

Vibrações Mecânicas

Rogério Gondim Costa

Antonio de Padua Lima Fernandes

Bruno Rodrigues Lima

Carla Maria Montanari Goncalves

Edmar Mendes de Paula

Giselle Aline dos Santos Gonçalves

Ítalo Colins Alves

Raquel Kenya Ferreira Goncalves de Oliveira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Selma Alice Ferreira Ellwein – CRB 9/1558

C87v Costa, Rogério Gondim, et al.

Vibrações Mecânicas. / Rogério Gondim Costa, Antonio de Padua Lima Fernandes, Bruno Rodrigues Lima, Carla Maria Montanari Gonçalves, Edmar Mendes de Paula, Giselle Aline dos Santos Gonçalves, Ítalo Colins Alves, Raquel Kenya Ferreira Gonçalves de Oliveira. – Londrina: Editora Científica, 2023.

ISBN 978-65-00-66286-3

1. Conceitos. 2. Elementos. 3. Ensino Superior. I. Autores. II. Título.

CDD 620

Editora 
Científica

SUMÁRIO

Unidade 1 – Fundamentos de Vibrações.....	04
1.1. Introdução	04
1.2. Conceitos e classificação de vibrações.....	05
1.3. Elementos de mola.....	06
Unidade 2 – Vibrações livres de sistemas com 1 grau de liberdade.....	09
Unidade 3 – Vibrações livres amortecidas.....	12
Unidade 4 – Vibração excitada harmonicamente.....	17
Unidade 5 – Fenômenos vibracionais.....	20
5.1. Frequência Natural.....	20
5.2. Ressonância.....	22
5.3. Batimento.....	23
5.4. Desbalanceamento.....	24
Referências.....	26

UNIDADE 1 – FUNDAMENTOS DE VIBRAÇÕES

1.1 Introdução

As vibrações mecânicas se referem ao movimento de vaivém de um sistema mecânico em torno de um ponto de equilíbrio. Estas vibrações podem ser causadas por uma variedade de fatores, incluindo forças externas, instabilidades internas, ou mudanças nos parâmetros do sistema.

Segundo Beer et al. (2012), vibração mecânica é o movimento de uma partícula ou de um corpo que oscila em torno de uma posição de equilíbrio.

Hibbeler (2011) define vibração como sendo um movimento periódico de um corpo ou sistema de corpos conectados e deslocados de uma posição de equilíbrio.

As vibrações mecânicas podem ter consequências significativas, desde ruídos, desgastes e falhas em máquinas. A maior parte das vibrações em máquinas e estruturas é indesejável devido ao aumento de tensões e às perdas de energia que as acompanham. Como tal, compreender e controlar as vibrações mecânicas é um tópico importante em engenharia.

Há vários tipos de vibrações mecânicas:

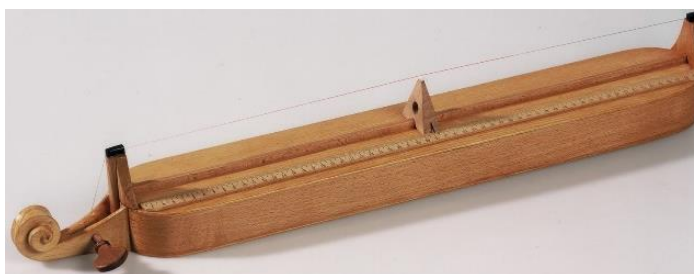
- Vibrações livres: Estas vibrações ocorrem quando um sistema é perturbado a partir de sua posição de equilíbrio e depois é permitido oscilar livremente sem que nenhuma força externa atue sobre ele.
- Vibrações forçadas: Estas vibrações ocorrem quando um sistema é submetido a uma força ou excitação externa, fazendo-o vibrar a uma determinada frequência.
- Vibrações ressonantes: Estas vibrações ocorrem quando um sistema é forçado a vibrar em sua frequência natural, fazendo com que ele ressoe e amplifique as vibrações.

Para controlar as vibrações mecânicas, engenheiros podem implementar uma variedade de técnicas, incluindo amortecimento, isolamento e amortecedores de vibração. Estes métodos visam reduzir a magnitude das vibrações, evitar que elas se

espalhem para outras partes do sistema, ou desviar a frequência das vibrações dos pontos críticos.

O interesse pelo homem por vibrações vem da antiguidade, com os primeiros instrumentos musicais. Conforme Rao (2008), partir daí vem realizando estudos sobre esse fenômeno natural, tentando entendê-lo e dimensioná-lo. Acredita-se que Pitágoras (582-507 a. C.) tenha sido o primeiro interessado em investigar sons musicais cientificamente, realizando experimentos com cordas através de um instrumento chamado monocórdio.

Figura 1 – Monocórdio de Pitágoras



Fonte: br.pinterest.com (2023).

Desde então, a humanidade vem desenvolvendo e estudando as vibrações em seus diversos aspectos. Em meados do segundo século a China vinha sofrendo com muitos terremotos e, então, Zhang Heng, em 132 d. C., criou o primeiro sismógrafo para definir a hora e a direção dos terremotos a fim de tentar prever os eventos sísmicos.

Figura 2 – Sismógrafo de Zhang Heng



Fonte: Exame (2022).

Porém, a maior parte dos estudos e da compreensão das vibrações ocorreu durante os séculos XVII e XVIII com os tão conhecidos cientistas Galileu, Rayleigh, Taylor, Bernoulli, Newton, entre outras grandes mentes da era dos gênios.

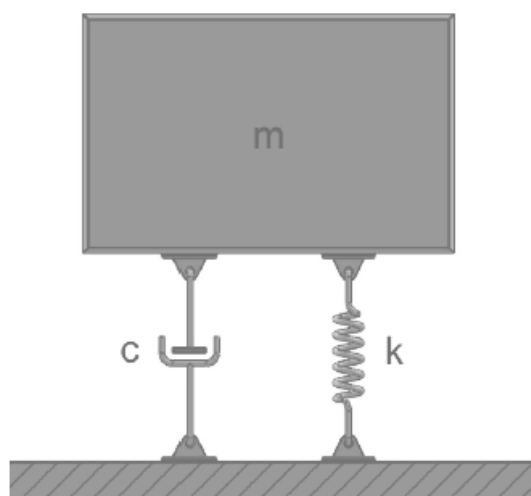
Conforme Rao (2008), no início de 1800, o cientista alemão Ernst Chladni (1756–1824) desenvolveu a teoria da vibração das placas a partir da observação das formas de vibrar de uma placa espalhando areia sobre ela. Porém, foi apenas em 1815 que a cientista Sophie Germain (1776–1831) desenvolveu uma equação diferencial satisfatória para explicar as formas de vibrar das placas, apesar de ter considerado as condições de contorno erroneamente, corrigidas em 1850 por Kirchhoff (1824–1887), sendo então o pontapé inicial para as elaborações matemáticas que temos atualmente. Vale dizer ainda que as vibrações torcionais começaram a ser levadas em consideração somente em 1902 por Frahm, em seu estudo sobre eixos de hélices de navios.

