da generalização. Além disso, viu-se que é necessária uma alfabetização algébrica intencional, pois, conforme mostrado, há um movimento do aluno no sentido de apoiar-se em conteúdos pretéritos ao constituir novos ambientes teóricos. Portanto, defendemos que este estudo lança luz no fazer prático docente e no estudo do objeto generalização.

Nossa intenção, daqui em diante, é continuar este trabalho numa tentativa de desenvolver tarefas que possam ser aplicadas, agora, nos anos iniciais. O intento é continuar a investigação a respeito das praxeologias paralelas e sucessivas direcionadas, exclusivamente, aos primeiros anos do Ensino Fundamental.

Falamos em considerações finais e futuras, pois entendemos que este estudo não apresenta um termo final. O que apresentamos aqui são as conclusões colhidas até então. Nesse sentido, enxergamos desdobramentos que serão por nós investigados continuamente. Acreditamos na pertinência do tema e na profundidade das questões que envolvem o objeto generalização e o campo algébrico.

REFERÊNCIAS

- ARTIGUE, M. La théorie anthropologique du didactique: rapports et articulations possibles avec d'autres approches. *In*: BRONNER, A.; LARGUIER, M.; ARTAUD, M.; BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y.; CIRADE, G.; LADAGE, C. (org.). **Apports de la théorie anthropologique du didactique**: diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. Montpellier: IUFM de l'académie de Montpellier, oct. 2010. p. 29-39.
- BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- BAENA, C. P. **Revisão sistemática e metanálise**: padrão de ouro de evidência? 2014. Disponível em: <https://revistas.ufpr.br/revmedicaufpr/article/view/40706>. Acesso em: 23 set. 2020.
- BAQUEIRO, G. D. S. **Achados sobre generalização de padrões ao “garimpar” pesquisas brasileiras de educação matemática (2003 – 2013)**. 2016. 229 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC, São Paulo, 2016.
- BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Portugal: Porto, 1994.
- BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. **Recherches en didactique des mathématiques**. Grenoble, 19(1), 1999. p. 77-124. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf. Acesso em: 29 maio 2021.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação - MEC; Secretaria de Educação Básica - SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versao_final_site.pdf. Acesso em: 3 dez. 2021.
- BRASIL. Ministério da Educação – MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental. Brasília, DF: Ministério da Educação – MEC; Secretaria de Educação Básica – SEB, 1997a.
- BRASIL. Ministério da Educação – MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental. Brasília, DF: Ministério da Educação – MEC; Secretaria de Educação Básica – SEB, 1997b.
- BRONNER, A. Analyse d'une séquence basée sur des problèmes de généralisation pour l'entrée dans l'algèbre: Apport d'une analyse praxéologique. **Educação**

Matemática pesquisa. São Paulo, v.21, n.4, p. 278-297, 2019. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/42586>. Acesso em: 3 maio 2020.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherchers en Didactique des Mathématiques**, Université de Bordeaux, v. 7, n. 2, p. 33 -115, 1986.

_____. Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970 - 1990. **Mathematics Education Library**. Edited and translated by Nicolas Balacheff *et al.* New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.

CARAÇA, B.J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 7 ed. Lisboa: Gradiva, 2010.

CASABÒ, M. B. **La dimensión ostensiva em la actividad matemática**: el caso de la proporcionalidade. 1994. Tesis (Doctorado en Ciencias – Matemáticas) – Facultat de Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 1994.

CHAACHOUA, H.; BITTAR, M. A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Anais do I Simpósio Latino-americano de Didática da Matemática - LaDiMa**. Bonito, MS: [s.n.]. 2016. Disponível em: https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/297. Acesso em: 27 jan. 2021.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. **Petit X**, n. 19, p. 43-75, 1989. Disponível em: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/19x5_1570440008367-pdf. Acesso em: 15 maio 2019.

_____. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. **Petit X**, n. 23, p. 5-38, 1989-1990. Disponível em: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/19x5_1570440008367-pdf. Acesso em: 15 maio 2019.

_____. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. **Recherches em didactique des mathématiques**, [Grenoble], 19(2), 1998. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27. Acesso em: 20 jun. 2020.

_____. Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In: MAURY, S. S.; CAILLOT, M. (ed.). **Rapport au savoir et didactiques**. Paris: Éditions Fabert, 2003. p. 81-104. Disponível em:

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=62. Acesso em: 15 mar. 2018.

_____. Aspectos problemáticos de la formación docente. Conférence donnée le 1er avril 2001 dans le cadre des **Anales...** XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM) tenues à l'Escuela de Magisterio de Huesca (Université de Saragosse). 2001a. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_2001_-_Osca.pdf. Acesso em: 13 mar 2018.

_____. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Publications mathématiques et informatique de Rennes**, fascicule S6, p. 160-163, 1991. Disponível em: http://www.numdam.org/item/PSMIR_1991__S6_160_0.pdf. Acesso em: 23 jun. 2020.

_____. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en didactique des mathématiques**, [Grenoble], v.12, n. 1, p. 73-112, 1992. Disponível em: <https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/>. Acesso em: 23 jun. 2020.