1.2 Conceitos e classificação de vibrações

De acordo com Rao (2008), um sistema vibratório inclui um meio para armazenar energia potencial (mola ou elasticidade), um meio para armazenar energia cinética (massa ou inércia) e um meio de perda gradual de energia (amortecedor).

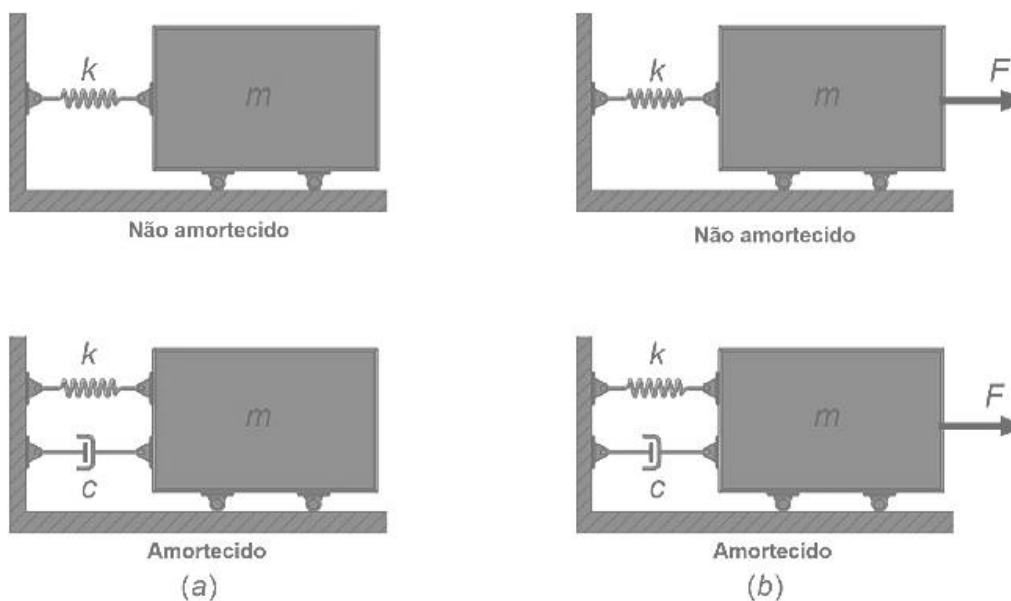
Na Figura 3 observam-se os elementos simplificados, o armazenador de energia cinética representado pela massa (m), o elemento que armazena energia potencial representado pela mola (k) e o elemento que dissipa as energias representado pelo amortecedor (c).

Figura 3 – Sistema vibracional
com todos os elementos



Fonte: os autores.

Segundo Hibbeler (2011), podemos dividir vibração em dois tipos básicos: livres ou forçadas. As vibrações livres são caracterizadas pela oscilação a partir de uma excitação inicial e não repetida, sendo que o sistema se mantém vibrando sem que existam forças externas para tal. Já a vibração forçada é garantida pela entrada de forças externas que perpetuam o movimento vibratório. Ambos os tipos podem ser amortecidos ou não, e os sistemas não amortecidos continuam indefinidamente a vibrar. Os amortecidos perdem energia, que é dissipada com o tempo. Uma vez que existem forças de atrito externas e internas nos sistemas reais, todos são sempre amortecidos. Por motivos de simplificação, muitas vezes desprezamos os amortecimentos, dependendo de sua influência no sistema. A Figura 4 (a) mostra os sistemas vibracionais livres simplificados, enquanto a Figura 4 (b) traz a representação dos sistemas forçados.

Figura 4 – Sistema vibracional com todos os elementos


Fonte: os autores.

1.3 Elementos de mola

Conforme Rao (2008), modelos matemáticos simplificados permitem discretizar as características construtivas de sistemas. Utilizam-se molas lineares com massa e amortecimento desprezados. A mola representa a rigidez do sistema.

Uma força é desenvolvida na mola sempre que houver um movimento relativo entre as duas extremidades. A força da mola é proporcional à quantidade de deformação e é dada por:

$$F = k.x$$

Onde F é a força da mola, x é a deformação (deslocamento de uma extremidade em relação à outra) e k é a rigidez da mola ou constante elástica.

Elementos elásticos como vigas também se comportam como molas. Uma viga em balanço com uma massa m na extremidade apresenta deflexão estática na extremidade livre:

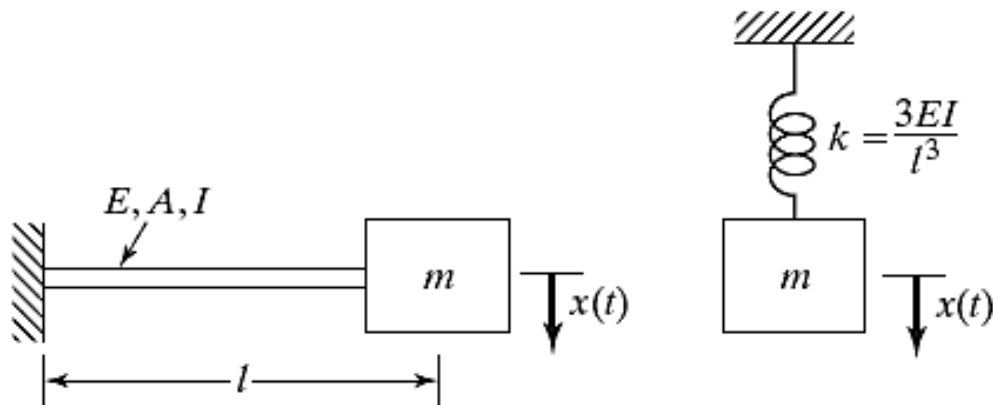
$$\delta_{st} = \frac{Wl^3}{3EI}$$

Onde $W = mg$ é o peso da massa m , E é o módulo de Young, e I é o momento de inércia da seção transversal da viga. A constante elástica será:

$$k = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{3EI}{l^3}$$

A unidade de k no SI é N/m^2 .

Figura 5 – Representação de massa-mola e viga

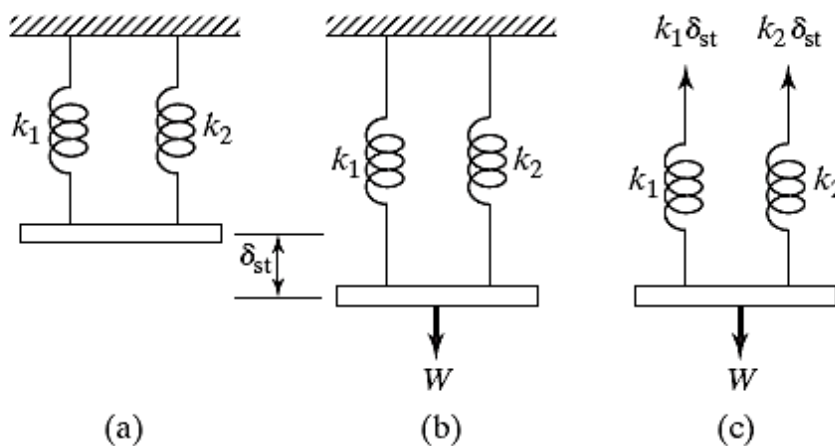


Fonte: Rao (2008).

As molas aplicadas em sistemas em paralelo ou em série podem ser associadas em uma única mola equivalente. Na figura 6, tem-se 2 molas em paralelo (a). Quando é aplicada uma carga W , o sistema sofre uma deflexão estática δ_{st} (b). Então a equação de equilíbrio será (c):

$$W = k_1 \delta_{st} + k_2 \delta_{st}$$

Figura 6 – Associação de molas em paralelo



Fonte: Rao (2008).

Se k_{eq} é a constante elástica equivalente para a associação das duas molas, então, para a mesma deflexão estática δ_{st} :

$$W = k_{eq} \delta_{st}$$

As equações resultam em:

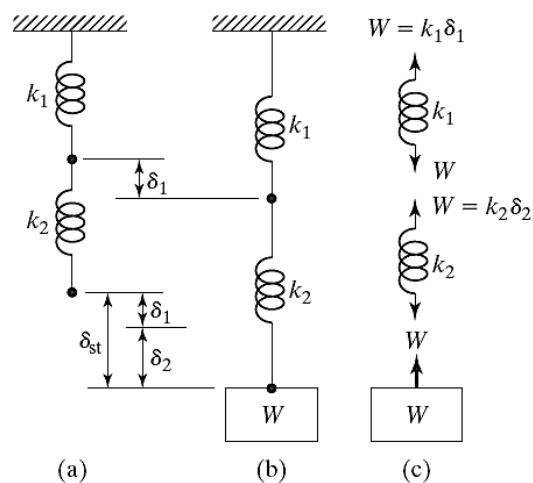
$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

Com n molas em paralelo:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

As molas 1 e 2 da figura 7 (a) sob ação de uma carga W sofrem alongamentos δ_1 e δ_2 respectivamente (b). O alongamento total (ou deflexão estática) do sistema, δ_{st} , será $\delta_1 + \delta_2$.

Figura 7 – Associação de molas em série



Fonte: Rao (2008).

Em (c) tem-se que:

$$W = k_1 \delta_1$$

$$W = k_2 \delta_2$$

Se k_{eq} denotar a constante elástica equivalente, então, para a mesma deflexão estática:

$$W = k_{eq} \delta_{st}$$

Então:

$$k_1 \delta_1 = k_2 \delta_2 = k_{eq} \delta_{st}$$

Ou:

$$\delta_1 = \frac{k_{eq}\delta_{st}}{k_1} \quad \text{e} \quad \delta_2 = \frac{k_{eq}\delta_{st}}{k_2}$$

Como $\delta_{st} = \delta_1 + \delta_2$, substituindo os valores acima:

$$\frac{k_{eq}\delta_{st}}{k_1} + \frac{k_{eq}\delta_{st}}{k_2} = \delta_{st}$$

Isto é:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Com n molas em série:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

Ou:

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}}$$

UNIDADE 2 – Vibrações Livres de Sistemas com 1 Grau de Liberdade

A vibração livre é aquela que ocorre sem a ação de uma força externa ao sistema. O sistema sofre um impulso inicial e continua a vibrar livremente.

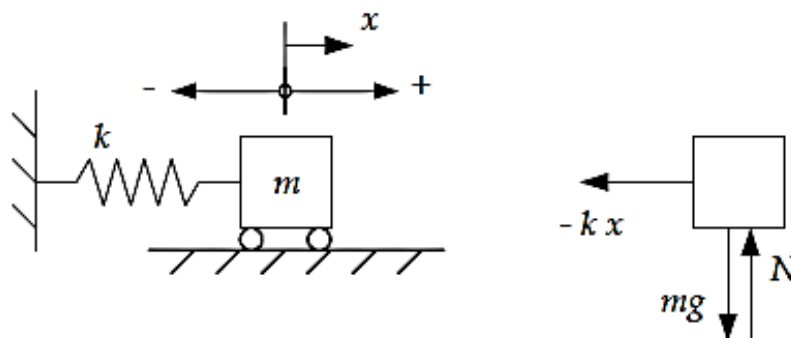
Grau de liberdade refere-se ao número de formas independentes pelas quais um sistema mecânico pode se mover ou vibrar. Por exemplo, um pêndulo simples tem um grau de liberdade porque só pode mover-se para frente e para trás ao longo de um eixo. Por outro lado, um pêndulo duplo tem dois graus de liberdade porque pode mover-se para frente e para trás ao longo de dois eixos. Em geral, o número de graus de liberdade de um sistema mecânico é igual ao número de coordenadas independentes necessárias para descrever seu movimento. A análise da vibração dos sistemas mecânicos muitas vezes envolve o cálculo das frequências naturais e formas de modo do sistema, que são determinadas por seus graus de liberdade. A compreensão dos graus de liberdade de um sistema mecânico é importante para projetar e analisar estruturas, máquinas e outros sistemas mecânicos. Ele pode ajudar os engenheiros a prever como um sistema se comportará sob diferentes condições, e otimizar seu desempenho e segurança.

Para um corpo rígido o movimento oscilatório é descrito pelas equações de Newton-Euler:

$$\begin{aligned}\sum F &= ma \\ \sum M_G &= I\ddot{\theta}\end{aligned}$$

Onde $\sum F$ é o somatório de forças externas, $\sum M_G$ é o somatório de momentos em relação ao centro de gravidade G , I o momento de inércia de massa e $\ddot{\theta}$ a aceleração angular.

Tem-se um modelo massa-mola em vibração livre:

Figura 8 – Sistema massa-mola em vibração livre

Fonte: os autores.

$$\Sigma F = m a = m \ddot{x}(t)$$

$$m \ddot{x}(t) = -kx(t)$$

$$m \ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

Dividindo a equação por m tem-se:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

A frequência angular natural não amortecida será:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \left[\frac{rad}{s} \right]$$

A frequência natural em Hz será:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [Hz]$$

Do movimento livre não amortecido tem-se que:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \quad \text{e} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A equação do movimento livre não amortecido será:

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0$$

A equação acima é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, homogênea com coeficientes constantes, portanto, a solução geral será:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t)$$

Onde A e B são constantes de integração. A velocidade e a aceleração do bloco são determinadas tomando sucessivas derivadas de tempo, o que resulta em:

$$v = \dot{x} = A \omega_n \cos(\omega_n t) - B \omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t)$$

$$a = \ddot{x} = -A \omega_n^2 \operatorname{sen}(\omega_n t) - B \omega_n^2 \cos(\omega_n t)$$

As constantes de integração A e B são determinadas a partir das condições iniciais, quando $t = 0$.