_____. Famillière et problématique, la figure du professeur. **Recherches en didactique des mathématiques**, [Grenoble], v.17, n. 3, 1997a. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Familiere_et_problematique.pdf. Acesso em: 23 jun. 2020.

_____. Improvisaciones cruzadas sobre lo didáctico, lo antropológico y el oficio de investigador en TAD. (Présentation réalisée le 25 novembre 2011 à Barcelone lors de journées de travail du groupe de recherche Bahujama en hommage à Josep Gascón). Barcelona: 2011a. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_-_Barcelona_-_25-11-2011.pdf. Acesso em: 16 jan. 2022.

_____. L'observation didactique: remarques liminaires. Communication présentée à l'Université d'Automne "Pratiques de terrain: dimension professionnelle de la formation des maîtres" (Fréjus, octobre 1992). **Skholê**, 2, p. 5-25, mai, 1995. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=121. Acesso em: 28 jan. 2022.

_____. La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. **APMEP**, Paris, p. 239-263, 2005. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_place_des_mathematiques_vivantes_au_secondaire.pdf. Acesso em: 26 fev. 2019.

_____. La recherche en didactique et la formation des professeurs: problématiques, concepts, problèmes. In: Xe ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES

MATHÉMATIQUES, 18-25 août ,1999, Houlgate. **Actes** [...]. Houlgate, août 1999, p. 98-112. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/ete.pdf>. Acesso em: 12 out. 2021.

_____. **La transposición didáctica**: del saber sábio al saber enseñado. 3. ed. Tradução: Claudia Gilman. Buenos Aires: Aique, 2000. 196 p. Título original: La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. (Original de 1991).

_____. **Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD**. Texte d'unexposé réalisé le 28 janvier 2011 dans le cadre du Séminaire de l'ACADIS (ADEF, Marseille). 2011b. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_Acadis_28-01-2011_Notes1.pdf. Acesso em: 15 fev. 2022.

_____. Les processus de transposition didactique et leu théorisatin. *In*: ARSAC, G. et al. (org.). **La transposition didactique à l'épreuve**. Grenoble: La Pensée sauvage, 1994b. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les_processus_de_transposition.pdf. Acesso em: 13 abr. 2021.

_____. Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation, *In*: X le ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, 21-30 août , 2001, Corps. **Actes** [...]. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2002a, p. 41-56. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_3.pdf. Acesso em: 15 abr. 2019.

_____. Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. *In*: SÉMINAIRE DE L'ASSOCIAZIONE MATHESIS POUR L'ANNÉE, p. 190-200, fév, 1994, Turin. **Actes** [...]. Turin, fév, 1994a, p. 190-200. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125. Acesso em: 25 abr. 2018.

_____. Pourquoi il a Transposition Didactique? *In*: SÉMINAIRE DE DIDACTIQUE ET DE PÉDAGOGIE DES MATHÉMATIQUES DE L'IMAG, 1982, Grenoble. **Actes de l'année**. Grenoble: Université scientifique et médicale de Grenoble, 1982. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Pourquoi_la_transposition_didactique.pdf. Acesso em: 14 out. 2019.

_____. Principes et enjeux d'une formation professionnelle des professeurs. (Texte d'un exposé fait à Carry-le-Rouet le 12 décembre 2002 dans le cadre d'une journée de formation des formateurs de l'IUFM d'Aix-Marseille.). Marceille: 2002b. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=40. Acesso em: 2 jun. 2021.

_____. The Didactics of mathematics: Its problematic and related research. **Recherches em Didactique des mathématiques**, [Grenoble], 2(1), 1981.

Disponível em: <https://revue-rdm.com/1981/the-didactics-of-mathematics-its-problematic-and-related-research/>. Acesso em: 08 abr. 2018.

_____. Les TPE comme problème didactique. Comunicação ao Seminário Nacional de Didática Matemática. **Annales...** 2001b. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=14

_____. Passé et présent de la Théorie Anthropologique de Didactique. Em: A. Estepa, L. Ruiz, F. J. García (Eds.), **Sociedad, escuela y matemáticas**. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (p.705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007b.

CHEVALLARD, Y.; GRENIER, D. Le topos de l'élève. **Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques**, Houlgate, França, 1997b.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

CUNHA, M. I. O tema da formação de professores: trajetórias e tendências do campo na pesquisa e na ação. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, n. 3, p. 609-625, jul./set. 2013. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ep/a/xR9JgbzxJggqLZSzBtXNQRg/?lang=pt>. Acesso: em 17 set. 2019.

D'AMORE, B. **Elementos da didática da matemática**. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DEMO, P. **Introdução à metodologia da ciência**. 2 ed. São Paulo: Atlas, 1985.

DENIS, M.H. *et al.* **n, c'est un nombre ou c'est des nombres?** 2004. Disponível em: <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WR/IWR04005/IWR04005.pdf>. Acesso em: 4 maio 2020.

DOUGLAS, Mary. **Como as instituições pensam**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2007.