$$x(t = 0) = x_0 = B$$

$$\dot{x}(t = 0) = v_0 = \omega_n A, \quad A = \frac{v_0}{\omega_n}$$

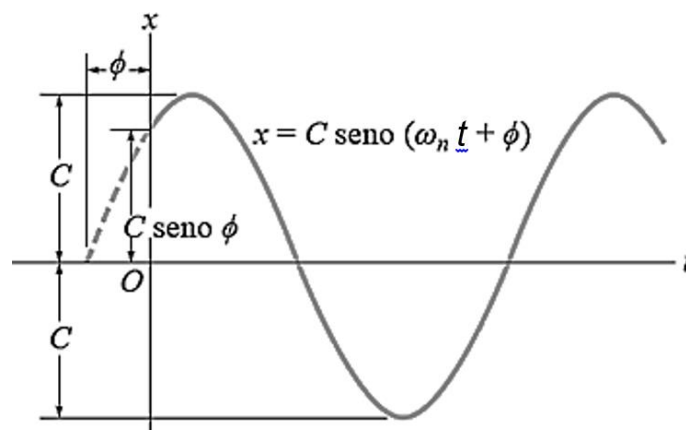
Desta forma, a solução final da EDO é dada por:

$$x = \frac{v_0}{\omega_n} \operatorname{sen}(\omega_n t) + x_0 \cos(\omega_n t)$$

A solução da EDO também pode ser expressa em termos de movimento senoidal simples:

$$x(t) = C \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi)$$

O gráfico da equação é mostrado abaixo. C é a amplitude máxima (x_{max}) e ϕ é o ângulo de fase, que representa o montante pelo qual a curva é deslocada da origem quando $t = 0$.

Figura 9 – Gráfico solução equação EDO

Fonte: os autores.

A amplitude máxima de vibração C será:

$$C = x_{max} = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2 + x_0^2}$$

E o ângulo de fase ϕ :

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{B}{A} = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega_n x_0}{v_0} \right)$$

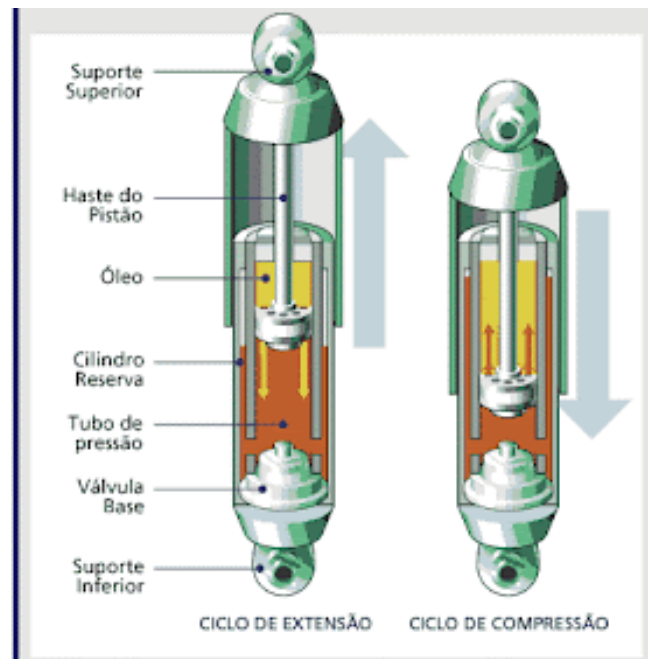
UNIDADE 3 – VIBRAÇÕES LIVRES AMORTECIDAS

De acordo com Hibbeler (2011), todo sistema real que sofra vibrações terá amortecimento, tendo em vista que seus componentes apresentam atrito entre si e que os sistemas estão em meio fluido como o ar, que possui alguma resistência ao movimento, portanto tendo um coeficiente de amortecimento próprio.

O amortecimento viscoso, é um tipo de força de amortecimento que surge devido ao movimento de um objeto através de um fluido, como o ar ou a água. É um mecanismo pelo qual a energia é dissipada a partir de um sistema vibratório ou oscilante, e é frequentemente utilizado para reduzir as vibrações e oscilações em sistemas mecânicos.

O amortecimento viscoso ocorre quando um fluido resiste ao movimento de um objeto que está se movendo através dele. A resistência ao movimento é proporcional à velocidade do objeto, e é caracterizada por um coeficiente de amortecimento que depende das propriedades do fluido e da geometria do objeto. A força de amortecimento atua em uma direção oposta à direção do movimento do objeto, e tende a reduzir a amplitude das oscilações.

Um exemplo comum de amortecimento viscoso é o uso de amortecedores de choque em automóveis. Os amortecedores contêm um pistão que se move através de um fluido, e a resistência do fluido ao movimento do pistão proporciona um amortecimento que reduz as oscilações do sistema de suspensão.

Figura 10 – Amortecedor automotivo

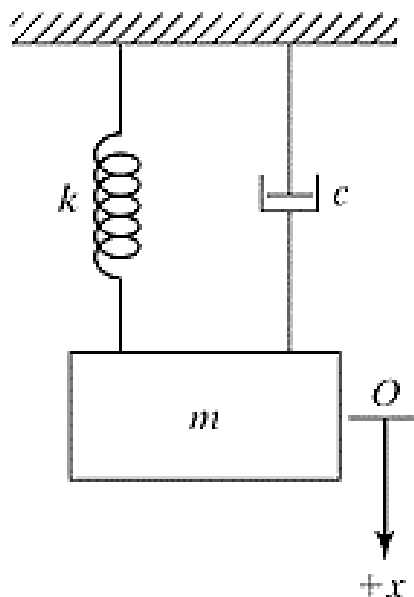
Fonte: carrosemduvida.blogspot.com (2023).

O amortecimento viscoso também é usado em muitos outros sistemas mecânicos, como no amortecimento de vibrações em edifícios e pontes, no controle do movimento em máquinas-ferramentas e na estabilização de naves espaciais durante a reentrada na atmosfera da Terra.

A força de amortecimento é proporcional à velocidade e pode ser expressa como:

$$F = -c\dot{x}$$

Onde c é a constante ou coeficiente de amortecimento e $\dot{x}$ a velocidade. O sinal negativo indica que a força de amortecimento é oposta ao sentido da velocidade.

Figura 11 – Sistema massa-mola-amortecedor

Fonte: os autores.

A aplicação da lei de Newton dá a equação de movimento:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

Para resolver a equação, admite-se uma solução da forma $x(t) = Ce^{\lambda t}$, onde C e λ são constantes indeterminadas. A inserção dessa função na equação resulta na equação característica:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

Cujas raízes são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Estas raízes dão duas soluções para a equação:

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \quad e \quad x_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Assim, a solução geral da equação será:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias a serem determinadas pelas condições iniciais do sistema. A constante de amortecimento crítico (c_c) será:

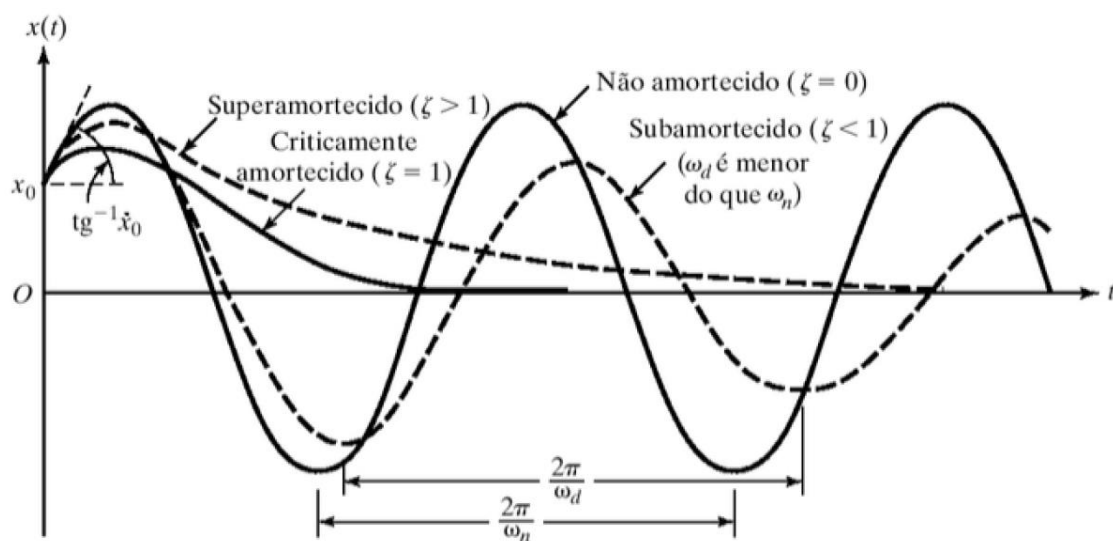
$$c_c = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2m \cdot \omega_n$$

Para qualquer sistema amortecido, o fator de amortecimento ζ é definido como a razão entre a constante de amortecimento e a constante de amortecimento crítico.

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad \text{ou} \quad \zeta = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Quando $\zeta = 0$, a vibração é não amortecida. Para $\zeta \neq 0$, são considerados três casos: sistema subamortecido, criticamente amortecido e superamortecido.

Figura 12 – Comparação entre os casos de movimentos amortecidos



Fonte: Rao (2008).

▪ Caso 1 – Sistema subamortecido:

Nesta condição o coeficiente de amortecimento $\zeta < 1$, o discriminante $\Delta < 0$ e a equação apresenta 2 raízes complexas conjugadas:

$$\lambda_1 = \left(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}\right) \omega_n \quad e \quad \lambda_2 = \left(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2}\right) \omega_n$$

A frequência de vibração amortecida ω_d será sempre menor que a frequência natural não amortecida ω_n :

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n$$

▪ Caso 2 – Sistema criticamente amortecido:

Nesta condição o coeficiente de amortecimento $\zeta = 1$, o discriminante $\Delta = 0$ e a equação apresenta 2 raízes reais iguais:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c_c}{2m} = -\omega_n$$

▪ Caso 3 – Sistema superamortecido:

Nesta condição o coeficiente de amortecimento $\zeta > 1$, o discriminante $\Delta > 0$ e a equação apresenta 2 raízes reais e distintas:

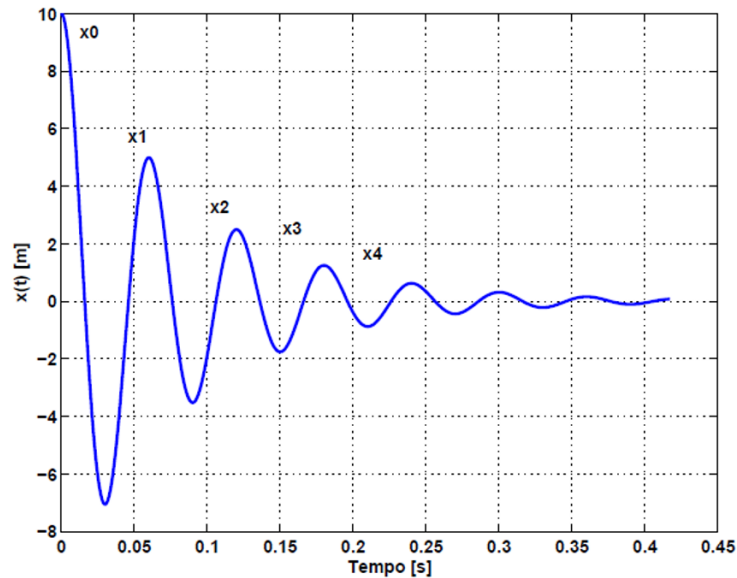
$$\lambda_1 = (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n \quad e \quad \lambda_2 = (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n$$

▪ Decremento logarítmico:

O decremento logarítmico é um parâmetro útil para caracterizar o amortecimento de um sistema, pois se refere à taxa na qual a amplitude da oscilação diminui com o tempo. Especificamente, um valor maior de δ indica uma maior taxa de amortecimento, enquanto um valor menor indica menos amortecimento.

É definido com o logaritmo natural da razão entre duas amplitudes sucessivas:

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

Figura 13 – Gráfico de movimento amortecido

Fonte: os autores.

O decremento logarítmico também está relacionado com a taxa de amortecimento. Após algumas manipulações algébricas chega-se à expressão do decremento logarítmico em função do fator de amortecimento:

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Ou ainda:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

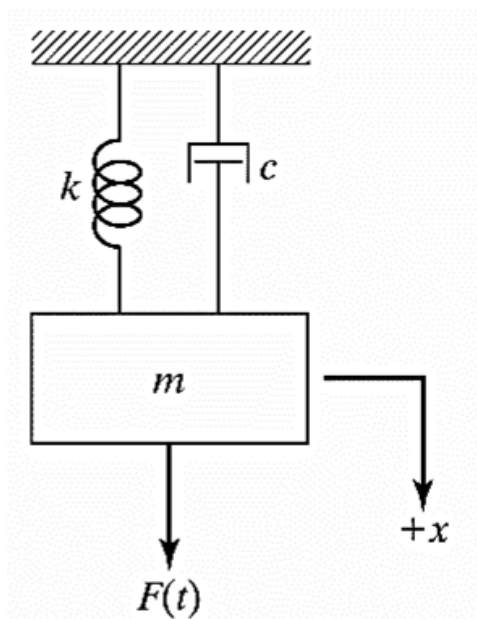
UNIDADE 4 – Vibração Excitada Harmonicamente

Vibração excitada harmonicamente refere-se a um tipo de vibração na qual um sistema ou objeto vibra a uma frequência constante ou múltiplos daquela frequência, devido a uma força externa periódica.

Se uma força $F(t)$ agir sobre um sistema massa-mola-amortecedor, a equação de movimento obtida pela 2ª lei de Newton será:

$$m \ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

Figura 14 – Sistema massa-mola-amortecedor com Força harmônica $F(t)$



Fonte: os autores.

Se uma força $F(t) = F_0 \cos \omega t$ agir sobre a massa m de um sistema não amortecido, a equação de movimento reduz a:

$$m \ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Onde:

F_0 : Amplitude da Força

ω : Frequência (rad/s)

A solução homogênea dessa equação é:

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t$$

Como a força excitadora $F(t)$ é harmônica, a solução particular $x_p(t)$ também é harmônica:

$$x_p(t) = X \cos \omega t$$

Onde X é a amplitude máxima.

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Onde δ_{st} é a deflexão da massa sob uma força F_0 ou deflexão estática.