GASCÓN, J. Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. **Educación Matemática**, Distrito Federal (México), p. 99-123, 2014. Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854006>. Acesso em: 18 abr. 2022.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GUADAGNINI, M.R. **Fatoração**: por que estudá-la desde o Ensino Fundamental? 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em:

<https://repositorio.pgsskroton.com/bitstream/123456789/21811/1/M%C3%8DRIAM%20GUADAGNINI.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2020.

HOUSE, P. A. Reformular a álgebra da escola média: por que e como? In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 1-9.

KIERAN, C. *et al.* **Early algebra**: Research in toits nature, its learning, its teaching. New York: Springer, 2016. (ICME-13 TopicalSurveys). Disponível em : https://www.researchgate.net/publication/307692787_ICME-13_Topical_Surveys. Acesso em: 16 jun. 2020.

KLUTH, V. S.; ALMOULOU, S. A. A teoria antropológica do didático: primórdio de uma trajetória direcionado à prática de ensino de matemática. **Educação Matemática pesquisa**. São Paulo, v.20, n.3, p. 1-25, 2018. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/39978>. Acesso em: 17 jul. 2021.

LLINARES, A. Z. Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 21, n. 1, p. 87-114, 2018. Disponível em: https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1665-24362018000100087&lng=pt&nrm=iso&tlng=es. Acesso em: 23 dez 2021.

LÜDKE, M.; ANDRE, M. D. E. A. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. Rio de Janeiro: E.P.U, 2018.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 8 ed. São Paulo: Atlas, 2019.

MASON, J. Expressing Generality and Roots of Algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (ed.) **Approaches to Algebra**: perspectives for research and teaching. Mathematics Education Library. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 65-86. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/279402143_Expressing_Generality_and_Roots_of_Algebra. Acesso em: 13 jun. 2020. DOI: 10.1007/978-94-009-1732-3_5.

_____. **Expressing generality**. Milton Keynes, UK: Open University. 1988.

MASON, J.; SUTHERLAND, R. Key **Aspects of Teaching Algebra in Schools**. London: QCA, 2002.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo. **Pro-Posições**, Campinas, v. 3, n. 1, 1992.

MINAS GERAIS. Secretaria Estadual de Educação de Minas Gerais. **Currículo Referência de Minas Gerais**. Belo Horizonte: Secretaria Estadual de Educação de

Minas Gerais - SEE/MG, 2019. Disponível em:
<https://www2.educacao.mg.gov.br/images/documentos/Curr%C3%ADculo%20Refer%C3%Aancia%20do%20Ensino%20M%C3%A9dio.pdf> . Acesso em: 05 mar. 2022.

MINAYO, M. C. S (org). **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 2018. (Série Manuais Acadêmicos).

NCTM/ National Council of Teachers of Mathematics. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, Virginia: NCTM, 2000.

PEIRCE, C. S. **Escritos coligidos**. 3 ed. São Paulo: Abril Cultural, 1983. (Coleção Pensadores).

POMMER, W. M. Brousseau e a idéia de Situação Didática. *In*: SEMA – SEMINÁRIOS DE ENSINO DE MATEMÁTICA/FEUSP, 2. Sem. 2008, São Paulo. **Trabalho apresentado no [...]**. São Paulo: FEUSP, 2008. Disponível em:
https://www.researchgate.net/publication/296483624_Brousseau_e_a_ideia_de_Situacao_Didatica. Acesso em: 30 set. 2020.

RADFORD, L. **Cognição Matemática**: história, antropologia e epistemologia. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

RADFORD, L. Layers of Generality and Types of Generalization in Pattern Activities. **PNA**, [s.l.], v. 4, n. 2, p. 37-62, jan. 2010. Disponível em:
<https://scholar.google.com/citations?user=rx8IB4MAAAAJ&hl=en>. Acesso em: 13 jun. 2020.

RODRIGUES, C.; MENEZES, L.; PONTE, J. P. Práticas de Discussão em sala de aula de matemática: os casos de dois professores. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 32, n. 61, p. 398-418, 2018. Disponível em:
<https://www.scielo.br/j/bolema/a/vKJjLJycccFdLGb9nsx4qdP/?lang=pt&format=pdf>. Acesso em: 19 dez. 2021.

SANTOS, M. C.; ALMEIDA, J. R. Parâmetros Balizadores Da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil: Pesquisa em Educação Algébrica. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n.3, p.541-555, 2015. Disponível em:
<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/25670>. Acesso em: 07 maio 2019.

SILVA, J. V. G. **Grandezas e medidas**: um percurso de estudo e pesquisa para a prática profissional. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em:
<https://repositorio.pgskroton.com/bitstream/123456789/21804/1/JOS%C3%89%20VAL%C3%89RIO.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2019.

SQUALLI, H. La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiel. *In*: COLLOQUE ESPACE MATHÉMATIQUE FRANCOPHONE (EMF), oct. 2015,

Alger. **Actes** [...]. Alger: 2015. p. 346-356. Disponível em: <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ACF/ACF15122/ACF15122.pdf>. Acesso em: 24 mar. 2021.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Zetetikê**, Campinas, v. 21, n. 39, p. 155-168, jan./jun. 2013.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Penso: Porto Alegre, 2009.