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$$

Solução total da equação:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

Usando as condições iniciais $x(t = 0) = 0$ e $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$:

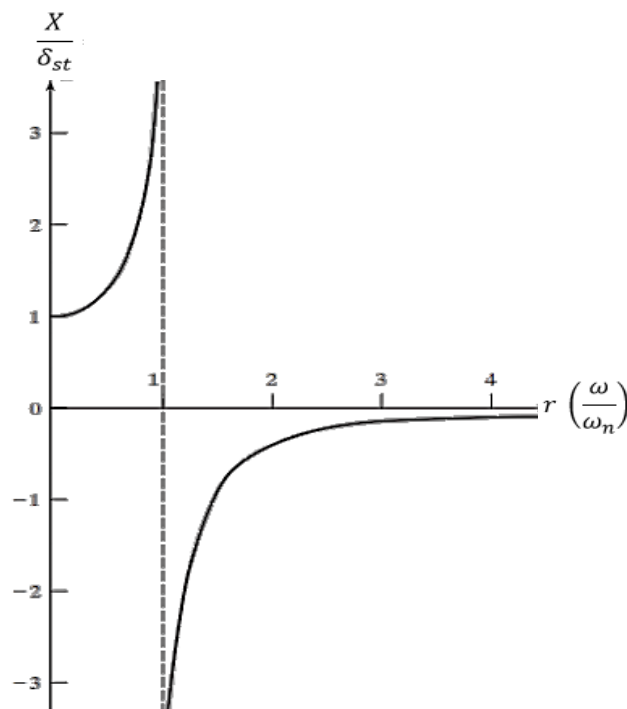
$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

A máxima amplitude X pode ser expressa como:

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Onde $\frac{X}{\delta_{st}}$ é o fator de amplificação – razão entre a amplitude dinâmica e a amplitude estática do movimento.

Figura 15 – Fator de amplificação em sistemas não amortecidos



Fonte: Rao (2008).

- Caso 1: $0 < \omega/\omega_n < 1$ ($\omega_n > \omega$)
- Caso 2: $\omega/\omega_n > 1$ ($\omega_n < \omega$)
- Caso 3: $\omega/\omega_n = 1$ ($\omega_n = \omega$) – **Ressonância**
 Amplitude X tende para o infinito.
 A resposta para a condição de ressonância será:

$$x(t) = X_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{\delta_{st} \omega_n t}{2} \sin \omega_n t$$

O efeito do amortecimento diminui a ressonância e atenua a amplitude. A resposta de um sistema amortecido à força harmônica:

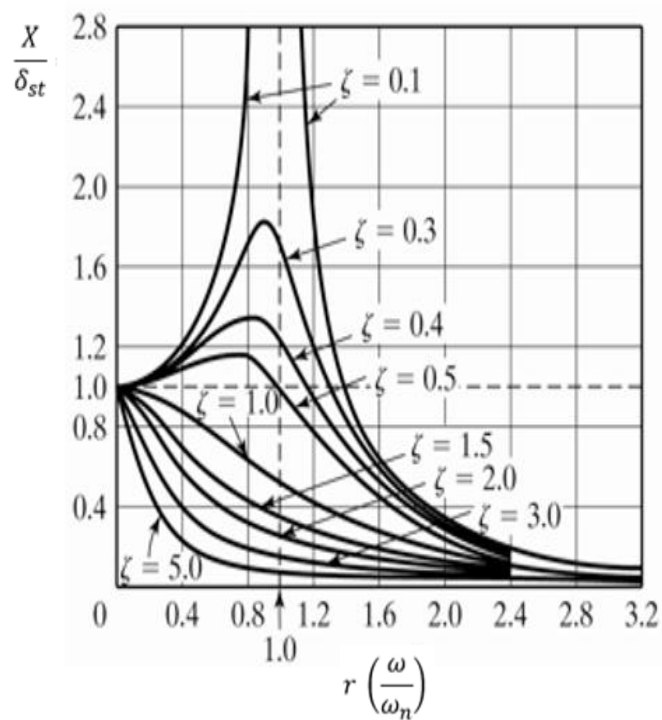
$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos \omega t$$

A amplitude será:

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\left(\frac{c}{c_c}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}$$

O fator de amplificação (FA) será $\frac{X}{\frac{F_0}{k}} = \frac{X}{\delta_{st}}$

Figura 16 – Fator de amplificação em sistemas amortecidos



Fonte: Rao (2008).

UNIDADE 5 – FENÔMENOS VIBRACIONAIS

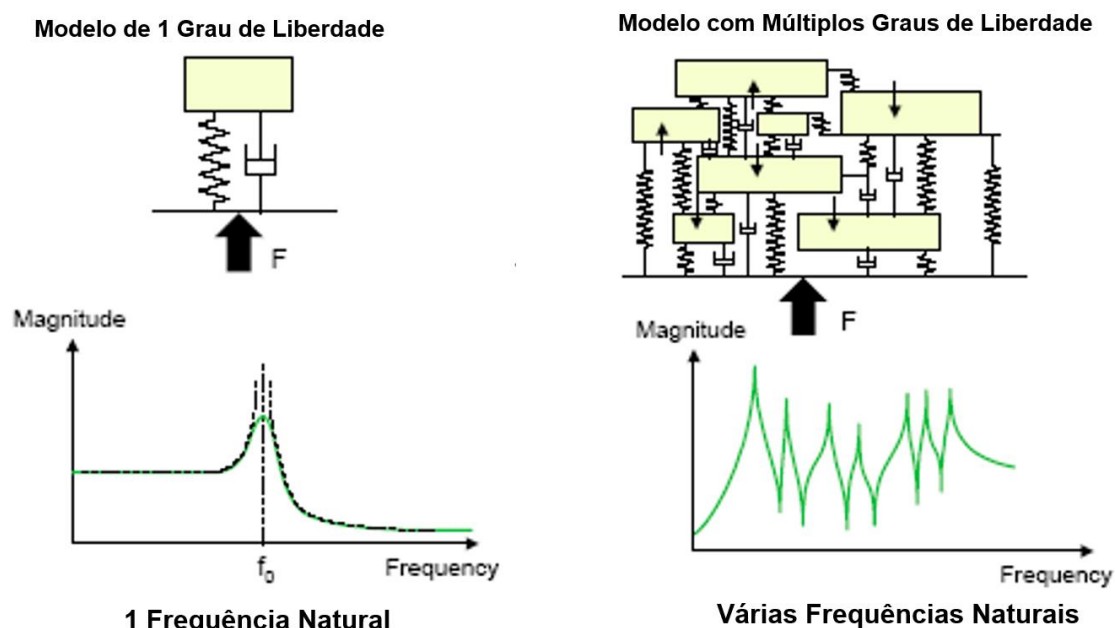
5.1. Frequência Natural

É a frequência na qual um sistema oscila após uma excitação inicial, quando deixado oscilando sem a ação de forças externas. É a frequência na qual o sistema irá oscilar com a maior amplitude quando for deixado a vibrar livremente.

A frequência natural depende das propriedades físicas do sistema, como sua massa, rigidez e amortecimento, e é tipicamente expressa em unidades de Hertz (Hz) ou radianos por segundo (rad/s). Por exemplo, um pêndulo simples tem uma frequência natural que depende de seu comprimento e da aceleração devido à gravidade.

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [Hz]$$

A quantidade de frequências naturais de um sistema depende do número de graus de liberdade. O número de graus de liberdade é o número de massas vezes o número de possíveis tipos de movimentos de cada massa.

Figura 17 – Esquema ilustrando frequência natural


Fonte: os autores.

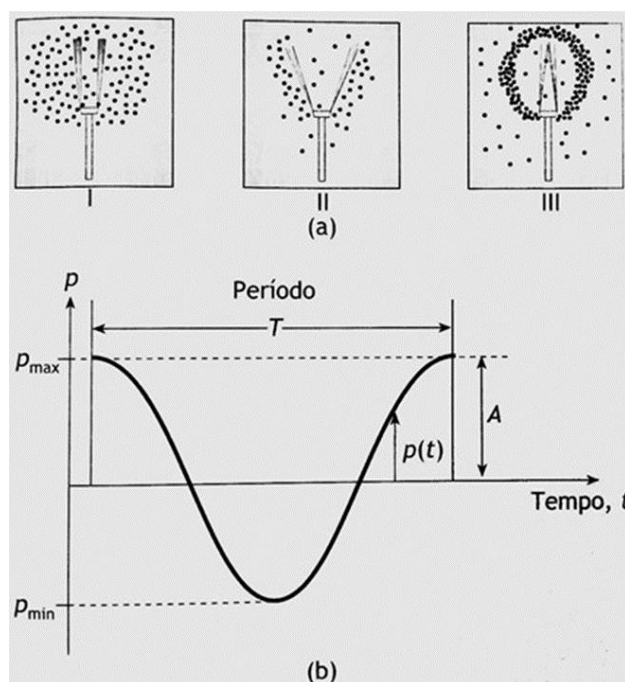
Um exemplo prático da frequência natural é o instrumento metálico denominado diapásão.

De acordo com Bistafa (2011), o diapásão ilustra muito bem o processo de geração do som por uma estrutura vibrante. O diapásão é um objeto metálico, em forma de U, que é comumente utilizado para produzir um tom específico para afinar instrumentos musicais. Quando as duas hastes do diapásão são batidas contra uma superfície, eles vibram e produzem um tom claro e constante com uma frequência específica. O diapásão vibra em sua frequência natural e emite um som à essa frequência.

Figura 18 – Diapasão

Fonte: br.pinterest.com (2023).

A Figura 19 ilustra o processo de geração do som por uma estrutura vibrante como o diapasão. Em (a), o diapasão em repouso cercado por partículas de ar (I). Quando os braços do diapasão se afastam (II), as partículas de ar se aglomeram, chocando-se umas com as outras, gerando compressão. Quando se aproximam (III), gera rarefação. O movimento vibratório provoca então compressões e rarefações cíclicas. O som é gerado quando a amplitude da variação de pressão ambiente é superior ao limiar da audição.

Figura 19 – Representação da propagação de um diapasão

Fonte: Bistafa (2011).

5.2. Ressonância

A ressonância da vibração é um fenômeno que ocorre quando um sistema é submetido a uma força externa ou vibração que combina com sua frequência natural. Quando isto acontece, o sistema responde com uma vibração de grande amplitude, o que pode levar a tensões excessivas, danos ou falhas.

A ressonância é uma consideração importante em projetos; engenheiros e projetistas devem levar em conta as frequências naturais de um sistema ao projetá-lo e testá-lo para evitar a ressonância, que pode causar vibrações indesejadas, ruídos e falhas.

Um exemplo de falha por ressonância ocorreu em 1940 nos Estados Unidos e levou a Ponte Tacoma Narrows ao colapso. O colapso foi causado por um fenômeno que ocorre quando uma estrutura é submetida a ventos fortes que a fazem vibrar e oscilar de forma auto excitante. No caso da ponte, o tremor foi causado pela ressonância do pavimento da ponte com o vento, que foi amplificado pela flexibilidade dos cabos de suspensão e o baixo amortecimento da estrutura.

Como a velocidade do vento aumentou para cerca de 64 km/h, a ponte começou a oscilar de forma intensa e irregular, com o pavimento subindo e descendo até 8,5 m no centro do vão. As oscilações tornaram-se tão severas que acabaram provocando o rompimento dos cabos de suspensão e toda a ponte desmoronou na água abaixo.

O colapso da Ponte Tacoma Narrows foi uma grande falha de engenharia que levou a mudanças significativas no projeto e construção de pontes suspensas, com maior atenção dada aos efeitos do vento e à necessidade de estruturas mais rígidas.

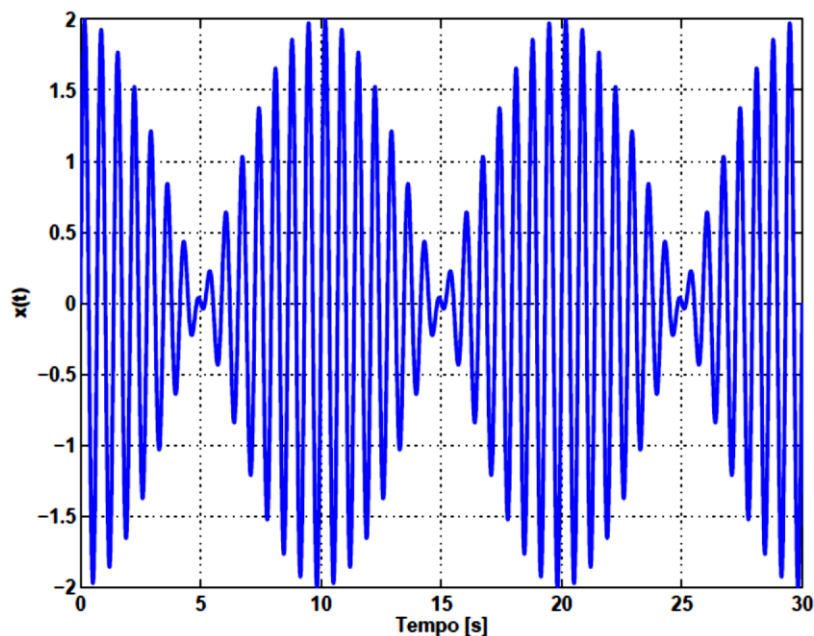
Figura 20 – Colapso da Tacoma Narrows Bridge

Fonte: br.pinterest.com (2023).

5.3. Batimento

O batimento refere-se a um fenômeno que ocorre quando duas ondas sonoras com frequências ligeiramente diferentes interferem uma com a outra, criando uma frequência de batimento que é igual à diferença entre as duas frequências originais. Esta frequência de batida produz um som pulsante que pode ser ouvido como um ritmo distinto.

A amplitude aumenta e diminui segundo um padrão regular. A figura 21 demonstra um exemplo de batimento para um sistema com 1 GDL.

Figura 21 – Representação do fenômeno de batimento


Fonte: os autores.

A equação de resposta será:

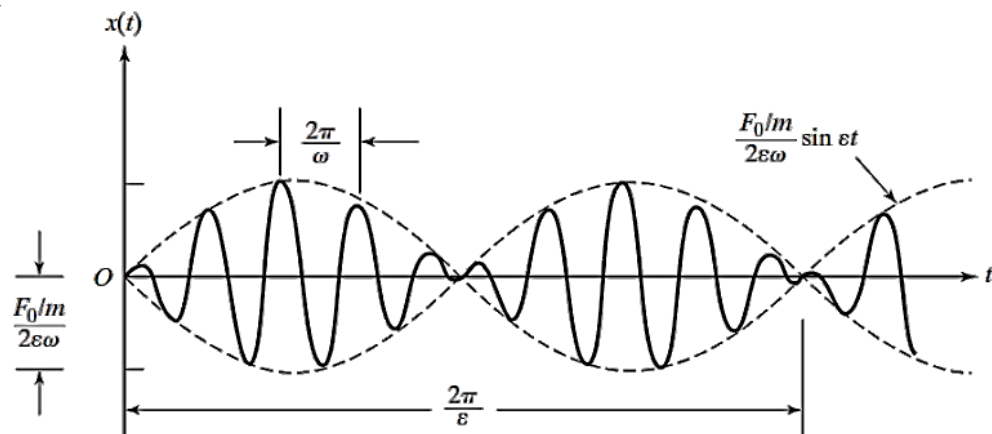
$$x(t) = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right)}{\omega_n^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t)$$

O tempo entre os pontos de amplitude zero ou entre os pontos de amplitude máxima é denominado período de batimento (τ_B):

$$\tau_B = \frac{2\pi}{\omega_n - \omega}$$

E a frequência de batimento:

$$\omega_B = \omega_n - \omega$$

Figura 22 – Gráfico do fenômeno de batimento

Fonte: Rao (2008).

O fenômeno de batimento de vibração é comumente observado na música e em outras formas de produção sonora. Por exemplo, quando duas notas tocadas em diferentes instrumentos musicais têm frequências muito próximas uma da outra, elas podem criar um efeito de batida que acrescenta uma textura única ao som geral.

Além da música, o batimento por vibração também é um conceito importante em engenharia e física, onde é usado para estudar o comportamento das ondas e os efeitos das interferências. Por exemplo, o batimento por vibração pode ser usado para determinar as frequências naturais dos sistemas mecânicos ou para estudar o comportamento das ondas eletromagnéticas nos sistemas de comunicação.

5.4. Desbalanceamento

O desbalanceamento vibracional se refere a uma distribuição desigual de forças ou massas dentro de um sistema que o faz vibrar ou oscilar de forma irregular. Isto pode levar a vários problemas, tais como ruído excessivo, desgaste prematuro e eficiência reduzida.

Por exemplo, em uma máquina rotativa como um motor ou uma turbina, um desequilíbrio na distribuição da massa rotativa pode fazer com que a máquina vibre excessivamente, levando a danos aos mancais, vedações e outros componentes.

O desbalanceamento pode ser causado por uma variedade de fatores, tais como um defeito de fabricação, desgaste ou danos aos componentes da máquina.

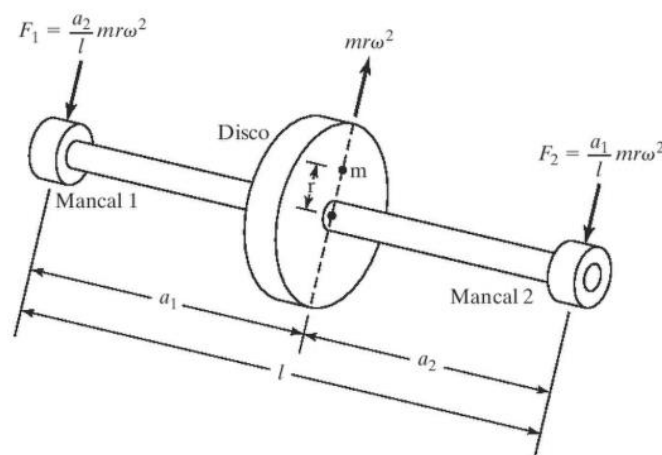
Para detectar e corrigir o desbalanceamento vibracional, normalmente é realizada uma análise de vibração. Isto envolve o uso de instrumentos para medir os níveis e frequências de vibração da máquina e a análise dos dados para determinar a causa raiz do problema.

Uma vez identificada a causa do desbalanceamento, medidas corretivas podem ser tomadas para equilibrar a máquina. Isto pode envolver a adição ou remoção de peso de certas partes do sistema ou o reparo ou substituição de componentes danificados.

É importante corrigir o desbalanceamento vibracional da máquina o mais rápido possível, pois pode levar ao desgaste prematuro dos componentes da máquina e, em última instância, resultar em falha da máquina.

As forças nos mancais geradas por uma massa desbalanceada m de um sistema em um plano ou estático estão representadas na Figura 23:

Figura 23 – Balanceamento de um disco em um plano

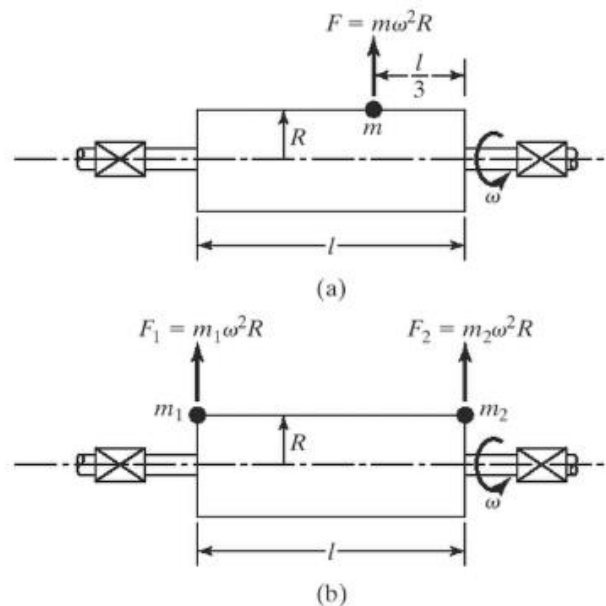


Fonte: Rao (2008).

O balanceamento em um plano ou estático é o mais comum, sendo bastante aplicado em diversos sistemas, como o balanceamento das rodas de um carro.

O balanceamento em dois planos ou dinâmico ocorre quando o elemento rotativo é um corpo rígido alongado. Por isto, a massa desbalanceada m estará em um ponto qualquer do corpo ou distribuída sobre ele. Para este caso, considera-se a massa de desbalanceamento como sendo duas massas equivalentes nas extremidades do corpo, como mostrado na Figura 24.

Figura 24 – Representação do balanceamento em dois planos



Fonte: Rao (2008).

REFERÊNCIAS

BEER, F.; JOHNSTON JUNIOR, E.R.; CORNWELL, P.J. **Mecânica vetorial para engenheiros**: Dinâmica. São Paulo: AMGH, 2012.

BISTAFA, Sylvio R. **Acústica aplicada ao controle de ruído**. São Paulo: Edgard Blucher, 2011.

HIBBELER, R.C. **Dinâmica: Mecânica para engenharia**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

RAO, Singiresu S. **Vibrações mecânicas**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.